Der
Schnellrechner.

Lehrbuch des gesammten Rechnens

einschließlich des Rechnens mit den neuen deutschen metrischen Maßen und Gewichten,

nach der

neuen Schnellrechen-Methode.

Zum Selbst-Unterricht und für Schulen.

Von

H. F. Kameke.

Achte umgearbeitete Auflage.

Inhalt.

Die **Grundrechnungsarten** nebst allen im gewerblichen und kaufmännischen Verkehr vorkommenden Rechnungsarten. **Zins-** und **Zinseszins-, Renten-, Wechsel-, Waaren-Rechnung** 2c.

Die **Progressionen, Gleichungen** und **Logarithmen** in ihrer höchst vortheilhaften Anwendung bei kaufmännischen und andern Rechnungsarten. Ausziehen der **Quadrat-** und **Kubikwurzel, Raumgrößenrechnung** 2c.

Berlin.

Verlag von Theobald Grieben.

1871.

Vorwort.

Das Rechnen in den Schulen ist der Neuzeit nicht mehr angemessen; es wird dort wohl gelehrt, wie die Rechenaufgaben gelöst werden können, aber nicht, wie solche zum praktischen Gebrauch gelöst werden müssen. Mehr als sonst, heißt es jetzt bei dem Kauf- und Geschäftsmanne **„Zeit ist Geld"**, daher muß jede zeitraubende Auflösung vermieden und vorzüglich das Ziffernschreiben so viel als irgend möglich beschränkt werden. Letzteres ist besonders bei der Multiplication, der Hauptgrundlage des ganzen Ziffernrechnens, zu beachten; bei derselben können eine Menge Zusammenstellungen gebildet werden, die zu bedeutenden Abkürzungen führen, von denen aber leider in den Schulen kein Gebrauch gemacht wird.

Schon längst ist in den kaufmännischen Rechenbüchern über das Rechnen in den Schulen geklagt worden (Amthor's Quintessenz des kaufmännischen Rechnens, 1862 Seite 3); allein bis jetzt ist nicht darauf geachtet, weil eben die Lehrer lehren, wie sie selbst das Rechnen gelernt haben.

Die Folge davon ist, daß die jungen Leute, wenn sie mit dem 15. oder 16. Jahre die Schule verlassen, um in ein Geschäft als Lehrling einzutreten, häufig so gut wie gar nicht zu rechnen verstehen, da ihr Rechnen für den praktischen Gebrauch nicht verwendbar ist. Viele nehmen nun Privatunterricht, was aber eben so vielen, aus Mangel an Zeit, nicht möglich ist; für diese wird das vorliegende Rechenbuch ein passendes Hilfsbuch zum Selbstunterricht sein.

Aber auch die Lehrer, denen es darum zu thun ist, ihre Schüler für das praktische Leben auszubilden, finden in diesem Buche einen Fingerzeig, wie sie zur Erreichung ihres Zweckes sich eine zusagende Methode des Rechenunterrichts bilden können.

Es ist indeß, um dem Fortschritt zu entsprechen, außerdem erforderlich, das Rechnen weiter, als auf den täglichen nothwendigen Gebrauch auszudehnen. Jeder, der mit zusammengesetzten Wechselrechnungen, Arbitragen, Waaren-Kalkulationen, speciellen Maß-, Münz- und Gewichts-Reductionen und dergleichen zu thun hat, wird wissen, wie schwierig oft die Auflösungen auf dem bisherigen gewöhnlichen Wege sind, sobald genaue Resultate erzielt werden sollen; schon bei Zinsrechnungen, das Jahr zu 365 Tagen angenommen, entstehen nicht selten schwierige Auflösungen. Hier bieten nun die Logarithmen ein vortreffliches Mittel, alle diese Rechnungsarten auf die leichteste Weise zu lösen. Daher darf dem intelligenten Kauf- und Geschäftsmanne die Kenntniß des Gebrauchs derselben nicht

fehlen, zumal sie so leicht zu erlernen sind; er wird sie, wenn er ihren Werth kennen gelernt hat, selbst bei vielen täglich vorkommenden Berechnungen zweckmäßig zu benutzen wissen, weil jede große Multiplication und Division durch sie auf die leichteste Weise auszuführen ist. Wenn von den jetzigen älteren Kauf- und Geschäftsleuten das Bedürfniß nicht gefühlt wird, bei ihren Berechnungen Logarithmen anzuwenden, so kann daraus nicht gefolgert werden, daß sie darum entbehrlich sind. Diese Leute kennen den Werth der Logarithmen nicht und verstehen deren Nützlichkeit nicht zu beurtheilen; fuhren sie ja früher auch, in alter gemächlicher Gewohnheit, zufrieden, weite Touren mit langsam dahin schwankenden Postfuhrwerken! Jetzt wird es Niemandem einfallen, den durch Dampfkraft getriebenen Waggon als entbehrlich zu betrachten.

Wer nicht mit Gleichungen zu rechnen versteht — die ohne große Mühe zu erlernen sind — kann nicht behaupten, daß er ein guter Rechner sei; selbst im praktischen Leben kommen eine Menge Aufgaben vor, bei denen es auf dem gewöhnlichen Wege des Ziffernrechnens höchst schwierig und erst nach langem Kopfzerbrechen möglich wird, einen passenden Ansatz zu bilden. Wer sich die Kenntniß des Rechnens mit Gleichungen angeeignet hat, der findet durch die Annahme seines unbekannten x nicht allein augenblicklich den Ansatz, sondern vermag aus demselben auch sofort zu beurtheilen, ob durch ihn das gesuchte richtige Resultat erzielt werden kann; dabei ist die Auflösung der Aufgaben durch Gleichungen immer die leichteste und bequemste.

Die Kenntniß der Progressionen ist nöhtig, weil sie eine ins praktische Leben eingreifende Rechnungsart sind, die jedem Kauf- und Geschäftsmanne in vielen Fällen eine zweckmäßige Anwendung darbietet.

Es wird deshalb für die Folge auch wahrscheinlich kein Rechenbuch mehr herausgegeben werden, in dem nicht die vorerwähnten drei Rechnungsarten ausführlich behandelt worden sind, und sehr wünschenswerth dürfte es sein, daß wenigstens bei den höheren Bürgerschulen diese Rechnungsarten recht bald Eingang finden möchten.

Nach dem Gesetz vom 17. August 1868 dürfen die bisherigen Maße und Gewichte, vom 1. Januar 1872 ab, nicht mehr in Anwendung kommen; es sind deshalb sämmtliche Aufgaben in diesem Buche nach den **neuen metrischen Maßen** und **Gewichten**, wie sie Seite 315 u. 316 angegeben sind, bearbeitet und bei den Auflösungen die eigenthümlichen damit verbundenen Verfahrungsweisen überall berücksichtigt.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

Erste Abtheilung.

Die Grundrechnungsarten.

Zweite Abtheilung.

Die angewandten Rechnungsarten.

Einleitung.

§ 1.

Rechnen heißt, aus gegebenen bekannten Zahlen mittelst Anwendung bestimmter Regeln und Gesetze andere unbekannte Zahlen finden.

Eine Zahl ist der Inbegriff mehrerer Dinge einerlei Art oder mehrerer Einheiten.

Die Einheit ist die kleinste ganze Zahl von Dingen einerlei Art.

Wenn mit der Zahl keine Benennung verbunden ist, wie 7, 9, 15, 30 u. s. w., so wird sie eine unbenannte Zahl genannt; ist mit derselben aber eine Benennung verbunden, wie 7 Thaler, 8 Meter, 15 Centner, 30 Ballen u. s. w., so heißt sie eine benannte Zahl.

Für die unbenannte Zahl ist die Einheit 1; für die benannte Zahl ist sie 1 Thaler, 1 Meter, 1 Centner u. s. w.

Erste Abtheilung.

Die Grundrechnungsarten.

I. Das Rechnen mit unbenannten Zahlen.

A. Das Numeriren.

§ 2.

Numeriren heißt Zahlen richtig aussprechen und schreiben.

Das Zahlensystem beruht auf dem dekadischen (zehntheiligen) Gesetz, wonach 10 Einheiten gleich einem Zehner, 10 Zehner gleich einem Hunderter, 10 Hunderter gleich einem Tausender u. s. w. sind.

Die Einer werden in die äußerste Stelle rechts, die Zehner dicht daneben links, die Hunderter wieder links dicht daneben gesetzt u. s. w.

Acht Tausend vier Hundert und fünf und vierzig kann zerlegt werden in 8 Tausender, 4 Hunderter, 4 Zehner und 5 Einer, und wird geschrieben: 8445.

Soll man eine lange Reihe Ziffern aussprechen, so theilt man, von der rechten zur linken Hand, die Zahl in Klassen à 3 Ziffern und macht hier jedesmal ein Komma. Nach 6 Ziffern, ebenfalls von der rechten zur linken Hand gezählt, wird oberhalb der Ziffern das Zeichen für Million (ein kleiner Strich), nach 12 Ziffern das Zeichen für Billion (zwei kleine Striche), nach 18 Ziffern das Zeichen für Trillion (drei kleine Striche) u. s. w. gesetzt.

Für Quadrillion, Quinquillion, Sextillion Septillion, Octillion u. s. w. tritt jedesmal ein kleiner Strich hinzu.

Beim Aussprechen werden immer nur drei Ziffern zusammen genommen und da, wo ein Zeichen oben steht, wird Million, Billion, Trillion u. s. w. gelesen; wo aber kein Zeichen oben steht, spricht man das Komma unten als Tausend aus. So lautet z. B. 7'896,765 Sieben Million, Acht Hundert Sechs und Neunzig Tausend, Sieben Hundert Fünf und Sechszig, und 385,"874,900,'007,009 wird gelesen: 385 Billion, 874 Tausend 900 Million, 7 Tausend und 9.

B. Die 4 Species in unbenannten Zahlen.

1) Die Addition oder das Addiren.

§ 3.

Addiren heißt eine Zahl finden, die so groß ist oder so viele Einheiten enthält, als mehrere gegebene Zahlen zusammen genommen.

Die einzelnen Zahlen, welche addirt werden sollen, heißen Posten, Summanden oder Addenden, und das Ergebniß der Addition wird die Summe genannt.

Das Zeichen für die Addition ist ein stehendes Kreuz und heißt plus. Also $8+7+3+9=27$, wird gelesen: 8 plus 7 plus 3 plus 9 gleich 27. Das Zeichen für gleich (=) wird Gleichheitszeichen genannt.

§ 4.

Wenn mehrere Posten, deren jeder aus mehreren Ziffern besteht, addirt werden sollen, so schreibt man sie so unter einander, daß sie rechts abschneiden, also Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter u. s. w. zu stehen kommen.

Man zählt nun zuerst die Einer zusammen. Diejenigen Einer, welche hierbei keinen Zehner bilden, werden unter die Reihe der Einer hingeschrieben, die dabei entstandenen Zehner aber zu den Zehnern der folgenden Reihe gezählt. Wie mit den Einern, so verfährt man demnächst auch mit den Zehnern, wovon die Hunderter zur folgenden Reihe der Hunderter addirt werden u. s. w. Z. B.:

$$7825 + 4506 + 47 + 950 + 6864$$

wird angesetzt:	7825
	4506
	47
	950
	6864
Summa:	20192

§ 5.

Eine bestimmte Regel, in welcher Weise recht schnell addirt werden kann, ohne dem richtigen Rechnen Abbruch zu thun, läßt sich nicht geben. Wer viel zu addiren hat, findet bald selbst die Art und Weise, wie er am schnellsten zum Ziele gelangt. Nur das ist besonders zu merken, daß man beim Aufzählen die Ziffern nicht einzeln aussprechen, also nicht sagen muß: 2 und 9 sind 11 und 5 sind 16 und 8 sind 24 u. s. w. — sondern man muß die Ziffern im Kopfe addiren und gleich 11, 16, 24 u. s. w. lesen, auch wohl mehrere kleine Ziffern zusammenfassen und dabei möglichst immer auf 10, 20, 30 u. s. w. kommen; ferner daß 9 addirt in der folgenden Klasse jedesmal 1 weniger giebt: $9 + 25 = 34$, $34 + 9 = 43$, $43 + 9 = 52$ u. s. w.

Sind viele über einander stehende Posten zu addiren, so ist es zweckmäßig, die Summe jeder senkrechten Reihe besonders niederzuschreiben, d. h. man addirt die Einer, welche vielleicht 186 geben, dann die Zehner, die vielleicht 132 geben, hierauf die Hunderter, die etwa 98 geben u. s. w., und setzt diese Partialsummen (einzelne Summen, Theilsummen) wieder so unter einander, daß die Zehner unter Zehner, die Hunderter unter Hunderter zu stehen kommen, worauf man addirt, um die Hauptsumme zu erhalten.

186	
132	
98	
Summa: 11306	

Ein etwa gemachter Fehler wird hierdurch leichter aufgefunden, wenn man selbst oder ein Anderer nochmals addirt und ein verschiedenes Resultat erhält.

§ 6.

Es giebt mehrere Proben für die Addition, unter andern auch die sogenannte Neunerprobe, welche in manchen Rechenbüchern besonders empfohlen wird; da aber sämmtliche Proben der Addition durchaus unpraktisch sind, so sind sie, um die Aufmerksamkeit nicht auf unnütze Dinge zu leiten, hier ganz fortgelassen. Will man von der Richtigkeit des Addirens überzeugt sein, so addirt man noch einmal, oder besser, man addirt gleich jede Reihe einmal von unten nach oben und ein zweites Mal von oben nach unten; stimmen beide Resultate überein, so ist anzunehmen, daß die Reihe richtig addirt worden ist.

2) Die Subtraction oder das Subtrahiren.

§ 7.

Subtrahiren heißt eine Zahl finden, welche anzeigt, um wieviel die eine von zwei gegebenen Zahlen größer als die andere ist; oder auch den Unterschied zweier Zahlen finden.

Diejenige Zahl, von welcher subtrahirt wird, heißt der Minuendus, und diejenige Zahl, welche subtrahirt wird, der Subtrahendus. Das Ergebniß wird die Differenz oder der Unterschied, auch Rest genannt.

Das Zeichen für die Subtraction ist ein horizontaler Strich (—) und heißt minus; 12 — 7 = 5 wird gelesen: 12 minus 7 gleich 5, oder 7 von 12 = 5.

§ 8.

Wenn der Minuendus und der Subtrahendus mehrziffrig sind, so setzt man den letzteren so unter den ersteren, daß (wie bei der Addition) die Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen, und zieht nun, bei den Einern anfangend, die untere Ziffer jeder Stelle von der oberen ab.

Minuendus		Subtrahendus
78679687	—	35456475

wird angesetzt:	78679687
	35456475
Differenz:	43223212

§ 9.

Ist in irgend einer Stelle des Minuendus eine Ziffer kleiner, als die darunter stehende Ziffer des Subtrahendus, so wird von der nächsten Stelle des Minuendus links eine Eins geborgt, welche nach dem dekadischen Gesetz (§ 2) für die Stelle rechts Zehn gilt; von dieser 10 zieht man die Ziffer des Subtrahendus ab und addirt zu dem Rest die kleine Ziffer des Minuendus. Um anzudeuten, daß von der Stelle links eine Eins geborgt ist, macht man einen Punkt neben dieselbe. Z. B.:

	854678 — 328294
	10 10
	= 8 5.4 6.7 8
	3 2 8 2 9 4
Differenz:	5 2 6 3 8 4

§ 10.

Wenn sich im Minuendus eine Null befindet, so verfährt man ähnlich wie in § 9, d. h. man borgt von der Stelle links eine Eins und setzt die 10, welche sie für die Stelle rechts enthält, statt der Null, worauf man von der 10 abzieht. Z. B.:

	10
	6 9 4.0 7
	3 4 1 8 5
Differenz:	3 5 2 2 2

§ 11.

Steht die Null so, daß bei ihr geborgt werden müßte, aber weil sie keine Einheiten enthält, zu der nächsten bedeutlichen Ziffer gegangen werden muß, so macht man sowohl bei der Null als auch bei der Ziffer, von der man Eins geborgt hat, einen Punkt und betrachtet dann die Null als 9, weil von der über sie geschriebenen 10 eine Eins geborgt ist. Z. B.:

	10.10
	8.7 5.0.4 6
	3 4 2 4 8 3
Differenz:	5 3 2 5 6 3

Bedeutliche Ziffern sind die Ziffern von 1 bis 9; die Null ist zwar auch eine Ziffer, aber keine bedeutliche.

§ 12.

Stehen mehrere Nullen neben einander, so macht man bei jeder Null, wo man hätte borgen müssen, einen Punkt und betrachtet nun jede Null mit einem Punkt als eine 9. Z. B.:

	10.10.10.10	10.10.10.10.10
	8 7 6.0.0.0.0 6 8	6 5.0.0.0.0.3 4 9
	3 4 2 5 6 7 3 4 5	2 3 4 6 5 7 8 3 8
Differenz:	5 3 3 4 3 2 7 2 3	4 1 5 3 4 2 5 1 1

Anmerkung. — Das Verfahren, eine 10 über die Ziffern des Minuendus zu schreiben und bei jeder Null, über die man fortgeborgt hat, einen Punkt zu machen, gilt nur für Anfänger. Beim wirklichen Rechnen läßt man sowohl die 10 über den Ziffern des Minuendus, als auch die Punkte bei den Nullen fort; man merkt sich blos, daß man über die Nullen hinweg geborgt hat und jede derselben dadurch zu einer 9 geworden ist. Bei einer bedeutlichen Ziffer macht man dagegen gewöhnlich einen Punkt, wenn man von derselben Eins borgt, läßt jedoch beim schnellen Rechnen auch diesen fort. Das letzte Beispiel würde also geschrieben werden:

	6 5.0 0 0 0 3 4 9
	2 3 4 6 5 7 8 3 8
Differenz:	4 1 5 3 4 2 5 1 1

§ 13.

Wenn im Subtrahendus eine oder mehrere Nullen vorkommen, so setzt man die über den Nullen stehenden Ziffern des Minuendus ohne Weiteres in

die Differenz, denn 0 von 8 läßt 8. Ebenso verfährt man, wenn der Subtrahendus weniger Ziffern als der Minuendus hat; man denkt sich dann Nullen statt der fehlenden Ziffern. Z. B.:

1)	2)	3)
8769487	9876546	85364985
3507009	(000)3497	88469
5262478	9873049	85276516

§ 14.

Die Probe für die Subtraction ist: man addirt den Subtrahendus mit der Differenz, in welchem Falle, wenn richtig gerechnet wurde, der Minuendus als Summe erscheint.

3) Die Multiplication oder das Multipliciren.

§ 15.

Multipliciren heißt eine gegebene Zahl so oft zu sich selbst legen oder so oft zu sich selbst addiren, als eine andere gegebene Zahl anzeigt oder als diese Zahl Einheiten enthält.

Diejenige Zahl, welche multiplicirt wird, heißt der Multiplicandus, und diejenige, mit der man multiplicirt, der Multiplicator. Da es aber bei Zahlen mit gleich vielen Ziffern gleichgültig ist, mit welcher Zahl man multiplicirt, ob man nämlich 13 mal 12 oder 12 mal 13 sagt, so werden die beiden zu multiplicirenden Zahlen auch die Factoren genannt.

Das Ergebniß der Multiplication heißt das Produkt.

Das Zeichen für die Multiplication ist ein liegendes Kreuz (×) oder ein Punkt (.) und heißt mal; 3 × 4 = 12 oder 3 . 4 = 12 wird gelesen: 3 mal 4 gleich 12.

§ 16.

Um multipliciren zu können, muß man das folgende sogenannte Ein mal Eins auswendig lernen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120

§ 17.

Wenn der Multiplicator und der Multiplicandus einziffrig oder 10 ist, so ergiebt sich das Produkt aus dem Ein mal Eins. 7 × 8 = 56; 9 × 10 = 90; 10 × 10 = 100. Ist der Multiplicandus dagegen eine mehrziffrige Zahl, so sind die nachfolgenden Verfahrungsweisen anzuwenden. In Bezug auf die, jedem Verfahren beigefügte Erklärung ist zu bemerken, daß unter 1ste Ziffer immer die äußerste rechts stehende Ziffer des Multiplicandus oder Multiplicators gemeint ist; die 2te Ziffer ist alsdann die links nebenstehende, die 3te die folgende links u. s. w. Der Multiplicator wird niemals unter, sondern immer neben den Multiplicandus gesetzt.

§ 18.

Der Multiplicandus ist jede beliebige mehrziffrige Zahl; er soll multiplicirt werden:

a) Mit 2, 3, 4 u. s. w. bis 9.

Man multiplicirt die erste Ziffer des Multiplicandus mit dem gegebenen Multiplicator, schreibt die Einer unter einen Strich und behält die Zehner im Sinn; darauf multiplicirt man die 2te Ziffer, addirt dazu die Zahl im Sinn, schreibt die so erhaltenen Zehner unter den Strich und behält die Hunderter im Sinn. In dieser Weise multiplicirt man jede einzelne Ziffer des Multiplicandus bis zur letzten Stelle.

46854623 × 8 374836984	8 × 3 = 24, 4 hingeschrieben 2 im Sinn; 8 × 2 = 16, dazu 2 im Sinn = 18, 8 hingeschrieben 1 im Sinn; 8 × 6 = 48, dazu 1 im Sinn = 49, 9 hingeschrieben 4 im Sinn u. s. w.

b) Mit 10, 100, 1000 u. s. w.

Der Multiplicandus bleibt unverändert, es werden nur die Nullen angehängt.

65478 × 10 = 654780; 49654 × 100 = 4965400.

c) Mit 11.

Man setzt die erste Ziffer des Multiplicandus unter den Strich; addirt sodann die 2te Ziffer mit der 1sten; hierauf die 3te mit der im Sinn behaltenen Zahl, dazu die 2te Ziffer; dann die 4te Ziffer mit der im Sinn behaltenen Zahl, dazu die 3te Ziffer u. s. w. Die letzte Ziffer wird nur mit der im Sinn behaltenen Zahl addirt.

689789 × 11 7587679	9; 9 + 8 = 17; 8 + 1 im Sinn + 7 = 16; 7 + 1 im Sinn + 9 = 17; 9 + 1 im Sinn + 8 = 18; 8 + 1 im Sinn + 6 = 15; 6 + 1 im Sinn = 7.

d) Mit 12, 13, 14 bis 19.

Man multiplicirt mit der 1sten Ziffer des Multiplicators nach der Reihe alle Ziffern des Multiplicandus und addirt, von der 2ten Ziffer an, jedesmal die Zahl im Sinn und die rechts nebenstehende Ziffer des Multiplicandus; die letzte Ziffer wird dann noch mit der 1 multiplicirt und die Zahl im Sinn dazu addirt.

54675 × 14 765450	4 × 5 = 20; 4 × 7 = 28, + 2 im Sinn, + 5 = 35; 4 × 6 = 24, + 3 im Sinn, + 7 = 34; 4 × 4 = 16, + 3 im Sinn, + 6 = 25; 4 × 5 = 20, + 2 im Sinn, + 4 = 26; 1 × 5 = 5, + 2 im Sinn = 7.

e) Mit 20, 30, 40 u. s. w., so wie mit 200, 300 u. s. w.

Der Multiplicandus wird mit der bedeutlichen Ziffer des Multiplicators wie bei a multiplicirt; dem daraus entstehenden Produkt werden dann die Nullen angehängt.

65468 × 200; 8405800 × 9000
13093600 75652200000

f) Mit 21, 31, 41 u. s. w. bis 91.

Die 1ste Ziffer des Multiplicandus wird wegen der 1 unter den Strich gesetzt; sodann multiplicirt man mit der 2ten Ziffer des Multiplicators alle Ziffern des Multiplicandus der Reihe nach und addirt jedesmal die Zahl im Sinn und die linkS stehende Ziffer des Multiplicandus hinzu. Zum Produkt der letzten Ziffer wird nur die Zahl im Sinn addirt.

34548 × 41
1416468

1 × 8 = 8; 4 × 8 = 32 + 4 = 36; 4 × 4 = 16 + 3 im Sinn + 5 = 24; 4 × 5 = 20, + 2 im Sinn, + 4 = 26; 4 × 4 = 16, + 2 im Sinn, + 3 = 21; 4 × 3 = 12, + 2 im Sinn = 14.

g) Mit 22, 33, 44 und 55.

Man multiplicirt mit der einen Ziffer des Multiplicators zuerst die 1ste Ziffer des Multiplicandus allein, nimmt dann die 1ste und 2te Ziffer des letztern zusammen, hierauf die 2te und 3te Ziffer, dann die 3te und 4te Ziffer u. s. w. und multiplicirt jede dieser Summen mit der einen Ziffer des Multiplicators, dazu jedesmal die Zahl im Sinn. Zuletzt wird die letzte Ziffer des Multiplicandus noch allein multiplicirt und die Zahl im Sinn dazu addirt.

456764 × 44
20097616

4 × 4 = 16; 4 × $\overset{(6\,+\,4)}{10}$ = 40 + 1 im Sinn = 41; 4 × $\overset{(7\,+\,6)}{13}$ = 52 + 4 im Sinn = 56; 4 × $\overset{(6\,+\,7)}{13}$ = 52 + 5 im Sinn = 57; 4 × $\overset{(5\,+\,6)}{11}$ = 44 + 5 im Sinn = 49; 4 × $\overset{(4\,+\,5)}{9}$ = 36 + 4 im Sinn = 40; 4 × 4 = 16 + 4 im Sinn = 20.

h) Mit 23, 24 und 25.

Man verfährt wie bei d mit 13, 14 und 15, nur daß man hier die rechts neben stehende Ziffer, welche jedesmal zu dem Produkt addirt wird, doppelt nimmt; die letzte Ziffer wird dann noch mit 2 multiplicirt und die Zahl im Sinn dazu addirt.

89765 × 24
2154360

4 × 5 = 20; 4 × 6 = 24 + 2 im Sinn + 10 = 36; 4 × 7 = 28 + 3 im Sinn + 12 = 43; 4 × 9 = 36 + 4 im Sinn + 14 = 54; 4 × 8 = 32 + 5 im Sinn + 18 = 55; 2 × 8 = 16 + 5 im Sinn = 21.

i) Mit 29, 39, 49 u. s. w. bis 99.

Man multiplicirt den Multiplicandus mit einem um 1 größeren Multiplicator, also bei 29 mit 30, bei 39 mit 40 u. s. w., setzt das Produkt so unter den Multiplicandus, daß die Null, oder bei 99 die letzte Null, unter die erste Ziffer rechts desselben zu stehen kommt, und zieht nun den oben stehenden Multiplicandus von dem darunter stehenden Produkt ab.

968786 × 59
58127160 (Multiplicandus × 60)
57158374

897896 × 99
89789600 (Multipl. × 100)
88891704

k) Mit 102, 103, 104 u. s. w. bis 109.

Man verfährt wie bei d mit 12, 13, 14 u. s. w., nur daß man hier nicht die rechts dicht nebenstehende, sondern die um eine Stelle weiter stehende Ziffer des Multiplicandus addirt; zuletzt werden die beiden letzten Ziffern links noch mit 1 multiplicirt und nur die Zahlen im Sinn hinzu addirt.

98698 × 106 10461988	6 × 8 = 48; 6 × 9 = 54, + 4 im Sinn = 58; 6 × 6 = 36, + 5 im Sinn + 8 = 49; 6 × 8 = 48, + 4 im Sinn, + 9 = 61; 6 × 9 = 54, + 6 im Sinn, + 6 = 66; 1 × 8 = 8, + 6 im Sinn = 14; 1 × 9 = 9, + 1 im Sinn = 10.

l) Mit 111.

Die erste Ziffer des Multiplicandus wird unter den Strich gesetzt; sodann die 2te und 1ste Ziffer addirt; hierauf die 3te Ziffer, Zahl im Sinn, 2te und 1ste Ziffer addirt; dann die 4te Ziffer, Zahl im Sinn, 3te und 2te Ziffer addirt; und so fort immer 3 Ziffern bis zur letzten Ziffer links, worauf man noch die letzte Ziffer mit der vorletzten nebst Zahl im Sinn und endlich dieselbe letzte Ziffer nur mit der Zahl im Sinn hinzufügt. Bei einer Eins mehr, also bei 1111, wird bis 4 Ziffern summirt und ähnlich wie vorhin verfahren.

84563 × 111 9386493	3; 6 + 3 = 9; 5 + 6 + 3 = 14; 4 + 1 im Sinn + 5 + 6 = 16; 8 + 1 im Sinn + 4 + 5 = 18; 8 + 1 im Sinn + 4 = 13; 8 + 1 im Sinn = 9.

m) Mit 112, 113, 114 u. s. w. bis 119.

Man multiplicirt mit der ersten Ziffer des Multiplicators jede Ziffer des Multiplicandus und addirt bei der 2ten Ziffer eine, bei der 3ten Ziffer zwei Ziffern rechts vom Multiplicandus nebst der Zahl im Sinn. So fährt man bis zur letzten Ziffer fort; dann wird die Summe der 2 letzten Ziffern und der Zahl im Sinn, hierauf die letzte Ziffer nebst Zahl im Sinn hinzugefügt.

68547 × 119 8157093	9 × 7 = 63; 9 × 4 = 36 + 6 im Sinn + 7 = 49; 9 × 5 = 45 + 4 im Sinn + 4 + 7 = 60; 9 × 8 = 72 + 6 im Sinn + 5 + 4 = 87; 9 × 6 = 54 + 8 im Sinn + 8 + 5 = 75; 6 + 8 + 7 im Sinn = 21; 6 + 2 im Sinn = 8.

n) Mit 121, 131, 141, u. s. w. bis 191.

Die erste Ziffer des Multiplicandus wird unter den Strich gesetzt; sodann multiplicirt man mit der 2ten Ziffer des Multiplicators alle Ziffern des Multiplicandus und addirt, außer der Zahl im Sinn, bei der ersten Ziffer eine Ziffer links, bei jeder folgenden aber eine Ziffer links und eine rechts; bei der letzten Ziffer eine rechts. Endlich wird noch die letzte Ziffer mit der Zahl im Sinn hinzugefügt.

84789 × 191 16194699	9; 9 × 9 = 81 + 8 l. = 89; 9 × 8 = 72 + 8 im S. + 7 l. + 9 r. = 96; 9 × 7 = 63 + 9 im S. + 4 l. + 8 r. = 84; 9 × 4 = 36 + 8 im S. + 8 l. + 7 r. = 59; 9 × 8 = 72 + 5 im S. + 4 r. = 81; 8 + 8 im S. = 16.

o) Mit 201, 301, 401 u. s. w. bis 901.

Man setzt die beiden ersten Ziffern des Multiplicandus unter den Strich und verfährt dann wie bei f, nur daß man hier nicht die links dicht daneben, sondern die um eine Stelle weiter stehende Ziffer addirt.

89876 × 401
36040276

6; 7; 4 × 6 = 24 + 8 = 32; 4 × 7 = 28 + 3 im S. + 9 = 40; 4 × 8 = 32 + 4 im S. + 8 = 44; 4 × 9 = 36 + 4 im S. = 40; 4 × 8 = 32 + 4 im S. = 36.

p) Mit 211, 311, 411 u. s. w. bis 911.

Die erste Ziffer des Multiplicandus wird unter den Strich gesetzt; ebenso die Summe der 1sten und 2ten Ziffer; hierauf multiplicirt man mit der letzten Ziffer links des Multiplicators alle Ziffern des Multiplicandus und addirt jedesmal die Zahl im Sinn und 2 Ziffern links vom Multiplicandus hinzu. So fährt man bis zur vorletzten Ziffer fort, zu welcher nur noch eine Ziffer links und dann zur letzten Ziffer nur die Zahl im Sinn addirt wird.

9458 × 511
4833038

8; 8 + 5 = 13; 5 × 8 = 40 + 1 im S. + 4 + 5 = 50; 5 × 5 = 25 + 5 im S. + 4 + 9 = 43; 5 × 4 = 20 + 4 im S. + 9 = 33; 5 × 9 = 45 + 3 im S. = 48.

q) Mit Zahlen, die sich in Factoren zerlegen lassen.

Es sind damit alle diejenigen Zahlen gemeint, welche sich in solche Factoren zerlegen lassen, als Multiplicatoren bis jetzt von a bis p vorgekommen sind, wie: 35 = 7 × 5, 72 = 8 × 9, 88 = 11 × 8, 96 = 12 × 8, 153 = 51 × 3, 568 = 71 × 8, 735 = 105 × 7, 888 = 111 × 8, 928 = 116 × 8, 2488 = 311 × 8 u. s. w.

Bei kleinen Zahlen findet man die Factoren leicht nach dem Ein mal Eins. Bei größeren Zahlen prüft man zuerst, ob die Ziffer links oder rechts am Ende, in die nebenstehenden Ziffern dividirt, ohne Rest aufgeht: 328 : 8 = 41, also ist 328 = 41 × 8; 864 : 8 = 108, also ist 864 = 108 × 8; 987 : 7 = 141; 2466 : 6 = 411 u. s. w. Andere Zahlen, bei denen dies nicht der Fall ist, muß man durch kleinere Zahlen dividiren, um auf die richtigen Factoren zu kommen, wozu die in § 43 angegebenen Kennzeichen gute Dienste leisten. Wer viel zu multipliciren hat, thut wohl, sich eine kleine Tabelle von den Zahlen der letzten Art und ihren Factoren anzulegen. Hat man die Factoren gefunden, so multiplicirt man mit dem einen Factor den Multiplicandus und das daraus entstehende Produkt mit dem andern Factor.

1) 89765 × 56
× 8: 718120
× 7: 5026840

2) 97869 × 88
× 11: 1076559
× 8: 8612472

3) 79889 × 136
× 17: 1358113
× 8: 10864904

4) 87968 × 279
× 31: 2727008
× 9: 24543072

5) 97689 × 637
× 91: 8889699
× 7: 62227893

6) 89788 × 928
× 116: 10415408
× 8: 83323264

7) 98879 × 1359
× 151: 14930729
× 9: 134376561

8) 89798 × 2488
× 311: 27927178
× 8: 223417424

9) 97689 × 7632
× 106: 10355034
× 9: 93195306
× 8: 745562448

Differirt ein drei- oder mehrziffriger Multiplicator mit der nächsten zerlegbaren Zahl nur um 1, so ist es vortheilhaft, die Zerlegung anzuwenden und den Multiplicandus einmal zuzulegen oder abzuziehen. Bei einem zweiziffrigen Multiplicator und wenn die Differenz mehr als 1 beträgt, gewährt das Verfahren jedoch gegen das bei u in diesem Paragraphen keinen Vortheil.

```
   87987 × 249                                      79879 × 863
 ─────────── × 31 ⎫          Multiplicandus      ───────────── × 108 ⎫         Multiplicandus
  2727597         ⎬ × 248    zum 2ten Pro-        8626932            ⎬ × 864   vom 2ten Pro-
 ─────────── × 8  ⎭          dukt addirt.        ───────────── × 8   ⎭         dukt subtrahirt.
 21820776                                        69015456
 21908763                                        68935577
```

r) Mit Zahlen, die sich in Factoren neben einander zerlegen lassen.

Solche Zahlen sind 168 oder 816, 8 ist ein Factor von 16; 756 oder 567, 7 ist ein Factor von 56; 1248 oder 4812, 12 ist ein Factor von 48; 1365 oder 6513, 13 ist ein Factor von 65; 1696 oder 9616 u. s. w.

Man multiplicirt mit dem ersten Factor den Multiplicandus und das daraus entstehende Produkt mit dem zweiten Factor des Mehrfachen; beide Theilprodukte addirt, geben das Hauptprodukt. Dabei ist zu bemerken: steht das Mehrfache rechts von dem ersten Factor, so rückt das zweite Partialprodukt um so viel Ziffern rechts vom ersten Partialprodukt, als das Mehrfache Ziffern hat; steht aber das Mehrfache links vom ersten Factor, so rückt das zweite Theilprodukt um so viel Ziffern links als der erste Factor Ziffern hat.

```
1)  6532 × 168        3)  5436 × 567         5)  7547 × 1248
    ──────── × 8          ──────── × 7            ──────── × 12
    52256                 38052                  90564
   104512  × 2           304416  × 8              362256  × 4
   ───────               ───────                 ───────
   1097376               3082212                 9418656

2)  6532 × 816        4)  5436 × 756         6)  7547 × 4812
    ──────── × 8          ──────── × 7            ──────── × 12
    52256                 38052                    90564
      104512 × 2            304416 × 8           362256   × 4
    ───────               ───────                ────────
    5330112               4109616                36316164
```

Stehen Nullen zwischen den Factoren, so wird in derselben Weise verfahren, nur rückt das zweite Theilprodukt um so viele Stellen mehr rechts oder links, als Nullen vorhanden sind.

```
1)  7569 × 208              3)  7547 × 12048
    ──────── × 2                ──────── × 12
    15138 × 4                   90564 × 4
       60552                       362256
    ───────                     ────────
    1574352                     90926256

2)  6532 × 1608             4)  54346 × 70056
    ──────── × 8                ───────── × 7
    52256 × 2                   380422 × 8
  104512                              3043376
  ────────                      ──────────
  10503456                      3807263376
```

Was bei q über Zahlen, die sich annähernd in Factoren zerlegen lassen, gesagt ist, gilt auch hier.

s) Mit einer Zahl, die nahe an 100, 1000 u. s. w. und deren Mehrfachen 200, 300 u. s. w. ist.

1) Wenn die Zahl nahe an 100, 1000 u. s. w. ist, so multiplicirt man mit der Ergänzungszahl den Multiplicandus und zieht dieses Produkt von dem Multiplicandus, an dem man sich 2 resp. 3 oder 4 Nullen angehängt denkt, ab.

1)	2)	3)
67874 × 97	57684 × 994	87463 × 9985
(00)	(000)	(0000)
203622 (Mult. × 3)	346104 (Mult. × 6)	1311945 (Mult. × 15)
6583778	57337896	873318055
(97 = 100 — 3)	(994 = 1000 — 6)	(9985 = 10000 — 15)
Ergänzungszahl 3.	Ergänzungszahl 6.	Ergänzungszahl 15.

2) Wenn die Zahl nahe einem Mehrfachen von 100, 1000 u. s. w. ist, so multiplicirt man den Multiplicandus erst mit der Ziffer, die das Mehrfache von 100, 1000 u. s. w. angiebt, und denkt sich diesem Produkt die entsprechenden Nullen angehängt; sodann multiplicirt man den Multiplicandus mit der Ergänzungszahl und zieht dieses Produkt von dem vorigen ab.

1)	2)	3)
3485 × 497	5678 × 689	3487 × 2987
× 5	× 7	× 3
17425(00)	39746(00)	10461(000)
10455 (Mult. × 3)	62458 (Mult. × 11)	45331 (Mult. × 13)
1732045	3912142	10415669
(497 = 500 — 3)	(689 = 700 — 11)	(2987 = 3000 — 13)

t) Mit einer Zahl, deren beide letzten Ziffern 25, 50 oder 75 sind.

Mit solchen Zahlen läßt sich sehr leicht multipliciren, weil sie immer aliquote Theile von 100, 1000 oder deren Mehrfachen sind, d. h. sie gehen in diesen Zahlen ohne Rest auf. Man hat demnach nur nöthig, mit den bedeutlichen Ziffern der Mehrfachen den Multiplicandus zu multipliciren und dieses Produkt, an dem man sich 2 oder 3 Nullen angehängt denkt, durch 4 oder 8 zu dividiren.

Soll z. B. 465 mit 325 multiplicirt werden, so multiplicirt man erst 325 im Kopf mit 4, wodurch man ermittelt, daß 325 ein aliquoter Theil von 1300 ist, denn 325 × 4 ist = 1300; hierauf multiplicirt man 465 mit 13, denkt sich 2 Nullen dem Produkt angehängt und dividirt dieses durch 4.

465 × 13
6045(00) : 4
151125

also 465 × 325 = 151125.

Größere Zahlen muß man in der Regel als aliquote Theile von 1000 und dessem Mehrfachen betrachten, also mit 8 statt mit 4 im Kopf multipliciren. Soll nämlich 4657 mit 3875 multiplicirt werden, so ist 3875 × 8 = 31000, also

4657 × 31
144367(000) : 8
18045875

folglich 4657 × 3875 = 18045875.

Geben beim Multipliciren eines aliquoten Theils mit 8 die letzten drei Ziffern nicht 3 Nullen, so muß die Zahl, auch wenn sie groß ist, mit 4 multiplicirt werden. So ist 2275 × 8 = 18200, folglich ist 2275 kein aliquoter

Theil eines Mehrfachen von 1000, sondern von 100, denn 2275 × 4 ist = 9100.

6425 × 2275 ist also 6425 × 91
584675(00) : 4
14616875

1) 78594 × 275	2) 65764 × 1375	3) 56437 × 2825
× 11	× 11	× 113
864534(00) : 4	723404(000) : 8	6377381(00) : 4
21613350	90425500	159434525

Zahlen, die annähernd aliquoten Theilen gleich sind, wie 2387 = 2375 + 12, so zu zerlegen, daß mit dem aliquoten Theil multiplicirt werden kann und dem Produkt hiervon das Produkt aus der Differenzzahl zuaddirt oder von demselben abgezogen wird, ist unvortheilhaft. Dagegen ist es sehr vortheilhaft, mit aliquoten Theilen zu rechnen, wenn sie mit andern Zahlen verbunden sind, wie z. B. 2253, wo 225, — und 83754, wo 375 der aliquote Theil ist, nämlich:

1) 8795 × 2253
× 9 } × 225
79155(00) : 4
1978875
26385 = 3 × Multiplicandus
19815135

2) 35468 × 83754
× 3 } × 375
106404(000) : 8
13300500
141872 = 4 × Multipl.
283744 = 2 × vor. Produkt.
2970586872

u) Mit jeder anderen Zahl.

Wenn der Multiplicator eine hohe 2-ziffrige oder eine 3-, 4-, und mehrziffrige Zahl ist, mit der sich nicht in der bisherigen Art multipliciren läßt, so multiplicirt man mit jeder einzelnen Ziffer desselben (gleichgültig, mit welcher zuerst) alle Ziffern des Multiplicandus der Reihe nach von rechts oder links anfangend, und giebt den Theilprodukten in folgender Art ihre richtige Stellung: Hat man mit einer Ziffer des Multiplicators, gleichviel mit welcher, den Multiplicandus multiplicirt, so rückt das folgende Theilprodukt (Partialprodukt) nach dem dekadischen Gesetz um so viele Stellen links oder rechts, als die Ziffer, mit der man eben multiplicirt, von der ersten Ziffer links oder rechts entfernt ist; d. h. soll man mit 4356 multipliciren und man fängt aus irgend welchem Grunde mit 3 zu multipliciren an, so rückt das folgende Produkt von 6 um 2 Stellen rechts heraus, dann das folgende von 5 um eine Stelle links von dem vorigen und das von 4 um 2 Stellen links von dem vorigen oder um eine Stelle links von dem Theilprodukt mit 3. Die Theilprodukte werden hierauf zusammen addirt. Aber auch bei diesem Verfahren muß man immer noch das Verfahren von r in diesem Paragraphen im Auge behalten. Kommt eine Eins im Multiplicator vor, so wird mit dieser zuerst multiplicirt, d. h. der Multiplicandus wird als das Produkt von 1 benutzt.

1) 4957 × 879
44613 = 9 × Multiplicds.
34699 = 7 (70) × dito.
39656 = 8 (800) × dito.
4357203

oder 4957 × 879
39656 = 8 (800) × Multipl.
34699 = 7 (70) × dito.
44613 = 9 × dito.
4357203

2) 79458 × 10428
317832 = 4 (400) × Multiplicandus.
2224824 = 7 × voriges Produkt = 28 × Multiplicandus.
828588024

3) 76584 × 13366
2527272 = 33 (3300) × Multiplicandus.
5054544 = 2 × voriges Produkt = 66 × Multiplicandus.
1023621744

4) 57463 × 41182
2355983 = 41 (4100) × Multiplicandus.
4711966 = 2 × voriges Produkt = 82 × Multiplicandus.
2366441266

5) 67856 × 40856
271424 = 4 × Multiplicandus.
542848 = 2 × voriges Produkt = 8 × Multiplicandus.
3799936 = 7 × do. do. = 56 × do.
2772324736

6) 749021 × 86967
608769 = 7 × Multiplicandus.
4261383 = 7 × voriges Prod. = 49 × Multipl.
1826307 = 3 × erstes do. = 21 × do.
65140109307

§ 19.

Wenn der Multiplicator hinten Nullen hat, so wird nach § 18, b und e, nur mit den bedeutlichen Ziffern desselben multiplicirt und die Nullen werden dem Produkt angehängt. Ebenso wird verfahren, wenn der *Multiplicandus* hinten Nullen hat. Haben beide, der Multiplicator und der Multiplicandus, hinten Nullen, so werden auch nur die bedeutlichen Ziffern mit einander multiplicirt und dem Produkt so viele Nullen angehängt, als beide Factoren zusammen Nullen haben.

1) 987000 × 97
6909
8883
95739000

2) 85700 × 79800
6856
7713
5999
6838860000

§ 20.

Die Probe der Multiplication besteht darin, daß man mit dem einen Factor in das Produkt dividirt, wodurch der andere Factor als Quotient erscheinen muß. Diese Probe ist aber nicht zu empfehlen, sondern es ist am besten, jedes Theilprodukt zweimal zu rechnen, oder, wenn der Multiplicator aus Ziffern besteht, welche zwei verschiedene Verfahren gestatten, diese anzuwenden.

4) Die Division oder das Dividiren.

§. 21.

Dividiren heißt eine Zahl finden, welche anzeigt, wie oft eine gegebene Zahl in einer anderen enthalten ist. Diejenige Zahl, in welche dividirt wird, heißt der Dividendus; diejenige Zahl, mit der man dividirt, der Divisor. Das Ergebniß der Division wird der Quotient genannt. Das Zeichen für die Division ist ein Kolon (:) und heißt „dividirt durch", also 8 : 2 = 4 wird gelesen: 8 dividirt durch 2 gleich 4.

§ 22.

Ist der Dividendus und der Divisor eine einziffrige Zahl, so findet man den Quotient nach dem Ein mal Eins.

9 : 3 = 3; 8 : 4 = 2; 6 : 2 = 3.

Geht der Divisor nicht in dem Dividendus auf, so heißt die übrigbleibende Zahl der Rest.

9 : 4 = 2, Rest 1; 8 : 3 = 2, Rest 2; 7 : 4 = 1, Rest 3.

Dabei ist zu bemerken, daß nie ein Rest größer als der Divisor sein darf; tritt dieser Fall ein, so hat man den Quotient zu klein genommen.

Ist der Dividendus eine mehrziffrige Zahl, so finden die in dem folgenden Paragraph angegebenen Verfahrungsweisen Anwendung.

§ 23.

Ein mehrziffriger Dividendus soll dividirt werden:

a) Durch 2, 3, 4 u. s. w. bis 9.

Man dividirt im Kopf in die erste Ziffer oder, wenn diese zu klein ist, in die 2 ersten Ziffern links des Dividendus und setzt, indem man den Rest im Sinn behält, den Quotient unter den Strich; hierauf dividirt man in die mit dem Rest verbundene nächste Ziffer und fährt so fort bis zur letzten Ziffer.

3546875 : 8
443359 Rest 3

35 : 8 = 4, Rest 3; 34 : 8 = 4, Rest 2; 26 : 8 = 3, Rest 2; 28 : 8 = 3, Rest 4; 47 : 8 = 5, Rest 7; 75 : 8 = 9, Rest 3.

Wenn im Laufe der Division kein Rest bleibt und die folgende Ziffer des Dividendus kleiner ist als der Divisor, so wird eine Null in den Quotient gesetzt und die weiter folgende Ziffer hinzugenommen.

5436765 : 9
604085

54 : 9 = 6, kein Rest; 3 : 9 = 0; 36 : 9 = 4, kein Rest; 7 : 9 = 0; 76 : 9 = 8, Rest 4; 45 : 9 = 5.

Dasselbe ist der Fall, wenn eine oder mehrere Nullen im Dividendus vorkommen.

4560084 : 6
760014

45 : 6 = 7, Rest 3; 36 : 6 = 6, kein Rest; 0 : 6 = 0; 0 : 6 = 0; 8 : 6 = 1, Rest 2; 24 : 6 = 4.

b) Durch 10, 100, 1000 u. s. w.

Man schneidet durch ein Komma so viele Ziffern rechts im Dividendus ab, als der Divisor Nullen hat; die dann links vom Komma stehenden Ziffern geben den Quotient, die rechts stehenden den Rest.

7684 : 10 = 768, 4; Quotient 768, Rest 4.
54968 : 100 = 549, 68; Quotient 549, Rest 68.

c) Durch 11 und 12.

Da man die Mehrfachen (Vielfachen) dieser Zahlen, wie sie in der Tafel § 16 angegeben sind, im Kopfe haben muß, so verfährt man mit diesen Zahlen ebenso wie bei a.

1) 896544 : 11;
81504

2) 697860 : 12
58155

69 : 12 = 5, Rest 9, 97 : 12 = 8, Rest 1, 18 : 12 = 1, Rest 6; 66 : 12 = 5, Rest 6, 60 : 12 = 5.

Wenn im Laufe der Division der gebliebene Rest mit der zugenommenen folgenden Ziffer kleiner als der Divisor ist, so wird eine Null in den Quotienten gesetzt und dann die weiter folgende Ziffer des Dividendus hinzugenommen.

649140 : 12
54095

64 : 12 = 5, Rest 4; 49 : 12 = 4, Rest 1; 11 : 12 = 0 114 : 12 = 9, Rest 6; 60 : 12 = 5.

d) Durch 13 bis 19, 21 bis 24, 31, 41, 51 u. s. w. bis 91.

Das Mehrfache der vorstehenden Zahlen kann ganz gut im Kopfe gebildet und für den Augenblick behalten werden. Man verfährt daher mit diesen Zahlen wie bei c, schreibt aber statt des Quotienten die Reste unter den Dividendus und setzt den Quotient rechts hinter das Gleichheitszeichen.

697856 : 18 = 38769
153274
1111 Rest 14.

69 : 18 = 3, Rest 15; 157 : 18 = 8, Rest 13 (die 1 wird tiefer gesetzt): 138 : 18 = 7, Rest 12 (1 tiefer); 125 : 18 = 6, Rest 17 (1 tiefer); 176 : 18 = 9, Rest 14 (1 tiefer)

885497 : 24 = 36895
161237
2211 Rest 17.

88 : 24 = 3, Rest 16; 165 : 24 = 6, Rest 21 (2 tiefer); 214 : 24 = 8, Rest 22 (2 tiefer); 229 : 24 = 9, Rest 13 (1 tiefer); 137 : 24 = 5, Rest 17 (1 tiefer).

Wenn man die Reste und die kommende Zahl des Dividendus schräg liest, so hat man die Zahl vor Augen, in die man dividiren muß.

e) Durch eine Zahl, die hinten eine oder mehrere Nullen hat.

Man verfährt zuerst wie bei b und dividirt dann in den übrig bleibenden Dividendus nur mit den bedeutlichen Ziffern des Divisors. Der durch das Komma abgeschnittene Rest wird am Schluß rechts neben den Divisionsrest gesetzt, wenn ein solcher geblieben ist.

1) 7854864 : 400 = 78548,64 : 4
19637 Rest 64.

2) 6987467 : 800 = 69874,67 : 8
8734 Rest 267

3) 9768578 : 19000 = 9768,578 : 19 = 514
272 Rest 2578

f) Durch eine Zahl, die sich in Factoren zerlegen läßt.

Man dividirt durch den einen Factor den Dividendus, wie es bei a gezeigt ist, den entstehenden Quotient durch den anderen Factor und den hierdurch gefundenen Quotient durch den dritten Factor, wenn ein solcher vorhanden ist u. s. w.

1)	2)	3)
336450 : 25;	986760 : 72;	570304 : 224
: 5	: 9	: 7
67290	109640	81472
: 5	: 8	: 8
13458	13705	10184
		: 4
		2546

Wenn bei der Division ein Rest bleibt, so findet man aus diesem den richtigen Rest, wenn man ihn mit dem vorhergehenden Divisor (oder wenn mehrere vorhergehende Divisoren sind, mit jedem) multiplicirt. Ein Rest, der keinen vorhergehenden Divisor hat, ist entweder der richtige Rest oder er wird, wenn noch andere Reste sind, zu diesen addirt.

1)	2)	3)
361655 : 56;	619173 : 72;	437645 : 96
: 8	: 9	: 12
45206 Rest 7	68797	36470 Rest 5
: 7	: 8	: 8
6458	8599 Rest 5	4558 Rest 6
richtiger Rest 7.	richtiger Rest	richtiger Rest
	5 × 9 = 45.	12 × 6 = 72 + 5 = 77.

g) Durch jede hohe zweiziffrige oder drei- und mehrziffrige Zahl, die sich nicht in Factoren zerlegen läßt.

Wenn ein großer Divisor nicht in Factoren zerlegt werden kann, so fällt es schwer, die Mehrfachen desselben und die Reste im Kopfe zu behalten; sie müssen deshalb hingeschrieben werden und die Division erhält dann folgende Gestalt:

```
76858 : 83 = 926;          2766951 : 5468 = 506
747                        27340
 215                        32951
 166                        32808
  498                         143 Rest.

350400 : 8009 = 43;          200508 : 8700
32036                      = 2005,08 : 87 = 23
 30040                       174
 24027                        265  } wie bei e dieses Paragraphen
  6013 Rest.                  261
                               408 Rest.
```

Wie oft ein großer Divisor zu nehmen ist, kann man ziemlich genau aus seiner zweiten Ziffer schließen. Ist diese klein oder Null, so kann man ihn gewöhnlich so oft nehmen, als seine erste Ziffer in der ersten oder in den 2 ersten Ziffern des Dividendus enthalten ist; ist die zweite Ziffer aber eine hohe, wie 8, 9 u. s. w., so muß er weniger mal genommen werden. Um dabei das Exempel nicht zu stören, versucht man abseits von demselben, ob die Zahl, die man in den Quotient zu nehmen denkt, nicht zu groß oder zu klein ausfällt. Zu klein ist dieselbe, wenn sich der bleibende Rest größer als der Divisor herausstellt.

§ 24.

Als Probe der Division multiplicirt man den Quotient mit dem Divisor und addirt dazu den Rest, wenn ein solcher vorhanden ist; das Ergebniß muß der Dividendus sein.

II. Das Rechnen mit benannten Zahlen.

§ 25.

Was eine benannte Zahl ist, ist bereits in § 1 gesagt. Wird eine Anzahl Dinge gleicher Art nur durch **eine** Benennung ausgedrückt, als: 4 Hekto, 248 Thaler, 324 Bogen, so nennt man eine solche benannte Zahl eine **einfach** benannte Zahl; wird die Anzahl aber durch mehrere Benennungen gleicher Art ausgedrückt, als: 4 Hekto 7 Liter oder 248 Thaler 27 Silbergroschen 9 Pfennige u. s. w., so heißt sie eine mehrfach benannte Zahl.

Man unterscheidet bei den Benennungen gleicher Art die **höchste**, die **nächst niedrige** und die **niedrigste** Benennung. Thaler ist die höchste, Silbergroschen die nächst niedrige und Pfennige die niedrigste Benennung.

Beim Rechnen mit benannten Zahlen kommt es sehr häufig vor, daß höhere Benennungen in niedere, und umgekehrt niedere Benennungen in höhere verwandelt werden müssen. Man nennt das erste Verfahren die Resolution oder das Resolviren und das andere die Reduction oder das Reduciren. Beide Verfahrungsarten muß man kennen, bevor man mit benannten Zahlen rechnen kann.

A. Die Resolution oder das Resolviren.

§ 26.

Will man eine einfach benannte Zahl höherer oder der höchsten Benennung zu einer niedrigeren oder der niedrigsten Benennung verwandeln, dieselbe also **resolviren**, so sucht man in einer Münz-, Maß- und Gewichtstabelle, wie sie im Auszuge diesem Werke angehängt ist, diejenige Zahl, **Resolutionszahl**, welche anzeigt, wie viele Einheiten der niederen Benennung zu einer Einheit der nächst höheren Benennung gehören. Mit dieser Resolutionszahl multiplicirt man dann die Zahl der höheren Benennung. Z. B.:

1) 78 Neuscheffel sind wie viele Liter?

Man findet in der Tabelle I, daß 1 Neuscheffel 50 Liter hat, daß also die Resolutionszahl 50 ist.

$$78 \times 50 = 3900 \text{ Liter.}$$

2) 26 Pfund sind wie viele Neuloth?

Nach der Tabelle I ist die Resolutionszahl 50, also:

$$26 \times 50 = 1300 \text{ Neuloth.}$$

3) 74 Thaler sind wie viele Silbergroschen?

Die Resolutionszahl ist 30, also:

$$74 \times 30 = 2220 \text{ Silbergroschen.}$$

Sollen 74 Thlr. zu Pfennigen resolvirt werden, so kann man die 2220 Silbergroschen mit 12 oder die 74 Thlr. mit 360 multipliciren, weil 1 Sgr. = 12 Pfennige und 1 Thlr. = 360 Pfennige ist.

$$2220 \times 12 = 26640 \text{ Pf.}; \; 74 \times 360 = 26640 \text{ Pf.}$$

Ebenso verfährt man bei allen anderen **einfach** benannten Zahlen.

Ist die zu resolvirende Zahl eine **mehrfach** benannte Zahl, so verfährt man ähnlich wie vorhin, nur muß man die Zahlen der kleineren Benennungen an entsprechender Stelle hinzu addiren. Z. B.:

4 Pfund 28 Neuloth 9 Gramm sind wie viele Gramm?

Die Resolutionszahlen sind 50 und 10.

$$\begin{array}{l} 4 \times 50 = 200 \text{ Neuloth} \\ \quad \text{dazu } \underline{28} \text{ dito} \\ \quad\quad 228 \times 10 = 2280 \text{ Gramm} \\ \quad\quad\quad \text{dazu } \underline{9} \text{ dito} \\ \quad\quad\quad\quad 2289 \text{ Gramm} \end{array}$$

74 Thlr. 27 Sgr. 9 Pf. sind wie viele Pfennige?

$$\begin{array}{rl} & \underline{74} \text{ Thlr.} \times 30 \\ \text{incl. } 27 \text{ Sgr.} = & \underline{2247} \text{ Sgr.} \times 12 \\ \text{incl. } 9 \text{ Pf.} = & 26973 \text{ Pf.} \end{array}$$

Aehnlich wird bei allen anderen mehrfach benannten Zahlen verfahren.

B. Die Reduction oder das Reduciren.

§ 27.

Soll eine benannte Zahl niederer Benennung in eine benannte Zahl der nächst höheren Benennung verwandelt werden, welches nach § 25 das Reduciren genannt wird, so sucht man wie in § 26 die Resolutionszahl, welche hier Reductionszahl genannt wird, und dividirt mit dieser in die gegebene Zahl; der entstehende Quotient ist die Zahl der höheren Benennung. Ein etwa bleibender Rest giebt die Zahl der niederen Benennung an, welche sich nicht zur höheren Benennung reduciren läßt, weil sie kleiner als eine Einheit dieser letzteren ist.

1) Es sollen 341 Pfennige zu Silbergroschen reducirt werden.

Die Reductionszahl ist 12. So oft nun 12 in 341 enthalten ist, so viele Silbergroschen sind in dieser Anzahl Pfennige enthalten.

$$\left.\begin{array}{l} 341 : 12 \\ \overline{28} \text{ Rest } 5 \end{array}\right\} 341 \text{ Pf.} = 28 \text{ Sgr. } 5 \text{ Pf.}$$

2) 374 Liter sind wie viele Neuscheffel?

Die Reductionszahl ist 50.

$$\begin{array}{l} 374 : 50 \\ \overline{7} \text{ Rest } 24 = 7 \text{ Neuscheffel } 24 \text{ Liter (§ 23. e).} \end{array}$$

Wenn eine große Zahl der niedrigsten Benennung reducirt werden soll, so sucht man in der Tabelle erst die Reductionszahl zur nächst höheren Benennung und dividirt mit dieser in die gegebene Zahl; hierauf sucht man die Reductionszahl für die nun folgende höhere Benennung und dividirt damit in den Quotienten. So fährt man bis zur höchsten Benennung fort.

1) 7809 Bogen Druckpapier sind wie viele Ballen, Rieß u. s. w.?

Reductionszahlen sind 25, 20, 10, d. h. 25 Bogen sind 1 Buch; 20 Buch sind 1 Rieß; 10 Rieß sind 1 Ballen.

7809 Bogen : 25
: 5
1561 Rest 4 Bogen
: 5
312 Buch Rest 1 Bogen
$1 \times 5 + 4 = 9$ Bogen (§ 23. f).

312 Buch : 20
15 Rieß 12 Buch
15 Rieß sind 1 Ballen 5 Rieß.

Also Ergebniß: 1 Ballen 5 Rieß 12 Buch 9 Bogen.

2) 6465 Gramm sind wie viele Neuloth und Pfund?

6465 : 10
646 Neuloth 5 Gramm

646 Neuloth : 50
12 Pfund 46 Neuloth

Folglich sind 6465 Gramm = 12 Pfund 46 Neuloth 5 Gramm.

3) 2548 Pfennige sind wie viele Thaler, Silbergroschen und Pfennige?

2548 : 12
212 Sgr. 4 Pf.
: 30
7 Thaler 2 Sgr.

2548 Pfennige = 7 Thlr. 2 Sgr. 4 Pf.

Aehnlich verfährt man beim Reduciren aller andern einfach und mehrfach benannten Zahlen.

C. Die vier Species in benannten Zahlen.

1) Die Addition in benannten Zahlen.

§ 28.

Es können nur Dinge einerlei Art addirt werden und bei diesen wiederum auch nur die ganz gleichen quantitativen Benennungen, d. h. Hekto und Hekto, Liter und Liter, Pfund und Pfund u. s. w.

Sollen daher einfach benannte Zahlen addirt werden, so schreibt man sie unter einander, addirt sie nach § 4 und giebt der Summe die Benennung der Addenden.

1) 24 Hekto + 113 Hk. + 39 Hk. + 87 Hk. + 212 Hk.

24 Hk.
113 „
39 „
87 „
212 „
475 Hekto.

2) 136 Ctr. + 74 Ctr. + 212 Ctr. + 196 Ctr. + 80 Ctr.

136 Ctr.
74 „
212 „
196 „
80 „
698 Ctr.

§ 29.

Wenn mehrfach benannte Zahlen addirt werden sollen, so werden sie so unter einander gesetzt, daß die gleichen Benennungen unter einander zu stehen kommen. Hierauf addirt man zuerst die Posten der kleinsten Benennung und verwandelt sie zu der nächst höheren Benennung; das Ergebniß wird dann zu

der nächst höheren Benennung addirt und die übrig gebliebene Zahl der kleineren Benennung unter die Reihe dieser Benennung gesetzt. In dieser Weise fährt man bis zu der höchsten Benennung fort.

1) 85 Pfd. 17 Neuloth + 63 Pfd. 12 Nlth. + 38 Pfd. 18 Nlth. + 19 Pfd. 24 Nlth. + 95 Pfd. 27 Nlth.

	85 Pfd.	17 Neuloth
	63 „	12 „
	38 „	18 „
	19 „	24 „
	95 „	27 „
3 Ctr.	1 Pfd.	48 Neuloth.

2) 78 Thlr. 24 Sgr. 9 Pf. + 85 Thlr. 26 Sgr. 11 Pf. + 58 Thlr. 28 Sgr. 10 Pf. + 47 Thlr. 19 Sgr. 9 Pf. + 67 Thlr. 28 Sgr. 11 Pf.

78 Thlr.	24 Sgr.	9 Pf.
85 „	26 „	11 „
58 „	28 „	10 „
47 „	19 „	9 „
67 „	28 „	11 „
339 Thlr.	9 Sgr.	2 Pf.

3) 7 Groß 8 Dtzd. 9 Stck. + 11 Groß 10 Stck. + 9 Groß 6 Dtzd. 8 Stck. + 4 Groß 8 Dtzd. + 12 Groß + 9 Dtzd. 4 Stck.

7 Groß	8 Dtzd.	9 Stck.
11 „	— „	10 „
9 „	6 „	8 „
4 „	8 „	— „
12 „	— „	— „
— „	9 „	4 „
45 Groß	9 Dtzd.	7 Stck.

4) 8 Schock 3 Mandel 11 Stück + 7 Schock 2 Mandel 9 Stück + 24 Schock + 10 Schock 9 Stück + 4 Schock 1 Mandel + 2 Mandel 13 Stück.

8 Schock	3 Mandel	11 Stück
7 „	2 „	9 „
24 „	— „	— „
10 „	— „	9 „
4 „	1 „	— „
— „	2 „	13 „
55 Schock	2 Mandel	12 Stück

5) Ein Buchhändler hat 4 verschiedene Papierlager: im 1sten Lager befinden sich 16 Ballen 6 Rieß 4 Buch Druckpapier und 1 Ballen 7 Rieß 8 Buch Schreibpapier; im 2ten Lager 18 Ballen 9 Rieß 16 Buch Druckpapier und 9 Rieß Schreibpapier; im 3ten Lager 21 Ballen 3 Rieß 12 Buch Druckpapier und 2 Ballen 5 Rieß 18 Buch Schreibpapier; im 4ten Lager 14 Ballen 18 Buch Druckpapier und 3 Ballen 10 Buch Schreibpapier. Wieviel Papier von jeder Sorte hatte er?

Druckpapier.

16 Ballen	6 Rieß	4 Buch
18 „	9 „	16 „
21 „	3 „	12 „
14 „	— „	18 „
71 Ballen	— Rieß	10 Buch

Schreibpapier.

1 Ballen	7 Rieß	8 Buch
— „	9 „	— „
2 „	5 „	18 „
3 „	— „	10 „
8 Ballen	2 Rieß	16 Buch.

2) Die Subtraction mit benannten Zahlen.

§ 30.

Wie beim Addiren, so können auch beim Subtrahiren nur Dinge einerlei Art und von diesen wiederum nur die ganz gleichen Benennungen der Menge (quantitative Benennungen) von einander subtrahirt werden. Man stellt deshalb, wenn man mehrfach benannte Zahlen zu subtrahiren hat, die gleichen

Benennungen unter einander, fängt bei der kleinsten Benennung zu subtrahiren an, geht darauf zu der nächst höheren Benennung und fährt so fort bis zur höchsten Benennung.

12 Ctr. 68 Pfd. 21 Neuloth 8 Gramm — 9 Ctr. 32 Pfd. 15 Neuloth 5 Gramm.

	= 12 Ctr.	68 Pfd.	21 Nlth.	8 Grm.
	9 „	32 „	15 „	5 „
Differenz:	3 Ctr.	36 Pfd.	6 Nlth.	3 Grm.

§ 31.

Wenn im Minuendus eine Zahl kleiner ist, als die unter ihr stehende Zahl des Subtrahendus, so borgt man von der nächst höheren Benennung des Minuendus eine Einheit und bemerkt dies durch einen Punkt. Die geborgte Einheit enthält eine bestimmte Menge der kleineren Benennung; von dieser zieht man die Zahl des Subtrahendus ab und addirt zu der Differenz die Zahl des Minuendus.

1) 45 Thlr. 18 Sgr. 5 Pf. — 23 Thlr. 27 Sgr. 9 Pf.

	30	12
45. Thlr.	18. Sgr.	5 Pf.
23 „	27 „	9 „
21 Thlr.	20 Sgr.	8 Pf.

9 Pf. von 5 Pf. geht nicht; 1 Sgr. geborgt, giebt 12 Pf.; 12 − 9 = 3 Pf., dazu 5 Pf. = 8 Pf.; 27 Sgr. von 17 Sgr. geht nicht; 1 Thlr. geborgt, giebt 30 Sgr.; 30 − 27 = 3 Sgr., dazu 17 Sgr. = 20; 44 Thlr. — 23 Thlr. = 21 Thlr.

2)

	16	12
78 Mark	8 Schl.	7 Pf.
29 „	12 „	9 „
48 Mark	11 Schl.	10 Pf.

3)

	60	4
83 Gld.	27 Krz.	1 Pf.
56 „	45 „	3 „
36 Gld.	41 Krz.	2 Pf.

§ 32.

Wenn der Subtrahendus Benennungen enthält, die im Minuendus nicht vorkommen, so wird ähnlich wie im § 31 verfahren, d. h. man borgt von der größten Benennung eine Einheit und setzt die Anzahl Einheiten der kleineren Benennung, die sie enthält, in die Stelle der fehlenden kleineren Benennung; sodann borgt man von diesen eine Einheit und setzt wiederum die Anzahl Einheiten, die sie von der kleineren Benennung enthält, in die Stelle der folgenden fehlenden Benennung.

1) 56 Thlr. — 25 Thlr. 17 Sgr. 8 Pf.

	30	12
56 Thlr.	— Sgr.	— Pf.
25 „	17 „	8 „
30 Thlr.	12 Sgr.	4 Pf.

2) 87 Ctr. — 32 Ctr. 18 Pfd. 15 Neuloth

	100	50
87 Ctr.	— Pfd.	— Nlth.
32 „	18 „	15 „
54 Ctr.	81 Pfd.	35 Nlth.

Hat der Minuendus Benennungen, die im Subtrahendus nicht vorkommen, so werden sie ohne Weiteres in die Differenz gesetzt. (§ 13.)

1) 36 Ballen 7 Rieß 15 Buch — 23 Ballen.

36 Ballen	7 Rieß	15 Buch
23 „	— „	— „
13 Ballen	7 Rieß	15 Buch.

2) 28 Schock 3 Mandel 8 Stück — 12 Schock 13 Stück.

28 Schock	3. Mandel	8 Stück
12 „	— „	13 „
16 Schock	2 Mandel	10 Stück.

Ein Schiffer hat geladen: 36 Ctr. Zucker, 46 Ctr. Kaffee und 25 Ctr. 97 Pfd. Reis; er ladet davon aus: 14 Ctr. 67 Pfd. Zucker, 22 Ctr. Kaffee und 13 Ctr. Reis. Wieviel Ladung bleibt ihm noch?

Zucker	Kaffee	Reis
36 Ctr. — Pfd.	46 Ctr.	25 Ctr. 97 Pfd.
14 „ 67 „	22 „	13 „ — „
21 Ctr. 33 Pfd.	24 Ctr.	12 Ctr. 97 Pfd.

3) Die Multiplication mit benannten Zahlen.

§ 33.

Es können benannte Zahlen nur mit unbenannten Zahlen multiplicirt werden und das Ergebniß ist alsdann eine benannte Zahl. 4 Thlr. × 3 = 12 Thlr.; 8 Hekto × 6 = 48 Hekto. Benannte Zahlen mit benannten Zahlen können nicht multiplicirt werden, denn 8 Thlr. × 3 Hekto kann weder 24 Thlr. noch 24 Hekto geben, und 3 Thlr. × 4 Ctr. giebt nicht 12 Thlr. und auch nicht 12 Ctr.; ebenso wenig ist 5 Thlr. × 4 Thlr. = 20 Thlr., denn 5 Thlr. × 4 ist = 20 Thlr. Wenn dennoch bei der Regeldetri und bei anderen Rechnungsarten das Multipliciren benannter Zahlen mit benannten Zahlen scheinbar vorkommt, so geschieht dies nur beim Ansatz; bei der Rechenoperation dagegen fällt die mit der einen benannten Zahl verbundene Benennung fort und es wird dann also auch da nur eine benannte Zahl mit einer unbenannten Zahl multiplicirt.

§ 34.

Um eine einfach benannte Zahl mit einer unbenannten Zahl zu multipliciren, wendet man die in § 18 angegebenen Verfahrungsweisen an, indem man wie bei unbenannten Zahlen multiplicirt und dem Produkt die Benennung der benannten Zahl giebt.

1) 374 Thlr. × 13;
4862 Thlr.
(§ 18 d.)

2) 354 Ctr. × 72;
× 8
2832 × 9
25488 Ctr.
(§ 18 q.)

3) 128 Bll. × 155
× 5
640 × 3
1920
19840 Bll.
(§ 18 r.)

4) 254 Guld. × 297;
× 3 (× 300)
762(00)
762 (3 × Mult.)
75438 Guld.
(§ 18 s.)

5) 334 Mark × 1125;
× 9
3006(000) : 8
375750 Mark.
(§ 18 t.)

6) 761 Frcs. × 465
2790
3255
353865 Frcs.
(§ 13 u.)

§ 35.

Beim Multipliciren einer mehrfach benannten Zahl mit einer unbenannten Zahl sind folgende Verfahrungsweisen die zweckmäßigsten:

a) Mit Zahlen von 2 bis 9.

Man fängt bei der kleinsten Benennung des Multiplicandus zu multipliciren an, verwandelt das erhaltene Produkt, wenn es angeht, im Kopf oder ab-

seits vom Exempel zu Einheiten der nächst größeren Benennung, behält diese im Sinn und schreibt den gebliebenen Rest unter die Stelle der kleineren Benennung; hierauf multiplicirt man die Zahl der nächst größeren Benennung, addirt zum Produkt die vorhin aus der kleinen Benennung gefundene Zahl im Sinn, sieht nun wieder zu, wieviel Einheiten der nächst größeren Benennung hierin enthalten sind, und fährt so bis zur größten Benennung fort.

45 Thlr. 23 Sgr. 8 Pf. × 8 366 Thlr. 9 Sgr. 4 Pf.	8 × 8 Pf. = 64 Pf. = 5 Sgr. 4 Pf.; 4 Pf. hingeschrieben, 5 Sgr. im Sinn; 8 × 23 Sgr. = 184 Sgr., dazu 5 Sgr. im Sinn = 189 Sgr. = 6 Thlr. 9 Sgr.; 9 Sgr. hingeschrieben, 6 Thlr. im Sinn; 8 × 45 Thlr. = 360 Thlr., dazu 6 Thlr. im Sinn = 366 Thlr.

b) Mit Zahlen, die sich in Factoren zerlegen lassen.

Man verfährt in der Hauptsache wie bei q § 18 und führt die Multiplication mit jedem Factor wie bei a dieses Paragraphen aus.

1) 87 Ballen 6 Rieß 7 Buch × 72;
× 8
701 „ — „ 16 „ × 9
6309 Ballen 7 Rieß 4 Buch.

2) 54 Groß 7 Dtzd. 5 Stück × 288
× 8
436 „ 11 „ 4 „ × 9
3932 „ 6 „ — „ × 4
15730 Groß — Dtzd. — Stück.

c) Mit Zahlen, die sich in Factoren neben einander zerlegen lassen.

In der Hauptsache wird wie bei r § 18 und mit jedem Factor wie bei a dieses Paragraphen verfahren.

1) 62 Guld. 25 Kr. 3 Pf. × 824 (8 in 24 = 3 mal)
× 8
499 „ 26 „ — „ × 3
1497 „ 78 (2 Stellen rechts)
51397 „ 2678
51441 Guld. 38 Kr.

2) 65 Mark 13 Schilling 7 Pf. × 819 (9 in 81 = 9 mal)
× 9
592 „ 10 „ 3 „ × 9
5328 „ 90 „ 27 „ (1 Stelle links)
53872 „ 910 „ 273 „
53930 Mark 4 Schilling 9 Pf.

d) Mit Zahlen, die nahe an 100, 1000 u. s. w. oder deren Mehrfachen sind.

Man verfährt wie bei s § 18 und reducirt zuletzt die kleineren Benennungen zu höheren und der höchsten Benennung wie bei c dieses Paragraphen.

1)	36 Pud	18 Pfund	27 Solotnik	× 95	1 Pud = 40 Pfund,
	180 „	90 „	135 „	× 5	1 Pfd. = 96 Solotnik.
	3420 „	1710 „	2565 „		
	3463 Pd.	14 Pfd.	61 Solotn.		

2)	8 Center	7 Skalpund	6 Lod	× 997	1 Center = 100 Skalpund,
	024 „	021 „	018 „	× 3	1 Skalpund = 32 Lod.
	7976 „	6779 „	5982 „		
	8047 Cntr.	65 Sklpd.	30 Lod.		

e) Mit Zahlen, deren beide letzte Ziffern 25, 50 oder 75 sind oder wo diese mit anderen Zahlen verbunden vorkommen.

Das Verfahren ist in der Hauptsache wie bei t § 18; zuletzt Reduciren der Benennungen wie bei c und d dieses Paragraphen.

1)	354 Thlr.	23 Sgr.	7 Pf.	× 225
				× 9
	3193(00)	2(00)	3(00)	: 4
	79825	50	75	
	79826 Thlr.	26 Sgr.	3 Pf.	

2)	371 Mark	11 Schl.	9 Pf.	× 253
	00	00	00	: 4 } (× 25)
	9275	275	225	
	1113	33	27	(3 × Multiplicandus).
	93863	2783	2277	
	94048 Mrk.	12 Schl.	9 Pf.	

f) Mit jeder anderen Zahl.

1) Man multiplicirt jeden einzelnen Theil des Multiplicandus mit dem ganzen Multiplicator und verfährt im Uebrigen wie bei a dieses Paragraphen.

86 Guld. 41 Kr. 3 Pf. × 347

30083 Guld. 27 Kr. 1 Pf.

347 × 3 Pf.	347 × 41 Kr.	347 × 86 Guld.
1041 Pf. : 4	14227	2082
260 Kr. 1 Pf.	260	2776
	14487 Kr. : 60	241
	241 Guld. 27 Kr.	30083 Guld.

2) Man multiplicirt mit jeder Ziffer des Multiplicators den ganzen Multiplicandus, giebt dabei jedem Theile der Partialprodukte seine richtige Stellung nach § 18 u, addirt die letzteren zusammen und reducirt die kleineren Benennungen zu höheren und der höchsten Benennung.

86 Guld.	41 Kr.	3 Pf.	× 347	
602	287	21	= 7 ×	Multiplicandus
344	164	12	= 4 ×	dito.
258	123	9	= 3 ×	dito.
29842	14227	1041		
30083 Guld.	27 Kr.	1 Pf.		

3) Man verwandelt den Multiplicator in eine benannte Zahl, die jedesmal gleichlautend ist mit derjenigen Zahl des Multiplicandus, welche eben multiplicirt werden soll und dadurch nun als eine unbenannte Zahl betrachtet wird. Nachdem so der Multiplicator mit jedem Theil des Multiplicandus multiplicirt worden ist, werden die Partialprodukte addirt und die Summe wird wie bei c und d dieses Paragraphen reducirt.

	86 Guld.	41 Kr.	3 Pf. × 347	
7 × 86 Guld. =	602			
4 × 86 „ =	344			347 Kr. = 5 Guld. 47 Kr.
3 × 86 „ =	258			347 Pf. = 1 Guld. 26 Kr. 3 Pf.
41 × 5 Gld. 47 Kr. =	205	1927	—	
3 × 1 Gld. 26 Kr. 3 Pf. =	3	3	9	
	30083 Guld.	27 Kr.	1 Pf.	

	44 Thlr.	21 Sgr.	9 Pf. × 454	
454 × 44 Thlr =	19976			
21 × 15 Thlr. 4 Sgr. =	315	84	—	454 Sgr. = 15 Thlr. 4 Sgr.
9 × 1 Thlr. 7 Sgr. 10 Pf. =	9	63	90	454 Pf. = 1 Thlr. 7 Sgr. 10 Pf.
	20305 Thlr.	4 Sgr.	6 Pf.	

4) Die Division mit benannten Zahlen.

§ 36.

Es können benannte Zahlen durch gleichartig benannte Zahlen dividirt werden und der Quotient ist dann eine unbenannte Zahl. 12 Thlr. : 4 Thlr. = 3, d. h. 4 Thlr. sind in 12 Thlr. 3 mal enthalten. Ebenso können benannte Zahlen durch unbenannte Zahlen dividirt werden und der Quotient ist dann eine benannte Zahl. 12 Thlr. : 4 = 3 Thlr. Unbenannte Zahlen kann man durch benannte Zahlen nicht dividiren.

§ 37.

Soll eine benannte Zahl durch eine andere benannte Zahl dividirt werden, so müssen beide ganz gleiche Benennung haben; wo dies nicht der Fall ist, muß es durch das Resolviren bewirkt werden.

17 Cntr. 28 Pfd. 35 Neuloth : 3 Cntr. 45 Pfd. 37 Nlth.
= 86435 Neuloth : 17287 Neuloth = 5.

Es sind also 3 Cntr. 45 Pfd. 37 Neuloth in 17 Cntr. 28 Pfd. 35 Neuloth 5 mal enthalten.

27 Thlr. : 3 Thlr. 7 Sgr. 5 Pf.
9720 Pf. : 1169 Pf. = 8, Rest 368.

Es sind also 3 Thlr. 7 Sgr. 5 Pf. (1169 Pf.) in 27 Thlr. (9720 Pf.) 8 mal enthalten und 368 Pf. bleiben übrig.

§ 38.

Wenn eine einfach benannte Zahl durch eine unbenannte Zahl dividirt werden soll, so verfährt man wie bei unbenannten Zahlen § 23 und giebt dem Quotient die Benennung des Dividendus.

1) 873 Thlr. : 9 (§ 23 a.);
97 Thlr.

2) 19757 Bll. : 23 = 859 Bll. (§ 23 d.)
130
2

3) 19320 Ctr. : 56 (§ 23 f.);
: 7
2760 : 8
345 Ctr.

4) 18054 Groß : 531 = 34 Groß
1593
2124 (§ 23 g.)
2124

Bleibt bei der Division ein Rest, so wird dieser zur nächst niederen Benennung resolvirt und sodann mit dem Divisor, den man aber nicht bei jeder Benennung hinschreiben braucht, ebenfalls dividirt; bleibt wieder ein Rest, so wird wie vorhin und in gleicher Weise bis zur kleinsten Benennung fortgefahren.

765 Thlr. : 8
95 Thlr., Rest 5 Thlr. = 150 Sgr. : (8)
18 Sgr., Rest 6 Sgr. = 72 Pf. : (8)
9 Pf.

also 765 Thlr. : 8 = 95 Thlr. 18 Sgr. 9 Pf.

3248 Bll. : 72
: 8
406 : 9
45 Bll., Rest 1 Bll. = 10 Rieß : (9)
1 Rß., Rest 1 Rß. = 20 Buch : (9)
2 Bch., R. 2 B. = 48 Bog. : (9)
5 Bog., R. 3 Bg.;

richtiger Rest 3 × 8 = 24 Bogen (§ 23 f.)

3248 Ballen : 72 ist also = 45 Ballen 1 Rieß 2 Buch 5 Bogen, und 24 Bogen bleiben übrig.

§ 39.

Wenn eine mehrfach benannte Zahl durch eine unbenannte Zahl dividirt werden soll, so verfährt man wie in § 38; nur wird bei jeder kleineren Benennung die im Dividendus vorhandene Zahl dieser Benennung hinzu addirt.

1) 571 Thlr. 13 Sgr. 6 Pf. : 9
63 „ 14 „ 10 „

571 Thlr. : 9 = 63 Thlr., Rest 4 Thlr. = 120 Sgr. + 13 Sgr. = 133 Sgr.; 133 Sgr. : 9 = 14 Sgr., Rest 7 Sgr. = 84 Pf. + 6 Pf. = 90 Pf.; 90 Pf. : 9 = 10 Pf.

2) 1408 Guld. 49 Kr. 1 Pf. : 31 = 45 Guld. 26 Kr. 3 Pf.
163
1
Rest 13 Gld.
= 780 Kr.

780
829 Kr. : (31)
203
2
Rest 23 Kr.
= 92 Pf.

92 + 1 = 93 Pf. : (31)
3 Pf.

§ 23 d.

3) 5288 Zimmer 1 Decher 9 Stück : 72
: 8
323 „ 2 „ 2 „ Rest 2
: 9
35 Zimmer 3 Decher 8 Stück.

Richtiger Rest
3 Stück.
§ 23 f.

4) 3934 Ballen 9 Rieß 7 Buch : 72
: 9
437 „ 2 „ 3 „
: 8
54 Ballen 6 Rieß 10 Buch. Rest 3

Richtiger Rest
3 × 9 = 27 Buch.
§ 23 f.

5) 2265 Schock 3 Mandel 6 Stück : 81
: 9
251 „ 3 „ — „ Rest 6
: 9
27 Schock 3 Mandel 13 Stück. Rest 3

Richtiger Rest
3 × 9 = 27
+ 6
33 Stück.
§ 23 f.

6) 10350 Mark 14 Schilling 2 Pf. : 315
: 9
1150 „ 1 „ 6 „ Rest 8
: 7
164 „ 4 „ 6 „ Rest 3
: 5
32 Mark 13 Schilling 9 Pf.

Richtiger Rest
3 × 9 = 27
+ 8
35 Pf.
§ 23 f.

7) 9014 Groß 2 Dtzd. 1 Stück : 336
: 8
1126 „ 9 „ 3 „ Rest 1
: 7
160 „ 11 „ 7 „ Rest 3
: 6
26 Groß 9 Dtzd. 11 Stück. Rest 1

Richtiger Rest
1 × 7 = 7, × 8 = 56
2 × 8 = 16
+ 1
73 Stück
§ 23 f.

8) 11071 Centner 74 Pfund 28 Neuloth : 451 = 24 Centner 54 Pfd. 46 Nlth.
Rest 282 Neuloth.
§ 23 g)

902
2051
1804
247 Ctr.
= 24700 Pfd.

24700
24774 : (451) = 54 Pfd.
2255
2224
1804
420 Pfd.
= 21000 Nlth.

21028 Neuloth : (451) = 46 Neuloth
1804
2988
2706
282 Neuloth Rest.

Am leichtesten und schnellsten dividirt man, wenn man den Divisor in 2, 3 und mehrere Factoren zerlegt. Man muß daher, außer bei den einziffrigen Zahlen und bei 12, bei allen anderen Zahlen, die sich in Factoren zerlegen lassen, mit zerlegtem Divisor dividiren. Man findet die Factoren einer großen Zahl leicht, wenn man sie erst mit kleineren Zahlen, die in ihnen aufgehen, dividirt und dann aus den kleinen Zahlen größere Factoren bildet; dabei kommen die in § 43 angegebenen Merkmale gut zu Statten.

III. Die gewöhnlichen Brüche.

A. Benennung und Eintheilung der Brüche.

§ 40.

Nimmt man einen oder mehrere Theile von einem in gleiche Theile getheilten Ganzen, so hat man einen Bruch. Um einen Bruch zu schreiben, sind zwei Zahlen erforderlich, die durch einen Strich getrennt werden. Die Zahl unter dem Striche heißt der Nenner und zeigt an, in wie viele Theile das Ganze getheilt ist; die Zahl über dem Striche heißt der Zähler und zeigt an, wie viele solcher Theile man genommen hat.

Ein Bruch, in welchem der Zähler kleiner ist als der Nenner, heißt ein echter Bruch, und derjenige, in welchem der Zähler gleich oder größer ist als der Nenner, ein unechter Bruch.

Ganze Zahlen mit Brüchen heißen gemischte Zahlen.

$$\frac{1}{2}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{3}{4}\quad \frac{7}{11} \text{ u. s. w. sind also echte Brüche;}$$

$$\frac{15}{4}\quad \frac{17}{3}\quad \frac{18}{5}\quad \frac{16}{4}\quad \frac{8}{8} \text{ u. s. w. sind unechte Brüche;}$$

$$4\frac{2}{3}\quad 7\frac{5}{8}\quad 8\frac{2}{3} \text{ u. s. w. sind gemischte Zahlen.}$$

Oft werden auch diejenigen unechten Brüche, bei denen der Nenner in den Zähler aufgeht (wie z. B. $^{16}/_{4}$, $^{8}/_{8}$), uneigentliche Brüche, und diejenigen echten Brüche, bei denen der Zähler 1 ist ($^{1}/_{3}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{8}$), Stammbrüche genannt.

Die sogenannten Doppelbrüche sind Divisionsausdrücke und kommen weiter unten vor.

B. Verwandeln der Brüche.

§ 41.

Man sieht leicht ein, daß die unechten Brüche Ganze enthalten. Will man diese finden, so dividirt man mit dem Nenner in den Zähler, wodurch entweder eine ganze oder eine gemischte Zahl entsteht. $^{8}/_{3}$ giebt die gemischte Zahl $2^{2}/_{3}$, denn $8 : 2 = 2$ Ganze und 2 Rest; der Rest bildet den Zähler des neuen Bruchs und der alte Nenner bleibt. $^{9}/_{3}$ giebt die ganze Zahl 3.

$\frac{24}{5} = 4^4/_5$; $\frac{517}{8} = 64^5/_8$; $\frac{184}{21} = 8^{16}/_{21}$; $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{8}{8} = 1$ u. s. w.

Will man eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, so multiplicirt man mit dem Nenner die ganze Zahl und addirt zu dem Produkt den Zähler des Bruchs; die hierdurch gefundene Zahl ist der Zähler des neuen Bruchs und der alte Nenner bleibt.

$4^2/_3$ ist $= \frac{4 \times 3 + 2}{3} = \frac{14}{3}$; $8^3/_4 = \frac{35}{4}$; $36^3/_8 = \frac{291}{8}$; $68^5/_{12} = \frac{821}{12}$.

C. Aufheben der Brüche.

§ 42.

Wenn man den Zähler eines Bruches durch irgend eine Zahl dividirt, so wird der Bruch um so viel mal **kleiner**, als die Zahl anzeigt: $\frac{8:4}{3} = \frac{2}{3}$; $^2/_3$ ist 4 mal kleiner als $^8/_3$. Wenn man dagegen den Nenner eines Bruches durch irgend eine Zahl dividirt, so wird der Bruch um so viel mal **größer**, als die Zahl anzeigt: $\frac{3}{16:4} = \frac{3}{4}$; $^3/_4$ ist 4 mal größer als $^3/_{16}$.

Daraus geht hervor:

Wenn man den Zähler und Nenner eines Bruches durch eine und dieselbe Zahl dividirt, so bleibt der Werth des Bruches unverändert. Also:

$$\frac{16:8}{48:8} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad \frac{25:5}{30:5} = \frac{5}{6}; \quad \frac{48:48}{96:48} = \frac{1}{2}.$$

Hierauf gründet sich das **Aufheben** der Brüche, d. h. wenn Brüche mit großen Zahlen geschrieben sind, so sucht man sie in den möglichst kleinsten Zahlen darzustellen. Um aber sogleich ermitteln zu können, mit welcher Zahl man Zähler und Nenner zu dividiren hat, ist Folgendes zu merken: Wenn eine Zahl in einer anderen ohne Rest aufgeht, so sagt man, jene sei ein **Maß** von dieser und diese ein **Mehrfaches** oder **Vielfaches** von jener. 3 geht in 12 auf, also ist 3 ein Maß von 12 und 12 ein Mehrfaches von 3. Zahlen, die kein anderes Maß als sich selbst und die Einheit haben, heißen **Primzahlen**, auch wohl **absolute** Primzahlen, wie 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17 u. s. w. Geht eine Zahl in zwei anderen ohne Rest auf, so sagt man, die beiden Zahlen haben ein **gemeinschaftliches** Maß; also 16 und 12 haben das gemeinschaftliche Maß 4. Haben zwei oder mehrere Zahlen aber kein gemeinschaftliches Maß, so sind sie **Primzahlen unter sich**, wie 8 und 9, 14 und 15, 16 und 21 u. s. w.

§ 43.

Haben Zähler und Nenner eines Bruches ein gemeinschaftliches Maß, so läßt der Bruch sich heben, und dies kann so lange fortgesetzt werden, bis Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind. Um schnell das gemeinschaftliche Maß, d. h. die Zahl zu finden, mit der man den Zähler und Nenner des Bruches dividiren muß, sind die nachstehenden Kennzeichen zu merken:

Durch 2 ist jede Zahl theilbar, wenn die letzte Ziffer derselben eine gerade Zahl oder eine Null ist. (Gerade Zahlen sind 2, 4, 6, 8 u. s. w., ungerade Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 u. s. w.)

$$\frac{254}{546} = \frac{127}{273}; \quad \frac{538}{730} = \frac{269}{365}; \quad \frac{610}{846} = \frac{305}{423}.$$

Durch 4 ist jede Zahl theilbar, wenn die beiden letzten Ziffern sich durch 4 theilen lassen oder Nullen sind.

$$\frac{324}{536} = \frac{81}{134}; \quad \frac{548}{700} = \frac{137}{175}; \quad \frac{736}{900} = \frac{184}{225}.$$

Durch 8 ist jede Zahl theilbar, wenn die 3 letzten Ziffern sich durch 8 theilen lassen oder Nullen sind.

$$\frac{1224}{3856} = \frac{153}{482}; \quad \frac{1408}{7000} = \frac{176}{875}; \quad \frac{1872}{5000} = \frac{234}{625}.$$

Durch 3 ist jede Zahl theilbar, wenn die Quersumme durch 3 theilbar ist, d. h. wenn die neben einander stehenden Ziffern addirt eine Summe geben, welche durch 3 theilbar ist.

$$\frac{735}{942} = \frac{245}{314}; \qquad \frac{852}{1005} = \frac{284}{335}; \qquad \frac{555}{903} = \frac{185}{301}.$$

$\left.\begin{array}{l} 7 + 3 + 5 = 15 \\ 9 + 4 + 2 = 15 \end{array}\right\}$ 15 ist durch 3 theilbar; $\left.\begin{array}{l} 8 + 5 + 2 = 15 \\ 1 + 5 = 6 \end{array}\right\}$ 15 und 6 sind durch 3 theilbar.

Durch 6 ist jede Zahl theilbar, wenn die Quersumme durch 3 theilbar und die letzte Ziffer rechts eine gerade Zahl oder Null ist.

$$\frac{834}{918} = \frac{139}{153}; \quad \frac{738}{924} = \frac{123}{154}; \quad \frac{960}{978} = \frac{160}{163}.$$

Durch 9 ist jede Zahl theilbar, wenn die Quersumme durch 9 theilbar ist.

$$\frac{18}{27} = \frac{2}{3}; \quad \frac{72}{81} = \frac{8}{9}; \quad \frac{702}{909} = \frac{78}{101}.$$

Durch 5 ist jede Zahl theilbar, wenn die letzte Ziffer eine 5 oder eine Null ist.

$$\frac{115}{210} = \frac{23}{42}; \quad \frac{335}{710} = \frac{67}{142}; \quad \frac{785}{815} = \frac{157}{163}.$$

Durch 11 ist jede Zahl theilbar, wenn die Summe der geraden Stellen der Ziffern, gleich der Summe der ungeraden Stellen ist, oder beide Summen um 11 differiren.

$$\frac{341}{572} = \frac{31}{52}; \qquad \frac{2475}{6314} = \frac{225}{574}; \qquad \frac{3993}{9295} = \frac{363}{845}.$$

$\begin{array}{l} 3 + 1 = 4 \\ 5 + 2 = 7 \end{array};$ $\begin{array}{l} 2 + 7 = 4 + 5 \\ 6 + 1 = 3 + 4 \end{array};$ $\begin{array}{l} 3 + 9 = 9 + 3 \\ 9 + 9 = 2 + 5 + \text{Differenz } 11. \end{array}$

Durch 7 giebt es kein Merkmal, das practisch anzuwenden wäre; man muß also mit dieser Zahl versuchen.

§ 44.

Wenn sich ein großer Bruch durch keine der in § 43 angegebenen Zahlen heben läßt, so dividirt man den Nenner durch den Zähler des Bruches, hierauf den Zähler durch den bleibenden Rest, alsdann diesen Rest durch den folgenden Rest, und so fort jeden vorhergehenden Rest durch den folgenden, bis zuletzt ein Rest 1 oder kein Rest bleibt. Bleibt ein Rest 1, so läßt sich der Bruch nicht heben; bleibt aber kein Rest, so ist der letzte Divisor diejenige Zahl, durch die der Bruch sich heben läßt.

$\frac{204}{595}$ 595 : 204 = 2;
408
204 : 187 = 1
187
187 : 17 = 11
187

$\frac{391}{437}$ 437 : 391 = 1
391
391 : 46 = 8
368
46 : 23 = 2
46

$\frac{204}{595}$ läßt sich also durch 17 und $\frac{391}{437}$ durch 23 heben.

$$\frac{204 : 17}{595 : 17} = \frac{12}{35} \text{ und } \frac{391 : 23}{437 : 23} = \frac{17}{19}.$$

D. Brüche auf gleiche Benennung bringen.

§ 45.

Wenn man den Zähler eines Bruches mit einer Zahl multiplicirt, so wird der Bruch um so viel mal größer, als die Zahl anzeigt; multiplicirt man aber den Nenner eines Bruches mit einer Zahl, so wird der Bruch um so viel mal kleiner, als die Zahl anzeigt. Hieraus geht hervor, daß, wenn man den Zähler und Nenner eines Bruches mit einer und derselben Zahl multiplicirt, derselbe seinen Werth nicht verändert, obgleich er in größeren Zahlen dargestellt wird.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}; \quad \frac{7}{8} = \frac{7 \times 3}{8 \times 3} = \frac{21}{24}; \quad \frac{5}{7} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = \frac{20}{28}.$$

Hierauf beruht das Erweitern der Brüche, welches nothwendig ist, um einem Bruche einen größeren oder mehreren Brüchen einen gleichen Nenner zu geben, d. h. sie auf gleiche Benennung zu bringen.

Soll z. B. der Bruch $^3/_4$ den Nenner 60 erhalten, so dividirt man mit dem Nenner 4 in 60, und mit der dadurch entstehenden Zahl 15 multiplicirt man Zähler und Nenner von $\frac{3}{4}$, also $\frac{3 \times 15}{4 \times 15} = \frac{45}{60}$.

Sollen mehrere Brüche denselben Nenner erhalten, so sucht man für jeden Bruch, ebenso wie vorhin, die Zahl, mit welcher man Zähler und Nenner zu multipliciren hat. Es sollen z. B. $^3/_4$, $^5/_{12}$, $^5/_8$, $^7/_{16}$ und $^5/_6$ den Nenner 48 erhalten. Man setzt zu dem Ende die Brüche unter einander und die 48 darüber, dividirt sodann mit jedem Nenner in 48 und schreibt die erhaltenen Quotienten rechts neben den Nenner des Bruches; mit jedem Quotient multiplicirt man hierauf den Zähler und Nenner des nebenstehenden Bruches, wodurch alle Brüche einen gleichen Nenner erhalten, ohne daß sie in ihrem Werthe verändert worden sind.

48 | | | oder 48 | |
---|---|---|---|---|---
$\frac{3}{4}$ | 12 | $\frac{36}{48}$ | | $\frac{3}{4} = \frac{36}{48}$ |
$\frac{5}{12}$ | 4 | $\frac{20}{48}$ | | $\frac{5}{12} = \frac{20}{48}$ |
$\frac{5}{8}$ | 6 | $\frac{30}{48}$ | | $\frac{5}{8} = \frac{30}{48}$ |
$\frac{7}{16}$ | 3 | $\frac{21}{48}$ | | $\frac{7}{16} = \frac{21}{48}$ |
$\frac{5}{6}$ | 8 | $\frac{40}{48}$ | | $\frac{5}{6} = \frac{40}{48}$ |

Sind die Quotienten nur klein, wie in dem vorstehenden Beispiel, so ist es gar nicht nöthig, sie hinzuschreiben; nachdem man mit dem Nenner eines Bruches dividirt hat, multiplicirt man im Kopf sogleich den Zähler und Nenner des Bruches mit dem Quotienten, um den erweiterten Bruch zu erhalten.

§ 46.

Nur selten wird, wie in § 45, eine Zahl gegeben, in der alle Nenner aufgehen; gewöhnlich muß man aus den gegebenen Nennern selbst diese Zahl finden, welche der Haupt- oder Generalnenner genannt wird. Das Verfahren, durch welches der Generalnenner gesucht wird, ist dreierlei Art, nämlich:

1) Man setzt alle gegebenen Nenner neben einander und prüft, ob ein kleiner Nenner in einem größeren aufgeht; der kleinere wird ausgestrichen, der größere nicht, wenn er nicht wieder in einem größeren aufgeht. Gehen zuletzt alle Nenner in einem auf, so ist dieser der Generalnenner. Z. B.:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{15}{36} \quad \frac{7}{18} \quad \frac{3}{4}.$$

36

$\frac{2}{3} = \frac{24}{36}$

$\frac{5}{6} = \frac{30}{36}$

$\frac{7}{12} = \frac{21}{36}$

$\frac{15}{36} = \frac{15}{36}$

$\frac{7}{18} = \frac{14}{36}$

$\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$

Nenner:
3, 6, 12, 36, 18, 4
36 ist der Generalnenner.

3 in 36 = 12; $12 \times 2 = 24$ also $\frac{24}{36}$

6 in 36 = 6; $6 \times 5 = 30$ also $\frac{30}{36}$

12 in 36 = 3; $3 \times 7 = 21$ also $\frac{21}{36}$ u. s. w.

2) Wenn die Nenner nicht alle in einem aufgehen, so streicht man wenigstens diejenigen kleineren Nenner aus, welche in dem größeren aufgehen. Hierauf sieht man zu, welchen gleichen Factor die gebliebenen Nenner haben, setzt diesen Factor rechts heraus und dividirt mit demselben in die Nenner, deren Factor er ist. Die entstandenen Quotienten werden nebst den gebliebenen Nennern unter einen Strich gesetzt. Jetzt trennt man wieder den gemeinsamen Factor dieser Zahlen heraus und fährt so fort, bis die bleibenden Zahlen keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben. Zuletzt werden die gebliebenen Zahlen und die

herausgesetzten Factoren mit einander multiplicirt, wodurch der Generalnenner entsteht. Um auch den kleinsten Generalnenner zu erhalten, was von Wichtigkeit ist, muß man darauf achten, daß die gebliebenen Zahlen Primzahlen unter sich, und die herausgesetzten Factoren einfache Factoren sind. Z. B.:

$$\frac{3}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{3}{10}.$$

360

$\frac{3}{5}$	72	$\frac{216}{360}$
$\frac{1}{2}$	180	$\frac{180}{360}$
$\frac{5}{8}$	45	$\frac{225}{360}$
$\frac{5}{6}$	60	$\frac{300}{360}$
$\frac{7}{9}$	40	$\frac{280}{360}$
$\frac{3}{10}$	36	$\frac{108}{360}$

Nenner: Factoren:

5, 2, 8, 6, 9, 10 : 2

4, 3, 9, 5

$4 \times 9 = 36;\ 36 \times 5 = 180$

$180 \times 2 = 360$ Generalnenner.

Das Ausstreichen kleinerer Zahlen gegen größere findet auch nach jedem Aufheben statt, sobald solche Zahlen entstanden sind, wie 3 gegen 9.

3) Wenn die Nenner nicht in einander aufgehen und auch keine gleichen Factoren herausgetrennt werden können, so multiplicirt man die Nenner mit einander; das daraus entstehende Produkt ist der Generalnenner. Z. B.:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{7}{11}.$$

4620

$\frac{2}{3}$	1540	$\frac{3080}{4620}$
$\frac{3}{4}$	1155	$\frac{3465}{4620}$
$\frac{4}{5}$	924	$\frac{3696}{4620}$
$\frac{2}{7}$	660	$\frac{1320}{4620}$
$\frac{7}{11}$	420	$\frac{2940}{4620}$

Nenner:

3, 4, 5, 7, 11

$3 \times 4 = 12;\ 12 \times 5 = 60$

$60 \times 7 = 420;\ 420 \times 11 = 4620$ Generalnenner.

Ebenso verfährt man, wenn einige Nenner sich streichen lassen, aus den übrigen aber keine Factoren herausgetrennt werden können.

E. Die 4 Species in Brüchen.

1) Die Addition der Brüche.

§ 47.

Da nur gleichnamige Dinge addirt werden können, so kann man auch nur Brüche addiren, wenn sie gleiche Nenner haben. Man setzt zu dem Ende die Brüche unter einander, rückt rechts die Zähler heraus, addirt diese und giebt der Summe derselben den gemeinsamen Nenner der Addenden. Entsteht ein unechter Bruch, so wird er in eine gemischte Zahl verwandelt.

$\frac{8}{25}$	8
$\frac{7}{25}$	7
$\frac{12}{25}$	12
$\frac{13}{25}$	13
	$\frac{40}{25} = 1\frac{15}{25} = 1\frac{3}{5}$

$$\frac{7}{20},\ \frac{11}{20},\ \frac{13}{20},\ \frac{17}{20}:\quad \frac{48}{20} = 2\frac{8}{20} = 2\frac{2}{5}.$$

Glaubt man sich beim Addiren nicht zu irren, so rückt man, wie im zweiten Beispiel, die Zähler nicht heraus.

§ 48.

Haben die Brüche nicht gleiche Nenner, so werden sie ebenfalls unter einander gesetzt und nach § 46 auf gleiche Benennung gebracht, wobei man jedoch nur die Zähler hinschreibt. Diese werden hierauf addirt und der Generalnenner wird unter die Summe gesetzt; der dadurch entstehende Bruch wird in eine gemischte Zahl verwandelt. Z. B.:

$$\frac{2}{3}\quad \frac{3}{4}\quad \frac{7}{8}\quad \frac{5}{9}\quad \frac{5}{6}\quad \frac{7}{10}.$$

360		
$\frac{2}{3}$	120	240
$\frac{3}{4}$	90	270
$\frac{7}{8}$	45	315
$\frac{5}{9}$	40	200
$\frac{5}{6}$	60	300
$\frac{7}{10}$	36	252
		$\frac{1577}{360} = 4\frac{137}{360}$.

Nenner: Factoren:

3, 4, 8, 9, 6, 10
4, 9, 3, 5 : 2

$4 \times 9 = 36$; $36 \times 5 = 180$
$180 \times 2 = 360$ Generalnenner.

24	
$\frac{3}{4}$	18
$\frac{1}{3}$	8
$\frac{5}{8}$	15
$\frac{2}{3}$	16
$\frac{1}{2}$	12
	$\frac{69}{24} = 2\frac{7}{8}$.

Ohne Heraussetzen der Quotienten.

§ 49.

Hat man nur zwei Brüche mit ungleichen Nennern zu addiren, so sucht man nicht den Generalnenner, sondern verfährt in folgender Weise:

a) Wenn beide Nenner Primzahlen unter sich sind, so multiplicirt man mit dem Nenner des einen Bruches den Zähler und Nenner des anderen Bruches, wodurch man zwei Brüche mit gleichen Nennern erhält, die nach § 47 addirt werden.

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} + \frac{4 \times 4}{5 \times 4} = \frac{15}{20} + \frac{16}{20} = \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}.$$

$$\frac{13}{21} + \frac{17}{31} = \frac{13 \times 31}{21 \times 31} + \frac{17 \times 21}{31 \times 21} = \frac{403}{651} + \frac{357}{651} = \frac{760}{651} = 1\frac{109}{651}.$$

b) Wenn beide Nenner nicht Primzahlen unter sich sind, so trennt man die gleichen Factoren heraus und multiplicirt mit der im Nenner gebliebenen Zahl des einen Bruches den Zähler des anderen Bruches; addirt sodann beide Produkte und giebt der Summe einen Nenner, der aus dem Produkt der beiden in den Nennern gebliebenen Zahlen, mal den herausgetrennten Factoren, besteht.

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{15} = \frac{5 \times 5 + 7 \times 4}{4 \times 5 \times 3} = \frac{25 + 28}{60} = \frac{53}{60}.$$

(15 : 3 Factor; 4, 5 bleibende Zahlen.)

$$\frac{67}{120} + \frac{83}{168} = \frac{67 \times 7 + 83 \times 5}{5 \times 7 \times 3 \times 8} = \frac{469 + 415}{840} = \frac{884}{840} = 1\frac{11}{210}.$$

(168 : 8, 21 : 3 Factoren; 15, 5 und 7 bleibende Zahlen.)

c) Ist der eine Nenner ein aliquoter Theil (Maß) des anderen, so dividirt man mit dem kleineren Nenner in den größeren und multiplicirt mit dem Quotient den kleineren Nenner und zugehörigen Zähler. Dadurch entstehen zwei Brüche mit gleichen Nennern, die nun nach § 47 addirt werden.

$$\frac{7}{18} + \frac{5}{9} = \frac{7}{18} + \frac{10}{18} = \frac{17}{18}; \quad \frac{31}{75} + \frac{16}{25} = \frac{31}{75} + \frac{48}{75} = \frac{79}{75} = 1\frac{4}{75}.$$

d) Haben die beiden Brüche den Zähler 1, so addirt man die beiden Nenner, wodurch man den Zähler, und multiplicirt die beiden Nenner, wodurch man den Nenner des Bruches der Summe erhält.

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{7} = \frac{7 + 8}{7 \times 8} = \frac{15}{56}; \quad \frac{1}{16} + \frac{1}{9} = \frac{16 + 9}{16 \times 9} = \frac{25}{144}.$$

§ 50.

Sollen gemischte Zahlen addirt werden, so werden die Brüche wie bisher behandelt und die Ganzen aus diesen Brüchen zu den Ganzen der gegebenen gemischten Zahlen addirt.

24	
$4\frac{2}{3}$	16
$7\frac{5}{8}$	15
$5\frac{3}{4}$	18
$6\frac{5}{6}$	20
$8\frac{1}{3}$	8
$9\frac{1}{6}$	4
$42\frac{3}{8}$	$\frac{81}{24} = 3\frac{9}{24} = 3\frac{3}{8}.$

Nenner.
3, 8, 4, 6, 3, 6 : 2
4 3
$4 \times 3 = 12; \; 12 \times 2 = 24.$
Generalnenner.

§ 51.

Wenn Brüche mit mehrfach benannten Zahlen verbunden sind, so behandelt man die Brüche wie bisher; die daraus entstehenden Ganzen werden zu den

Ganzen derjenigen Benennung addirt, zu welcher die Brüche gehören. Demnächst wird wie in § 29 verfahren.

						120
3	Thlr.	4	Sgr.	$9\frac{3}{4}$	Pf.	90
8	„	25	„	$8\frac{3}{5}$	„	72
9	„	7	„	$6\frac{2}{3}$	„	80
9	„	17	„	$7\frac{7}{10}$	„	84
4	„	26	„	$8\frac{5}{6}$	„	100
9	„	17	„	$9\frac{3}{8}$	„	45
45	Thlr.	10	Sgr.	$2\frac{111}{120}$	Pf.	$\frac{471}{120} = 3\frac{111}{120}$.

2) Die Subtraction der Brüche.

§ 52.

Beim Subtrahiren der Brüche wird wie beim Addiren derselben verfahren, nur daß man hier die Zähler subtrahirt, statt dort addirt.

a) Die Nenner der gegebenen Brüche sind gleich. (§ 47.)

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}. \quad \frac{65}{96} - \frac{17}{96} = \frac{48}{96} = \frac{1}{2}.$$

b) Die Nenner sind ungleich und Primzahlen unter sich. (§ 49 a.)

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{5} = \frac{35}{40} - \frac{24}{40} = \frac{11}{40}; \quad \frac{17}{16} - \frac{2}{7} = \frac{119}{112} - \frac{32}{112} = \frac{87}{112}.$$

c) Die Nenner sind ungleich und keine Primzahlen unter sich. (§ 49 b.)

$$\frac{14}{15} - \frac{7}{12} = \left(\frac{14 \,.\, 4 - 7 \,.\, 5}{5 \,.\, 4 \,.\, 3}\right) = \frac{56 - 35}{60} = \frac{21}{60} = \frac{7}{20}.$$

15 ; 12 : 3 Factor
5 ; 4 bleibende Zahlen.

$$\frac{137}{256} - \frac{123}{384} = \left(\frac{137 \,.\, 3 - 123 \,.\, 2}{2 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 8 \,.\, 8}\right) = \frac{411 - 246}{768} = \frac{165}{768} = \frac{55}{256}.$$

256 ; 384 : 8 }
32 ; 48 : 8 } Factoren
4 ; 6 : 2 }
2 ; 3 bleibende Zahlen.

d) Der eine Nenner ist ein aliquoter Theil des andern. (§ 49 c.)

$$\frac{15}{16} - \frac{3}{8} = \frac{15}{16} - \frac{6}{16} = \frac{9}{16}; \quad \frac{9}{28} - \frac{25}{112} = \frac{36}{112} - \frac{25}{112} = \frac{11}{112}.$$

e) Die Zähler sind 1. (§ 49 d.)

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20}; \quad \frac{1}{8} - \frac{1}{25} = \frac{25}{200} - \frac{8}{200} = \frac{17}{200}.$$

§ 53.

Sind gemischte Zahlen zu subtrahiren, so werden die Brüche nach § 52 und die Ganzen nach § 8 bis 13 subtrahirt.

$$7\frac{4}{9} - 3\frac{5}{21} = 7\frac{28}{63} - 3\frac{15}{63} = 4\frac{13}{63} \quad \left(\underset{3}{\frac{4}{9}} - \underset{7}{\frac{5}{21}}{:}\,3 = \frac{28}{63} - \frac{15}{63} = \frac{13}{63}\right).$$

$$45\frac{67}{70} - 23\frac{3}{5} = 45\frac{67}{70} - 23\frac{42}{70} = 22\frac{25}{70} = 22\frac{5}{14}.$$

§ 54.

Ist bei gemischten Zahlen der Bruch des Subtrahendus größer als der des Minuendus, so muß man von den Ganzen des Minuendus Eins borgen und diese zu einem Bruche machen, dessen Zähler und Nenner gleichlautend mit dem Nenner des Subtrahendus ist. Von dem Zähler dieses geborgten Bruches zieht man dann den Zähler des Subtrahendus ab und addirt dazu den Zähler des Minuendbruches.

$$7\frac{3}{4} - 4\frac{4}{5} = 2\frac{19}{20} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} - \frac{4}{5} = \frac{15}{20} - \frac{16}{20};\ \text{Eins} = \frac{20}{20}\ \text{geborgt;} \\ \frac{20}{20} - \frac{16}{20} = \frac{4}{20};\ \frac{4}{20} + \frac{15}{20} = \frac{19}{20}. \end{array} \right.$$

$$27\frac{5}{48} = 17\frac{7}{15} = 9\frac{153}{240} \left\{ \begin{array}{l} \underset{16}{\frac{5}{48}} - \underset{5}{\frac{7}{15}}{:}\,3 = \frac{25}{240} - \frac{112}{240};\ \text{Eins} = \frac{240}{240}\ \text{geborgt;} \\ \frac{240}{240} - \frac{112}{240} = \frac{128}{240};\ \frac{128}{240} + \frac{25}{240} = \frac{153}{240}. \end{array} \right.$$

§ 55.

Wenn mehrfach benannte Zahlen mit Brüchen von einander subtrahirt werden sollen, so werden die Brüche wie bisher behandelt; im Uebrigen wird nach § 30 bis 32 verfahren.

23	Mark	4	Schll.	$8^1/_3$	Pf.
16	„	3	„	$3^7/_8$	„
7	Mark	1	Schll.	$4^{11}/_{24}$	Pf.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} - \frac{7}{8} = \frac{8}{24} - \frac{21}{24};\ \text{Eins} = \frac{24}{24}\ \text{geborgt;} \\ \frac{24}{24} - \frac{21}{24} = \frac{3}{24};\ \frac{3}{24} + \frac{8}{24} = \frac{11}{24}. \end{array} \right.$$

				$^{10}/_{10}$	
8	Gulden	30	Krz.	3	Pf.
5	„	25	„	$1^3/_{10}$	„
3	Gulden	5	Krz.	$1^7/_{10}$	Pf.

		10		$20.^9/_9$	
16	Ballen	—	Rieß	—	Buch
10	„	7	„	$8^7/_9$	„
5	Ballen	2	Rieß	$11^2/_9$	Buch

3) Die Multiplication und Division der Brüche.

a) Multipliciren eines Bruches mit einer ganzen Zahl.

§ 56.

Man multiplicirt den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl nach § 45 und läßt den Nenner unverändert; vorher hebt man jedoch die Zahl gegen den Nenner des Bruches so viel als möglich auf. Entsteht ein unechter Bruch, so wird derselbe in eine gemischte Zahl verwandelt.

$$\frac{3}{17} \times 4 = \frac{3 \cdot 4}{17} = \frac{12}{17}; \quad \frac{7}{8} \times 54 = \frac{7 \cdot \overset{27}{\cancel{54}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{189}{4} = 47\frac{1}{4}.$$

$$\frac{28}{32} \times 79 = \frac{\overset{7}{\cancel{28}} \cdot 79}{\underset{8}{\cancel{32}}} = \frac{553}{8} = 69\frac{1}{8}; \quad \frac{15}{16} \times 131 = \frac{15 \cdot 131}{16} = \frac{1965}{16} = 122\frac{13}{16}.$$

a) Dividiren eines Bruches durch eine ganze Zahl.

§ 57.

Man multiplicirt den Nenner des Bruches mit der ganzen Zahl und läßt den Zähler unverändert (§ 45); vorher hebt man jedoch die Zahl gegen den Zähler des Bruches so viel als möglich auf.

$$\frac{15}{16} : 12 = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{16 \cdot \underset{4}{\cancel{12}}} = \frac{5}{64}; \quad \frac{18}{22} : 5 = \frac{\overset{9}{\cancel{18}}}{\underset{11}{\cancel{22}} \cdot 5} = \frac{9}{55}.$$

$$\frac{48}{53} : 156 = \frac{\overset{4}{\cancel{48}}}{53 \cdot \underset{13}{\cancel{156}}} = \frac{4}{689}; \quad \frac{27}{56} : 10 = \frac{27}{560}.$$

b) Multipliciren eines Bruches mit einem Bruch.

§ 58.

Man multiplicirt Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner; vorher hebt man jedoch, wenn es möglich ist, den Zähler des einen Bruches gegen den Nenner des andern auf. Das Verfahren beruht auf dem Satze: Wenn man mit dem Zähler des einen Bruches den Zähler des andern Bruches multiplicirt, so ist das daraus entstehende Produkt um so viel mal zu groß, als der Nenner des ersten Bruches anzeigt; es muß also das Produkt noch durch diesen Nenner dividirt werden, was durch Multipliciren der beiden Nenner geschieht (§ 57).

$$\frac{7}{\underset{2}{\cancel{8}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{5} = \frac{7}{10}; \quad \frac{\overset{3}{\cancel{27}}}{\underset{2}{\cancel{46}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{23}}}{\underset{4}{\cancel{36}}} = \frac{3}{8}; \quad \frac{12}{13} \times \frac{16}{17} = \frac{192}{221}.$$

Bei großen Brüchen, die sich nicht heben lassen, kann man sich das Multipliciren dadurch erleichtern, das man einen Zähler und einen Nenner in Factoren zerlegt.

$$\frac{37}{42} \times \frac{25}{29} = \frac{37 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 7 \cdot 29} = \frac{185 \cdot 5}{6 \cdot 203} = \frac{925}{1218}.$$

Der zweite Ansatz ist nicht nöthig, wenn man die Factoren bei den Aufgabebrüchen notirt und gleich multiplicirt. Also:

$$\frac{37}{\underset{6.7}{42}} \times \frac{\overset{5.5}{25}}{29} = \frac{185 \,.\, 5}{6 \,.\, 203} = \frac{925}{1218}.$$

b) Dividiren eines Bruches durch einen Bruch.

§ 59.

Man kehrt den Bruch des Divisors um und verfährt dann wie bei der Multiplication § 58; oder, was dasselbe ist, man dividirt den Bruch des Dividendus durch den Zähler des Divisorbruches nach § 57 und multiplicirt dies mit dem Nenner des Divisorbruches nach § 56. Das Verfahren beruht auf dem Satze: Wenn man einen Bruch durch den Zähler eines anderen Bruches dividirt, so hat man diesen Bruch mit einer um so viel mal zu großen Zahl dividirt, als der Nenner des andern Bruches anzeigt; es muß also der erhaltene Quotient noch mit diesem Nenner multiplicirt werden, um den richtigen Quotienten zu erhalten.

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}; \quad \frac{13}{15} : \frac{7}{8} = \frac{13 \,.\, 8}{15 \,.\, 7} = \frac{104}{105}.$$

$$\frac{15}{16} : \frac{12}{14} = \frac{\overset{5}{15} \,.\, \overset{7}{14}}{\underset{8}{16} \,.\, \underset{4}{12}} = \frac{35}{32} = 1\frac{3}{32}; \quad \frac{27}{38} : \frac{54}{114} = \frac{27 \,.\, \overset{3}{114}}{38 \,.\, \underset{2}{54}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Bei großen Brüchen, die sich nicht heben lassen, verfährt man, wie es in § 58 bei eben solchen Brüchen gezeigt ist.

$$\frac{37}{39} : \frac{27}{35} = \frac{37}{39} \times \frac{\overset{7.5}{35}}{\underset{9.3}{27}} = \frac{259 \,.\, 5}{351 \,.\, 3} = \frac{1295}{1053} = 1\frac{242}{1053}.$$

c) Multipliciren einer gemischten Zahl mit einer ganzen Zahl.

§ 60.

Soll eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, so geschieht dies mit Rücksicht auf die Größe und Art der zu multiplicirenden Zahlen nach folgenden Verfahrungsweisen:

aa) Wenn sich mit der ganzen Zahl leicht multipliciren läßt.

Man multiplicirt mit der ganzen Zahl den Bruch der gemischten Zahl nach § 56 im Kopf oder abseits durch Niederschreiben, und zählt die daraus erhaltenen Ganzen zu dem Produkt der ganzen Zahl mal den Ganzen der gemischten Zahl.

$$\begin{array}{c} 17\tfrac{3}{4} \times 8 \\ \hline 142 \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{3}{4} \times 8 = \frac{24}{4} = 6; \\ 17 \times 8 = 136 + 6 = 142. \end{array} \right.$$

$24\frac{5}{7} \times 9$ | $9 \times \frac{5}{7} = \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7}$; $9 \times 24 = 216$
$222\frac{3}{7}$ | $216 + 6\frac{3}{7} = 222\frac{3}{7}$.

$30\frac{4}{5} \times 12$; $17\frac{2}{3} \times 14$; $112\frac{4}{5} \times 18$.
$369\frac{3}{5}$ $247\frac{1}{3}$ $2030\frac{2}{5}$

bb) Wenn sich mit der ganzen Zahl schwerer multipliciren läßt.

Man multiplicirt erst die Ganzen der gemischten Zahl, setzt darunter das Produkt aus dem Bruch mal der ganzen Zahl und addirt Beides.

1) $824\frac{4}{9} \times 241$
3296
1648
$107\frac{1}{9}$
$198691\frac{1}{9}$

| $241 \times \frac{4}{9}$
| $\times 4$
| $964 : 9$
| $107\frac{1}{9}$

2) $675\frac{17}{25} \times 523$
2025
1350
3375
$355\frac{16}{25}$
$353380\frac{16}{25}$.

| $523 \times \frac{17}{25} = \frac{8891}{25} = 355\frac{16}{25}$

cc) Wenn sich die ganze Zahl oder die Ganzen der gemischten Zahl in Factoren zerlegen lassen.

Man multiplicirt im ersten Falle wie bei aa mit jedem Factor, im anderen Falle mit den Factoren der Ganzen der gemischten Zahl die gegebene ganze Zahl, und addirt dazu das Produkt dieser Zahl mal den Bruch der gemischten Zahl.

1) $332\frac{5}{7} \times 72$
$\times 8$
$2661\frac{5}{7} \times 9$
$23955\frac{3}{7}$

2) $96\frac{3}{4} \times 739$
$\times 12$
8868×8
70944
$554\frac{1}{4}$
$71498\frac{1}{4}$

| $739 \times \frac{3}{4}$
| $= \frac{2117}{4}$
| $= 554\frac{1}{4}$

dd) Wenn sich die ganze Zahl oder die Ganzen der gemischten Zahl annähernd in Factoren zerlegen lassen.

Man verfährt wie bei cc und addirt oder subtrahirt die zu wenig oder zu viel genommene Zahl.

1) $213\frac{4}{5} \times 73$
$\times 8$
$1710\frac{2}{5} \times 9$ } $\times 72$
$15393\frac{3}{5}$
$213\frac{4}{5}$ (+ Multipl.)
$15607\frac{2}{5}$

2) $305\frac{7}{8} \times 83$
$\times 12$
$3670\frac{1}{2} \times 7$ } $\times 84$
$25693\frac{1}{2}$
$305\frac{7}{8}$ (— Multiplicandus.)
$25387\frac{5}{8}$

3) $97\frac{3}{7} \times 476$
$\times 12$
5712×8 } $\times 96$
45696
204 ($476 \times \frac{3}{7}$
476 (+ Mult.)
46376

ee) Wenn sich die ganze Zahl oder die Ganzen der gemischten Zahl in Factoren neben einander zerlegen lassen.

Man multiplicirt die ganzen Zahlen nach § 18r und addirt dazu das Produkt aus dem Bruch mal der gegebenen ganzen Zahl.

1) $47\,^7/_9 \times 1248$

$\times 12$
564 $\times 4$
2256
$970\,^2/_3$
$59626\,^2/_3$

$1248 \times {}^7/_9 = \frac{8736}{9} = 970\,^2/_3$

2) $5614\,^{11}/_{14} \times 765$

$\times 14$
10710 $\times 4$
42840
$601\,^1/_{14}$
$4295311\,^1/_{14}$

$765 \times {}^{11}/_{14}$
$\times 11$
8415
: 7
$1202\,^1/_7$
: 2
$601\,^1/_{14}$

ff) Wenn der Bruch der gemischten Zahl nahe einem Ganzen ist.

Man nimmt die Ganzen der gemischten Zahl um Eins höher an, multiplicirt diese Zahl mit der gegebenen ganzen Zahl und zieht davon das Produkt des Ergänzungsbruches mal der ganzen Zahl ab.

1) $7845 \times 51\,^{15}/_{16}$ $(= 52 - {}^1/_{16})$

$\times 13$
101985 $\times 4$ } 52
407940
$490\,^5/_{16} = 7845 \times {}^1/_{16}$
$407449\,^{11}/_{16}$

$7845 \times {}^1/_{16} = \frac{7845}{16} = 490\,^5/_{16}$

2) $766 \times 234\,^7/_9$ $(= 235 - {}^2/_9)$

$\times 235$
3830
2298
1532
180010
$170\,^2/_9 = 766 \times {}^2/_9$
$179839\,^7/_9$

$766 \times {}^2/_9 = \frac{1532}{9} = 170\frac{2}{9}$

gg) Wenn die gemischte Zahl nahe einer Zahl mit einer oder mehreren Nullen ist.

Man ergänzt die gemischte Zahl zu der nächsten Zahl mit einer oder mehreren Nullen, multiplicirt mit dieser Zahl die gegebene ganze Zahl und zieht davon das Produkt des Ergänzungsbruches mal der ganzen Zahl ab.

1) $29\,^2/_5 \times 423$

$\times 30$
12690
$423 \times {}^3/_5 =$ $253\,^4/_5$
$12436\,^1/_5$

2) $99\,^8/_{13} \times 615$

$\times 100$
61500
$615 \times {}^5/_{13} =$ $236\,^7/_{13}$
$61263\,^6/_{13}$

hh) Wenn die gemischte Zahl ein aliquoter Theil von 100, 1000 u. s. w. ist.

Aliquote Theile von 100 sind:

$8\,^1/_3 = {}^1/_{12}$ $(100 : 12 = 8\,^1/_3)$; $12\,^1/_2 = {}^1/_8$; $16\,^2/_3 = {}^1/_6$; $33\,^1/_3 = {}^1/_3$.
$37\,^1/_2 = {}^3/_8$; $41\,^2/_3 = {}^5/_{12}$; $58\,^1/_3 = {}^7/_{12}$; $62\,^1/_2 = {}^5/_8$; $66\,^2/_3 = {}^2/_3$;
$83\,^1/_3 = {}^5/_6$; $87\,^1/_2 = {}^7/_8$.

Aliquote Theile von 1000 sind:

$166\,^2/_3 = {}^1/_6$; $333\,^1/_3 = {}^1/_3$; $666\,^2/_3 = {}^2/_3$; $833\,^1/_3 = {}^5/_6$.

Soll eine ganze Zahl mit einem dieser Brüche multiplicirt werden, so hängt man der ganzen Zahl zwei resp. drei Nullen an und multiplicirt sie dann mit dem Bruch, der den aliquoten Theil der gemischten Zahl von 100 oder 1000 angiebt.

1) $8487 \times 16^2/_3 = 848700 \times {}^1/_6 = 141450$

2) $4678 \times 166^2/_3 = 4678000 \times {}^1/_6 = 779666^2/_3$

3) $6487 \times 833^1/_3 = 6487000 \times {}^5/_6$; $6487000 \times 5 = 32435000$; $32435000 : 6 = 5405833^1/_3$.

c) Dividiren einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl.

§ 61.

Man dividirt die Ganzen der gemischten Zahl durch die gegebene ganze Zahl. Bleibt kein Rest, so wird auch der Bruch nach § 57 durch die ganze Zahl dividirt; bleibt ein Rest, so wird derselbe mit dem Bruch zusammen in einen unechten Bruch verwandelt und dieser ebenso wie ein echter Bruch nach § 57 durch die gegebene Zahl dividirt. Ist die gemischte Zahl kleiner wie der Divisor, so wird sie gleich in einen unechten Bruch verwandelt.

1) $48^3/_4 : 8 = 6^3/_{32}$ $\quad \left\{ 48 : 8 = 6;\ \frac{3}{4} : 8 = \frac{3}{32} \right.$

2) $87^5/_8 : 6 = 14^{29}/_{48}$ $\quad \left\{ 87 : 6 = 14, \text{ Rest } 3;\ 3\frac{5}{8} = \frac{29}{8};\ \frac{29}{8} : 6 = \frac{29}{48} \right.$

3) $7284^7/_9 : 72$; $: 9 \to 809^{34}/_{81}$; $: 8 \to 101^{115}/_{648}$

4) $423^6/_7 : 795 = \frac{2967}{7} : 795 = \frac{2967}{7 \cdot 795} = \frac{2967}{5565} = \frac{989}{1855}$.

d) Multipliciren einer ganzen Zahl mit einem Bruch.

§ 62.

Da es gleich ist, ob man eine ganze Zahl mit einem Bruch oder einen Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so ist das Verfahren im Ganzen dasselbe wie in § 56. Man multiplicirt also die Zahl mit dem Zähler des Bruches und dividirt das Produkt durch den Nenner.

$$54 \times \frac{7}{8} = \frac{\overset{27}{54} \cdot 7}{\underset{4}{8}} = \frac{189}{4} = 47\frac{1}{4};\ 87 \times \frac{2}{5} = \frac{174}{5} = 34\frac{4}{5}.$$

Bei großen Zahlen kann man auch, um kleinere Zahlen zu erhalten, zuerst durch den Nenner dividiren und nachher mit dem Zähler multipliciren, dabei zugleich, wenn es räthlich erscheint, den Nenner und Zähler in Factoren zerlegen.

1) $3728 \times \frac{51}{81}$;

$$
\begin{array}{ll}
\underline{\qquad\qquad} : 9 & \\
414^2/_9 & (: 81) \\
\underline{\qquad\qquad} : 9 & \\
46^2/_{81} & \\
\underline{\qquad\qquad} \times 51 & \\
2347^7/_{27} &
\end{array}
$$

2) $15987 \times \frac{49}{120}$

$$
\begin{array}{ll}
\underline{\qquad\qquad} : 12 & \\
1332^1/_4 & (: 120) \\
\underline{\qquad\qquad} : 10 & \\
133\ ^9/_{40} & \\
\underline{\qquad\qquad} \times 7 & \\
932\ ^{23}/_{40} & (\times 49) \\
\underline{\qquad\qquad} \times 7 & \\
6528\ ^1/_{40} &
\end{array}
$$

Ist der Bruch einem Ganzen nahe, so multiplicirt man die ganze Zahl mit der Ergänzung des Bruches zu einem Ganzen und zieht dieses von der ganzen Zahl ab.

$$
\begin{array}{l|l}
767 \times \frac{14}{15} & 767 \times \frac{1}{15}; \\
51^2/_{15} & = \frac{767}{15} = 51\frac{2}{15} \\
\overline{715^{13}/_{15}} & (1 - {}^1/_{15} = {}^{14}/_{15}.)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
436 \times \frac{215}{219} & 436 \times \frac{4}{219} \\
7^{211}/_{219} & = \frac{1744}{219} = 7\frac{211}{219} \\
\overline{428^8/_{219}} & (1 - {}^4/_{219} = {}^{215}/_{219}.)
\end{array}
$$

d) Dividiren einer ganzen Zahl durch einen Bruch.

§ 63.

Man kehrt den Bruch des Divisors um und verfährt wie bei der Multiplication § 62, oder, was dasselbe ist, man dividirt die gegebene Zahl durch den Zähler des Bruches und multiplicirt das Ergebniß mit dem Nenner.

$$
8 : \frac{3}{5} = 8 \times \frac{5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}; \quad 352 : \frac{11}{17} = \frac{\overset{42}{352} \cdot 17}{11} = 544.
$$

1) $8753 : \frac{35}{51}$

$$
\begin{array}{ll}
\underline{\qquad\qquad} \times 51 & \\
446403 & \\
\underline{\qquad\qquad} : 7 & \\
63771^6/_7 & (: 35) \\
\underline{\qquad\qquad} : 5 & \\
12754^{13}/_{35} &
\end{array}
$$

2) $9557 : \frac{21}{32}$

$$
\begin{array}{ll}
\underline{\qquad\qquad} : 7 & \\
1365^2/_7 & (: 21) \\
\underline{\qquad\qquad} : 3 & \\
455^2/_{21} & \\
\underline{\qquad\qquad} \times 8 & \\
3640^{16}/_{21} & (\times 32) \\
\underline{\qquad\qquad} \times 4 & \\
14563^1/_{21} &
\end{array}
$$

Ist der Bruch einem Ganzen nahe, so kehrt man ihn um, multiplicirt mit dem, was nun über einem Ganzen ist, die Zahl und addirt dieses zu der Zahl.

1)
$$
\begin{array}{l|l}
12809 : \frac{35}{39} & \frac{39}{35} \text{ giebt } \frac{4}{35} \text{ über einem Ganzen.} \\
1463^{31}/_{35} & 12809 \times {}^4/_{35} \\
\overline{14272^{31}/_{35}} & \underline{\qquad\qquad} : 7 \\
 & 1829^4/_7 : 5 \\
 & 365^{32}/_{35} \times 4 \\
 & 1463^{31}/_{35}.
\end{array}
$$

2) $16854 : \frac{335}{343}$	$16854 : 335 = 50\frac{104}{335} \times 8$
$402^{162}/_{335}$	1675
$17256^{162}/_{335}$	104 ——— $402\frac{162}{335}$

e) Multipliciren einer ganzen Zahl mit einer gemischten Zahl.

§ 64.

Das Verfahren ist dasselbe wie in § 60, weil es gleichgiltig ist, welchen der beiden Factoren man als Multiplicator oder Multiplicandus nimmt.

e) Dividiren einer ganzen Zahl durch eine gemischte Zahl.

§ 65.

Man macht die gemischte Zahl zu einem unechten Bruch und verfährt dann wie in § 63. Ist die gemischte Zahl aber ein aliquoter Theil von 100 oder 1000, so verfährt man umgekehrt wie bei der Multiplication § 60 bb; d. h. während man dort mit 100 oder 1000 und mit dem Bruche, der den aliquoten Theil angiebt, multiplicirt, hat man hier durch Beides zu dividiren.

1) $9573 : 8^4/_5$;
$= 9573 : \frac{44}{5}$
——— : 11
$870^3/_{11}$
——— : 4
$217^{25}/_{44}$
——— × 5
$1087^{37}/_{44}$

2) $5468 : 37^1/_2$ ($37^1/_2 = {}^3/_8$ von 100).
——— : 3
$1822^2/_3$ } (: $^3/_8$)
——— × 8
$14581^1/_3$: 100
$145^{244}/_{300}$
$= 145^{61}/_{75}$.

f) Multipliciren einer gemischten Zahl mit einem Bruch.

§ 66.

Man multiplicirt die gemischte Zahl mit dem Zähler des Bruches nach § 60 und dividirt das Produkt durch den Nenner nach § 61. Gewöhnlich dividirt man aber erst, um kleinere Zahlen zu erhalten, und multiplicirt nachher. Ist der Bruch einem Ganzen nahe, so verfährt man, wie in § 62 angegeben ist.

1) $64^3/_4 \times \frac{5}{9}$;
——— : 9
$7^7/_{36}$
——— × 5
$35^{35}/_{36}$

2) $337^8/_9 \times \frac{24}{35}$;
——— : 5
$67^{26}/_{45}$
——— : 7
$9^{206}/_{315}$
——— × 6
$57^{97}/_{105}$
——— × 4
$231^{73}/_{105}$

3) $432^4/_5 \times \frac{15}{16}$
$27^1/_{20}$
$405^3/_4$

| $432^4/_5$: 4
| $108^1/_5$: 4
| $27^1/_{20} = {}^1/_{16}$ von $432^4/_5$.

Bei kleinen Zahlen kann man die gemischte Zahl auch in einen unechten Bruch verwandeln und nach § 58 verfahren.

$$2\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}.$$

f) Dividiren einer gemischten Zahl durch einen Bruch.

§ 67.

Man dividirt die gemischte Zahl durch den Zähler des Bruches nach § 61 und multiplicirt das Ergebniß mit dem Nenner nach § 60. Ist der Bruch einem Ganzen nahe, so verfährt man, wie in § 63 angegeben ist.

1) $24^3/_4 : \frac{7}{8}$;
——— : 7
$3^{15}/_{28}$
——— × 8
$28^2/_7$

2) $649^7/_8 : \frac{9}{25}$;
——— : 9
$72^5/_{24}$
——— × 5
$361^1/_{24}$
——— × 5
$1605^5/_{24}$

3) $859^4/_7 : \frac{24}{25}$.
$= 859^4/_7 \times \frac{25}{24}$
$35^{137}/_{168}$
———
$895^{65}/_{168}$

| $859^4/_7 : 6$
| ———
| $143^{11}/_{42}$
| ——— : 4
| $35^{137}/_{168} = {}^1/_{24}$.

Bei kleinen Zahlen kann man die gemischte Zahl auch in einen unechten Bruch verwandeln und nach § 59 verfahren.

$$1\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{7}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}.$$

g) Multipliciren einer gemischten Zahl mit einer gemischten Zahl.

§ 68.

Man multiplicirt die eine gemischte Zahl zuerst mit der ganzen Zahl der anderen gemischten Zahl nach § 60, sodann mit dem Bruch derselben nach § 66 und addirt hierauf beide Produkte zusammen. Ist der Bruch der einen gemischten Zahl nahe einem Ganzen oder die eine gemischte Zahl nahe an 100, 1000 u. s. w., oder ist sie ein aliquoter Theil von 100 oder 1000, so verfährt man ähnlich wie in § 60 ff, gg und hh. Sind beide gemischte Zahlen nur klein, so verwandelt man sie in unechte Brüche und multiplicirt diese nach § 58.

1) $17^2/_3 \times 15^3/_4$;
——— × 15
265
$13^1/_4$
———
$278^1/_4$

| $17^2/_3 \times 3$ ⎫
| 53 ⎬ (× $^3/_4$)
| ——— : 4 ⎭
| $13^1/_4$

2) $46^4/_5 \times 48^2/_7$;
——— × 8 ⎫
$374^2/_5$ ⎬ (× 48)
——— × 6 ⎭
$2246^2/_5$
$13^{13}/_{35}$
———
$2259^{27}/_{35}$

| $46^4/_5$
| ——— : 7 ⎫
| $6^{24}/_{35}$ ⎬ (× $^2/_7$)
| ——— × 2 ⎭
| $13^{13}/_{35}$

3) $27^3/_5 \times 63^2/_3$ (§ 60 ff.);
——— × 8 ⎫
$220^4/_5$ ⎬ (× 64)
——— × 8 ⎭
$1766^2/_5$
$9^1/_5$
———
$1757^1/_5$

| $27^3/_5 \times {}^1/_3$
| ——— : 3
| $9^1/_5$

4) $98^5/_8 \times 133^4/_{11}$ (§ 66 gg.);
———
$133^4/_{11} \times 100$
——— × 10 ⎫
$1333^7/_{11}$ ⎬ 100
——— × 10 ⎭
$13336^4/_{11}$
$183^{33}/_{88}$ (− $1^3/_8$)
———
$13152^{87}/_{88}$

| $133^4/_{11} \times 1^3/_8$
| ——— : 8 ⎫
| $16^{59}/_{88}$ ⎬ × $^3/_8$
| ——— × 3 ⎭
| $50^1/_{88}$
| $133^4/_{11}$ (× 1)
| ———
| $183^{33}/_{88}$.

5) $166^2/_3 \times 752^1/_4$ (§ 60 hh.);

$752^1/_4 \times 1000 \times {}^1/_6$

$\times 1000$: 752250 ⎫ $166^2/_3 = {}^1/_6$ von 1000

$: 6$: 125375 ⎭

6) $1\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{3} = \frac{7}{4} \times \frac{7}{3}$

$= \frac{49}{12} = 4\frac{1}{12}.$

g) Dividiren einer gemischten Zahl durch eine gemischte Zahl.

§ 69.

Man verwandelt die gemischte Zahl des Divisors in einen unechten Bruch und verfährt nach § 67. Ist der Divisor ein aliquoter Theil von 100 oder 1000, so verfährt man wie in § 65. Bei kleinen Zahlen verwandelt man beide gemischte Zahlen in unechte Brüche und verfährt nach § 59.

$98\frac{4}{5} : 7\frac{3}{4}$ $(\frac{31}{4})$

$: 31$: $3\frac{29}{155}$

$\times 4$: $12\frac{116}{155}$

$845\frac{7}{8} : 132\frac{2}{3}$ $(\frac{398}{3})$

$\times 3$: $2537\frac{5}{8} : 398 = 6\frac{1197}{3184}$

2388

$149\frac{5}{8}$

$= \frac{1197}{8} : 398 = \frac{1197}{3184}.$

$926\frac{4}{5} : 83\frac{1}{3}$ $(83\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ von 100).

$: 100$: $9\frac{134}{500}$

$\times 6$: $55\frac{76}{125}$ ⎫ $(:\frac{5}{6})$

$: 5$: $11\frac{76}{625}$ ⎭

$2\frac{1}{3} : 1\frac{1}{2} = \frac{7}{3} : \frac{3}{2}$

$= \frac{7}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}.$

h) Multipliciren einer mehrfach benannten Zahl mit einem Bruch.

§ 70.

Man multiplicirt die benannte Zahl mit dem Zähler des Bruches nach § 35 und dividirt das Ergebniß durch den Nenner des Bruches nach § 39. Gewöhnlich dividirt man aber erst, um kleinere Zahlen zu erhalten, und multiplicirt nachher. Hat die benannte Zahl selbst einen Bruch, so wird die letzte Benennung, bei welcher er nur vorkommen kann, nach § 60 und 61 behandelt. Ist der Divisorbruch einem Ganzen nahe, so verfährt man ähnlich wie in § 62; läßt er sich leicht in Theile zerlegen, bei denen jeder kleinere Theil ein aliquoter Theil des nächst größeren ist, so kann man auch mit diesen Theilen multipliciren. Man nennt dies die Zerlegungs- oder Zerstreuungs-Methode.

43 Thlr. 21 Sgr. 8 Pf. $\times \frac{5}{7}$
: 7
6 „ 7 „ $4^4/_7$ „
× 5
31 Thlr. 6 Sgr. $10^6/_7$ Pf.

43 Ballen 7 Rieß $16^1/_5$ Buch $\times \frac{7}{15}$
: 5
8 „ 7 „ $11^6/_{25}$ „
: 3
2 „ 9 „ $3^{56}/_{75}$ „ × 7
20 Ballen 4 Rieß $6^{17}/_{75}$ Buch

68 Guld. 27 Kr. $3^7/_8$ Pf. $\times \frac{57}{60}$ $(= 1 - \frac{3}{60} = 1 - \frac{1}{20})$.
3 „ 25 „ $1^{19}/_{32}$ ($^1/_{20}$ subtrahirt)
65 Guld. 2 Kr. $2^9/_{32}$ Pf.

68 Guld. 27 Kr. $3^7/_8$ Pf. : 20
: 10
6 „ 50 „ $3^3/_{16}$ „
: 2
3 Guld. 25 Kr. $1^{19}/_{32}$ Pf.

(Zerlegungs-Methode)

68 Pfund 26 Neuloth 8 Grm. $\times \frac{13}{16}$
: 2 = (× $^1/_2$)
34 „ 13 „ 4 „ : 2 = (× $^1/_2$)
17 „ 6 „ 7 „ : 4 = (× $^1/_4$)
4 „ 14 „ $1^3/_4$ „
55 Pfund 34 Neuloth $2^3/_4$ Grm.

$\frac{13}{16}$ zerlegt in $\frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16}$
$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ von 1
$\frac{4}{16} = \frac{1}{2}$ von $\frac{8}{16}$
$\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$ von $\frac{4}{16}$

h) Dividiren einer mehrfach benannten Zahl durch einen Bruch.

§ 71.

Man verfährt wie in § 70, nur daß man hier durch den Zähler dividirt und mit dem Nenner multiplicirt. In vielen Fällen ist es aber sehr vortheilhaft, den Divisorbruch umzukehren, mit dem, was er dann über ein Ganzes beträgt, den Dividendus zu multipliciren und das Ergebniß zu dem letzteren zu addiren.

46 Groß 7 Dtzd. 11 Stück : $\frac{3}{7}$
: 3
15 „ 6 „ $7^2/_3$ „
× 7
108 Groß 10 Dtzd. $5^2/_3$ Stück.

33 Bll. 8 Rieß $4^3/_4$ Buch : $\frac{4}{15}$
: 4
8 „ 4 „ $11^3/_{20}$ „
× 5
42 „ 2 „ $15^3/_4$ „
× 3
126 Bll. 8 Rieß $7^1/_4$ Buch.

59 Guld. 35 Kr. $3^1/_2$ Pf. : $\frac{36}{43}$ $(\frac{43}{36} = 1 + \frac{7}{36})$ § 63.
11 „ 35 „ $1^{17}/_{72}$ „
71 Guld. 11 Kr. $^{53}/_{72}$ Pf.

59 Guld. 35 Kr. $3^1/_2$ Pf.
: 6
9 „ 55 „ $3^{11}/_{12}$ „
: 6
1 „ 39 „ $1^{23}/_{72}$ „
× 7
11 Guld. 35 Kr. $1^{17}/_{72}$ Pf.
(the three steps above together: × $^7/_{36}$)

86 Mk. 11 Sch. $9^2/_3$ Pf. : $\frac{24}{73}$ ($\frac{73}{24} = 3 + \frac{1}{24}$) § 63.

260 „ 3 „ 5 „ = 3 × Divid.
3 „ 9 „ $9^{65}/_{72}$ „ = $^1/_{24}$ × Divid.
263 Mk. 13 Sch. $2^{65}/_{72}$ Pf.

86 Mk. 11 Sch. $9^2/_3$ Pf. : 6
14 „ 7 „ $3^{11}/_{18}$: 4 } × $^1/_{24}$
3 Mk. 9 Sch. $9^{65}/_{72}$ Pf.

i) Multipliciren einer mehrfach benannten Zahl mit einer gemischten Zahl.

§ 72.

Man multiplicirt die benannte Zahl erst mit den Ganzen der gemischten Zahl nach § 35 und dann mit dem Bruch nach § 70, worauf beide Produkte addirt werden. Hat die benannte Zahl selbst einen Bruch, so wird mit der ganzen Zahl wie in § 60 und mit dem Bruch wie in § 66 multiplicirt.

7 Zimmer 3 Decher 8 Stück × $16^5/_8$
× 4
31 „ 3 „ 2 „ } × 16
× 4
127 „ — „ 8 „
4 „ 3 „ $8^3/_4$ „ (× $^5/_8$)
132 Zimmer — Decher $6^3/_4$ Stück.

7 Zmr. 8 Dchr. 8 Stck. × $^5/_8$
× 5
39 „ 3 „ — „
: 8
4 Zmr. 3 Dchr. $8^3/_4$ Stck.

2 Cntr. 45 Pfd. 7 Neuloth × $28^7/_9$
× 7
17 „ 15 „ 49 „
× 4
68 „ 63 „ 46 „
1 „ 90 „ $33^2/_9$ (× $^7/_9$)
70 Cntr. 54 Pfd. $29^2/_9$ Neuloth.

2 Cntr. 45 Pfd. 7 Nlth. × $^7/_9$
× 7
17 „ 15 „ 49 „
: 9
1 Cntr. 90 Pfd. $33^2/_9$ Nlth.

13 Bll. 7 Rß. $13^5/_6$ Buch × $43^2/_5$ (§ 60 dd.)
× 6
82 „ 6 „ 3 „
× 7 } × 43
578 „ 3 „ 1 „
13 „ 7 „ $13^5/_6$ „ (+ 1)
5 „ 5 „ $1^{16}/_{30}$ „ (+ $^2/_5$)
597 Bll. 5 Rß. $16^{11}/_{30}$ Buch.

13 Bll. 7 Rß. $13^5/_6$ Buch
: 5
2 „ 7 „ $10^{23}/_{30}$ „ } $^2/_5$
× 2
5 Bll. 5 Rß. $1^{16}/_{30}$ Buch.

24 Thlr. 27 Sgr. $8^5/_{11}$ Pf. × $756^2/_3$ (7 in 56 = 8) (§ 60 ee.)
× 7
174 „ 13 „ $11^2/_{11}$ „ × 8
1392 „ 104 „ $88^{16}/_{11}$ (2 Stellen rechts.)
18792 1404 $1188^{216}/_{11}$
18842 Thlr. 4 Sgr. $7^7/_{11}$ Pf.
16 „ 18 „ $5^7/_{11}$ „
18858 Thlr. 23 Sgr. $1^3/_{11}$ Pf.

24 Thlr. 27 Sgr. $8^5/_{11}$ Pf.
: 3
8 „ 9 „ $2^9/_{11}$ „ } × $^2/_3$
× 2
16 Thlr. 18 Sgr. $5^7/_{11}$ Pf.

19 Thlr. 28 Sgr. $7\frac{2}{3}$ Pf. $\times 31\frac{17}{18}$ (§ 60 ff.)

159 „ 19 „ $1\frac{1}{3}$ „	$\times 8$	$\times 32$	
638 „ 16 „ $5\frac{1}{3}$ „	$\times 4$		
1 „ 3 „ $3\frac{5}{54}$ „	$(-\frac{1}{18})$		
637 Thlr. 13 Sgr. $2\frac{13}{54}$ Pf.			

19 Thlr. 28 Sgr. $7\frac{2}{3}$ Pf.		
2 „ 6 „ $6\frac{5}{27}$ „	: 9	$\frac{1}{18}$
1 Thlr. 3 Sgr. $3\frac{5}{54}$ Pf.	: 2	

26 Gld. 15 Kr. $3\frac{3}{4}$ Pf. $\times 98\frac{3}{5}$ (§ 60 gg.)

262 „ 39 „ $1\frac{1}{2}$ „	$\times 10$
2626 „ 34 „ 3 „	$\times 10$
36 „ 46 „ $1\frac{1}{4}$	$(-1\frac{2}{5})$
2589 Gld. 48 Kr. $1\frac{3}{4}$ Pf.	

26 Gld. 15 Kr. $3\frac{3}{4}$ Pf. $\times 1\frac{2}{5}$	
5 „ 15 „ $\frac{3}{4}$ „	: 5
10 „ 30 „ $1\frac{1}{2}$ „	$\times 2$
26 „ 15 „ $3\frac{3}{4}$ „	(+ 1)
36 Gld. 46 Kr. $1\frac{1}{4}$ Pf.	

36 Mrk. 13 Schill. $7\frac{5}{8}$ Pf. $\times 166\frac{2}{3}$ ($166\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ von 1000).
(§ 60 hh.)

368 „ 8 „ $4\frac{1}{4}$ „	$\times 10$	$\times 1000$
3685 „ 3 „ $6\frac{1}{2}$ „	$\times 10$	
36852 „ 3 „ 5 „	$\times 10$	
6142 Mrk. — Schill. $6\frac{5}{6}$ Pf.	: 6	$\times \frac{1}{6}$

oder:

36 Mrk. 13 Schill. $7\frac{5}{8}$ Pf. $\times$ 1000

= 36000 „ 13000 „ $7000\frac{5000}{8}$

= 36000 „ 13000 „ 7625
48

: 6

6000 „ 2166 „ $1278\frac{5}{6}$
142 106

= 6142 Mrk. — Schill. $6\frac{5}{6}$ Pf.

Beim 4ten Beispiel sieht man, daß auch bei den Brüchen das Zerlegen des Multiplicators in Factoren nebeneinander angewendet werden kann. Bei den ganzen Zahlen gilt, was in § 18 r. darüber gesagt worden; für den Bruch ist zu bemerken, daß der Nenner unverändert bleibt, der Zähler aber als eine ganze Zahl betrachtet und ebenso wie diese behandelt wird. $\frac{2}{11} \times 8 = \frac{16}{11}$, die 16 um zwei Stellen rechts gesetzt giebt $\frac{216}{11}$.

i) Dividiren einer mehrfach benannten Zahl durch eine gemischte Zahl.

§ 73.

Man verwandelt die gemischte Zahl in einen unechten Bruch und verfährt dann nach § 71, ohne jedoch das dort angegebene Verfahren, den Bruch umzukehren, in Anwendung zu bringen. Ist die gemischte Zahl ein aliquoter Theil von 100 oder 1000, so verfährt man wie in § 65.

67 Thlr. 13 Sgr. 7 Pf. : $8\frac{3}{4}$
: 7
9 „ 19 „ 1 „
: 5
1 „ 27 „ $9\frac{4}{5}$
× 4
7 Thlr. 21 Sgr. $3\frac{1}{5}$ Pf.
(: $\frac{35}{4}$)

86 Ctr. 57 Pfd. $8\frac{4}{5}$ Neulth. : $26\frac{2}{3}$ ($\frac{80}{3}$)
: 10
8 „ 65 „ $35\frac{22}{25}$ „
: 8
1 „ 8 „ $10\frac{147}{200}$
× 3
3 Ctr. 24 Pfd. $32\frac{41}{200}$ Neulth.
: $\frac{80}{3}$

254 Gld. 37 Kr. 3 Pf. : $41\frac{6}{7}$ ($\frac{293}{7}$)
× 7
1782 „ 24 „ 1 „ : 293 = 6 Gld. 4 Kr. $3\frac{290}{293}$ Pf.
1758 „ 1440 1168 „ (§ 39, Beispiel 8.)
24 1464 : 1169 : (Der Divisor 293 ist nicht jedesmal vorgesetzt, weil er oben steht.)
1440 Kr. 1172 879
292 290
1168 Pf.

376 Pud 18 Pfd. 12 Solotnick : $87\frac{1}{2}$
: 10
47 „ 25 „ 78 „
: 10
4 „ 30 „ $55\frac{4}{5}$ „
× 8
38 „ 4 „ $62\frac{2}{5}$ „
: 7
5 Pud 17 Pfd. $77\frac{17}{35}$ Solotn.

$87\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{8}$ von 100. § 65.
(1 Pud = 40 Pfd.; 1 Pfd. = 96 Solotn.)

F. Von den Doppelbrüchen oder zusammengesetzten Brüchen.

§ 74.

Wenn die Summe 12 + 8 durch 5 dividirt werden soll, so schreibt man (12 + 8) : 5 = 20 : 5 = 4; doch kann man auch schreiben $\frac{12+8}{5} = \frac{20}{5} = 4$. Bei der letzten Schreibart sagt man 20 getheilt durch 5, statt 20 dividirt durch 5. Es ergiebt sich hieraus, daß jede Division in Gestalt eines Bruches geschrieben werden kann, in welchem der Zähler der Dividendus und der Nenner der Divisor ist, und daß umgekehrt jeder Bruch als eine unausgeführte Division betrachtet werden kann, indem das, was über dem Bruchstrich, durch das, was unter demselben steht, zu dividiren ist: 16 + 12, getheilt durch 3 + 1 = $\frac{16+12}{3+1} = \frac{28}{4} = 7$.

Dies vorausgeschickt, ist es leicht, allen sogenannten Doppelbrüchen, die sehr selten vorkommen und nichts weiter wie Divisionsausdrücke sind, ihren wahren Werth zu geben, indem bei ihnen das über dem Hauptstrich (längsten Strich) Stehende durch das unter diesem Striche dividirt wird.

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}; \quad \frac{\frac{3}{7}}{9} = \frac{3}{7} : 9 = \frac{3}{63} = \frac{1}{21}.$$

$$\frac{5^1/_2}{8} = 5^1/_2 : 8 = \frac{11}{2} : 8 = \frac{11}{16}; \quad \frac{4^1/_2}{4} = \frac{9}{2} : 4 = \frac{9}{8}.$$

$$\frac{15}{\frac{10}{17}} = 15 : \frac{10}{17} = \frac{15 \,.\, 17}{10} = \frac{51}{2} = 25^1/_2.$$

$$\frac{\frac{5}{7}}{\frac{8}{9}} = \frac{5}{7} : \frac{8}{9} = \frac{5 \,.\, 9}{7 \,.\, 8} = \frac{45}{56}.$$

Im Geschäftsverkehr kommen einige, den Doppelbrüchen ähnliche Ausdrücke vor, z. B. Anderthalbviertel, Drittehalbviertel, Viertehalbviertel, Neuntehalbviertel u. s. w.

Diese Art Brüche werden ebenso gelöst, wie die obigen:

Anderthalbviertel sind $1^1/_2$ Viertel $= 1^1/_2 : 4 = {}^3/_2 : 4 = {}^3/_8$
Drittehalbviertel sind $2^1/_2$ Viertel $= 2^1/_2 : 4 = {}^5/_2 : 4 = {}^5/_8$
Viertehalbviertel sind $3^1/_2$ Viertel $= 3^1/_2 : 4 = {}^7/_2 : 4 = {}^7/_8$
Neuntehalbviertel sind $8^1/_2$ Viertel $= 8^1/_2 : 4 = {}^{17}/_2 : 4 = {}^{17}/_8 = 2^1/_8$.

Anmerkung. Da jede Division als ein Bruch dargestellt werden kann, so kann man auch vor der Division den Dividendus und Divisor mit einer und derselben Zahl multipliciren oder dividiren, wie man es nach § 42 und 45 mit dem Zähler und Nenner eines Bruches vorzunehmen vermag.

$56 : 21 = 8 : 3 = 2^2/_3$; $9 : 8 = 72 : 64 = 1^1/_8$.

G. Vom Resolviren und Reduciren der Brüche.

§ 75.

Werden bei benannten Zahlen Brüche einer höheren Benennung in niedere Benennungen verwandelt, so nennt man dies das Resolviren der Brüche. Das Verfahren ist das in § 26 mitgetheilte, d. h. man sucht die Resolutionszahl zu der nächst niederen Benennung und multiplicirt mit dieser den Bruch; enthält die hieraus entstehende Zahl der niederen Benennung wieder einen Bruch, so multiplicirt man diesen mit der folgenden niederen Resolutionszahl und fährt so bis zur verlangten oder bis zur kleinsten Benennung fort.

${}^3/_5$ Neuscheffel sind $\frac{3}{5} \times 50 = \frac{3 \,.\, 50}{5} = 30$ Liter.

${}^5/_6$ Thlr. sind $\frac{5}{6} \times 30 = \frac{5 \,.\, 30}{6} = 25$ Sgr.

$\frac{10}{13}$ Mark sind $\frac{10}{13} \cdot 16 = \frac{160}{13} = 12^4/_{13}$ Schilling.

$\frac{4}{13}$ Schill. sind $\frac{4}{13} \cdot 12 = \frac{48}{13} = 3^9/_{13}$ Pf., also sind

$\frac{10}{13}$ Mark $= 12$ Schill. $3^9/_{13}$ Pf.

$\frac{1}{125}$ Ctr. sind $\frac{1 \cdot 100}{125} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ Pfd.

$\frac{4}{5}$ Pfd. sind $\frac{4}{5} \times 50 = \frac{4 \cdot 50}{5} = 40$ Neuloth.

Das Gegentheil von dem Resolviren ist das Reduciren. Zahlen einer kleineren Benennung werden dadurch in Brüche höherer Benennungen verwandelt. Das Verfahren ist dem in § 27 gleich, d. h. man dividirt mit der Reductionszahl in die kleinere Benennung, und zwar in der Art, daß man diese Division in Bruchgestalt ansetzt und den Bruch so viel als möglich aufhebt.

7 Pf. sind $7 : 12 = \frac{7}{12}$ Sgr.

8 Pf. sind $8 : 360 = \frac{8}{360} = \frac{1}{45}$ Thlr.

26 Sgr. 8 Pf. sind $26^8/_{12}$ Sgr. $= 26^2/_3$ Sgr. $= \frac{80}{3}$ Sgr.;

$\frac{80}{3} : 30 = \frac{80}{90}$ Thlr. $= \frac{8}{9}$ Thlr.

6 Neuloth 4 Gramm sind $6^4/_{10} = 6^2/_5 = \frac{32}{5}$ Neuloth

$\frac{32}{5} : 50 = \frac{32}{250} = \frac{16}{125}$ Pfd.

H. Gebrauch und Auflösung der Klammern.

§ 76.

Wenn in Rechenaufgaben Klammern vorkommen, so müssen diese erst aufgelöst werden, ehe man eine andere Rechenoperation vornehmen kann.

Bei der Addition haben die Klammern keinen Werth, weil es gleichgültig ist, ob man $(5 + 3) + 4 = 8 + 4 = 12$, oder $5 + (3 + 4) = 5 + 7 = 12$, oder $5 + 3 + 4 = 12$ setzt.

Hingegen sind die Klammern immer da von Wichtigkeit, wo das Subtractionszeichen (minus) vorkommt, wo also die Subtraction mit der Addition verbunden ist; nämlich $(8 - 5) + 2 = 3 + 2 = 5$, $8 - (5 + 2) = 8 -$

$7 = 1$; ferner $12 - (3 + 4 + 2) = 12 - 9 = 3$, $(12 - 3) + 4 + 2 = 9 + 4 + 2 = 15$; $12 - (3 + 4) + 2 = 12 - 7 + 2 = 7$ u. s. w.

Bei der Multiplication sind die Klammern ebenso wichtig: $(3 + 4)\,8 = 7 \times 8 = 56$; $3 + 4 \times 8 = 3 + 32 = 35$; $(12 - 3)\,2 = 9 \times 2 = 18$, $12 - 3 \times 2 = 12 - 6 = 6$.

Hierbei ist zu bemerken, daß man zwischen die Klammer und den Multiplicator kein Zeichen setzt, also nicht $(12 - 3) \times 2$, sondern $(12 - 3)\,2$ schreibt.

Bei der Division haben die Klammern dieselbe Wichtigkeit, doch ersetzt man sie oft auch durch einen unter den Dividendus gezogenen Strich, welcher andeutet, daß der Dividendus durch die unter den Strich gesetzte Zahl dividirt werden soll. § 74.

$$(8 + 12) : 2 = 20 : 2 = 10;\ 8 + 12 : 2 = 8 + 6 = 14,$$

wird auch geschrieben $\frac{8 + 12}{2} = \frac{20}{2} = 10$ und $8 + \frac{12}{2} = 8 + 6 = 14$. Ferner $(18 - 12) : 3 = 6 : 3 = 2$ und $18 - 12 : 3 = 18 - 4 = 14$.

Bei der Multiplication und Division ist also ganz besonders darauf zu achten, daß der Multiplicator oder Divisor immer nur diejenige Zahl, mit welcher er durch das betreffende Zeichen unmittelbar verbunden ist, multiplicirt oder dividirt. Sollen mehrere Zahlen gleichzeitig mit ihnen multiplicirt oder dividirt werden, so müssen die Zahlen in Klammern gesetzt sein, wie die vorstehenden Beispiele zeigen.

§ 77.

Kommen bei größeren Aufgaben Klammern in Klammern vor, so muß man erst die innere und dann die äußere Klammer nach dem im § 76 gezeigten Verfahren auflösen und genau darauf achten, welches Paar Klammern zusammengehört. In den folgenden Beispielen sind die gewöhnlichsten Anwendungen der Klammern zusammengestellt; wer sich diese Auflösungen gut merkt, wird sich auch in allen Fällen, wo Klammern vorkommen, leicht zurechtfinden.

1) $12 - \frac{3}{4} \times 6 = 12 - \frac{18}{4} = 12 - 4\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$;

2) $(12 - \frac{3}{4})\,6 = 11\frac{1}{4} \times 6 = 67\frac{1}{2}$;

3) $(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}) + (\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}$;

4) $(\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}) - (\frac{1}{2} \times \frac{5}{7}) = \frac{5}{8} - \frac{5}{14} = \frac{15}{56}$;

5) $((3\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2})\,\frac{2}{5} + (7 - \frac{3}{4})\,2) : 6$
$= ((\frac{15}{4} + \frac{5}{2})\,\frac{2}{5} + 6\frac{1}{4} \cdot 2) : 6$
$= (\frac{25}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{25}{4} \cdot 2) : 6$
$= (\frac{5}{2} + \frac{25}{2}) : 6 = \frac{30}{2} : 6 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$;

6) $((64\frac{3}{4} - 5\frac{2}{3}) - (4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4})\,3) : 2\frac{1}{2}$
$(59\frac{1}{12} - 5\frac{3}{4} \times 3) : 2\frac{1}{2}$
$(59\frac{1}{12} - 17\frac{1}{4}) : 2\frac{1}{2} = 41\frac{5}{6} : 2\frac{1}{2} = 16\frac{11}{15}$.

7) $(((64\frac{3}{4} - 5\frac{2}{3}) - (4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4}))\,3) : 2\frac{1}{2}$
$= ((59\frac{1}{12} - 5\frac{3}{4})\,3) : 2\frac{1}{2}$
$= (53\frac{1}{3} \times 3) : 2\frac{1}{2} = 160 : \frac{5}{2} = 64$.

8) $\frac{144}{((9 - 6^1/_2) + (15 - 12^3/_4)\ 6) : {}^3/_4}$

$= \frac{144}{(2^1/_2 + 2^1/_4 \cdot 6) : {}^3/_4} = \frac{144}{(2^1/_2 + 13^1/_2) : {}^3/_4}$

$= \frac{144}{16 : {}^3/_4} = \frac{144}{\frac{64}{3}} = 144 : {}^{64}/_3 = {}^{27}/_4 = 6^3/_4.$

IV. Die Decimalbrüche.

A. Eigenschaften der Decimalbrüche.

§ 78.

Nach dem dekadischen Gesetz unseres Zahlensystems hat eine rechts stehende Ziffer einen 10 mal kleineren Werth als eine gleiche links daneben stehende. Wenn also in 33 die links stehende Ziffer 3 Zehner, die rechts daneben stehende 3 Einer bezeichnet, so wird, wenn man hinter die 3, welche die Einer bezeichnet, ein Komma setzt, die folgende rechts geschriebene 3 den 10ten Theil von 3 Einern, also $^3/_{10}$ ausmachen; mithin ist 33,3 = $33^3/_{10}$. Setzt man statt der letzten 3 eine Null und rückt die 3 wieder um eine Stelle rechts, so ist sie 10 mal kleiner als in der Stelle links und wird also den Bruch $\frac{3}{100}$ geben. 33,03 ist also $33\frac{3}{100}$; ebenso 33,003 = $33\frac{3}{1000}$ u. s. w.

Setzt man statt der Ganzen (33) eine Null, um anzudeuten, daß keine Ganzen vorhanden sind, also 0,3; 0,03; 0,003, wodurch man reine Decimalbrüche erhält, so ergiebt sich folgende Erklärung: Ein Decimalbruch ist ein solcher Bruch, dessen Zähler jede beliebige Zahl, dessen Nenner aber eine Eins mit so vielen Nullen ist, als der Zähler Ziffern hat. Die Null links vom Komma wird als Ziffer nicht gerechnet.

$$0{,}5 = \frac{5}{10};\quad 0{,}45 = \frac{45}{100};\quad 2{,}75 = 2\frac{75}{100}.$$

§ 79.

Der Decimalbruch 0,275 wird gelesen: Null Komma 275, oder Null Ganze 275 Tausendstel; der Decimalbruch 8,07: Acht Komma Null Sieben, oder Acht Ganze 7 Hundertstel. Beim Schreiben der Decimalbrüche muß man die Erklärung des vorigen § stets im Kopfe haben. Wenn dictirt wird: Sieben Ganze Neun Tausendstel, so ist nur eine Ziffer Neun im Zähler gegeben; da er aber nach der Erklärung des § 78 drei Ziffern haben soll, weil 1000 drei Nullen hat, so muß man vor die 9 noch 2 Nullen setzen, also 7,009.

§ 80.

Unechte Brüche giebt es bei den Decimalbrüchen nicht; werden solche indessen dictirt, wie: 347 Zehntel 8745 Hundertstel, so kann man sie nur als gemischte Zahlen schreiben, nämlich 347 Zehntel oder $\frac{347}{10} = 34{,}7$ und 8745 Hundertstel oder $\frac{8745}{100} = 87{,}45$.

§ 81.

Das Anhängen von Nullen an einen Decimalbruch verändert seinen Werth nicht. Indem man dem Zähler eine Null anhängt, giebt man nach der Erklärung in § 78 zugleich dem Nenner eine Null; man hat also Zähler und Nenner mit 10 multiplicirt, was (wie bei den gewöhnlichen Brüchen gezeigt ist) den Werth des Bruches nicht verändert. Es ist mithin 0,5 = 0,50 = 0,500 u. s. w.

§ 82.

Einen aus vielen Ziffern bestehenden Decimalbruch kann man in weniger Ziffern darstellen, indem man die Decimalen in der Art ausstreicht, daß, wenn die letzte zu streichende Ziffer 5 und darüber ist, die links neben stehende Ziffer um Eins größer genommen wird; ist jene aber unter 5, so wird sie ohne Weiteres gestrichen. Z. B. in 0,7835684 streicht man zuerst die 4, hierauf die 8 und macht aus der 6 eine 7; will man weiter streichen, so wird aus der 5 eine 6, aus der 3 eine 4. Man hat nun den Bruch 0,784, der noch nicht um $\frac{1}{2000}$ größer ist als der ursprüngliche Bruch; streicht man noch die 4, so bleibt 0,78, der um etwa $3\frac{1}{2}$ Tausendstel zu klein ist. Es hängt also von der verlangten Genauigkeit ab, wie weit man streicht.

B. Die 4 Species in Decimalbrüchen.

1) Die Addition.

§ 83.

Decimalbrüche werden addirt, indem man sie so unter einander setzt, daß Komma unter Komma zu stehen kommt, woraus folgt, daß dann auch bei den Ganzen die Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen. Hierauf addirt man, bei der äußersten Stelle rechts anfangend, wie bei ganzen Zahlen, ohne auf das Komma der einzelnen Posten zu achten, und setzt zuletzt in der Summa das Komma unter die Kommas der Addenden.

1) 26,75 + 34,375 + 16,0008 + 15,25.

2) 28,34 + 29 + 17,05 + 24,008 + 0,057.

3) 0,7 + 0,401 + 0,2013 + 0,56345 + 0,04.

1)		2)		3)	
	26,75		28,34		0,7
	34,375		29,00		0,401
	16,0008		17,05		0,2013
	15,25		24,008		0,56345
	92,3758		0,057		0,04
			98,455		1,90575

§ 84.

Decimalbrüche in Verbindung mit benannten Zahlen werden ebenso addirt, wie es in § 83 gezeigt worden ist.

1) 0,75 Thlr. + 0,07 Thlr. + 0,087 Thlr. + 0,976 Thlr. + 0,54 Thlr.

2) 9,07 Gld. + 15,605 Gld. + 27,072 Gld. + 0,785 Gld. + 28,008 Gld.

3) 8 Hektar 71 Ar 85,25 □Meter + 3 Hekt. 37 Ar 66,75 □Meter + 87 Ar 44,50 □Meter + 6 Hekt. 97,35 □Meter + 7 Hekt. 80 Ar 25,345 □Meter.

1)	0,75 Thlr.	2)	9,07 Gld.
	0,07 „		15,605 „
	0,087 „		27,072 „
	0,976 „		0,785 „
	0,54 „		28,008 „
	2,423 Thlr.		80,540 Gld.

3)	8	Hekt.	71	Ar	85,25	□Mtr.
	3	„	37	„	66,75	„
	—	„	87	„	44,50	„
	6	„	—	„	97,35	„
	7	„	80	„	25,345	„
	26	Hekt.	78	Ar	19,195	□Mtr.

2) Die Subtraction.

§ 85.

Sollen Decimalbrüche von einander subtrahirt werden, so setzt man den Subtrahendus so unter den Minuendus, daß, wie bei der Addition, die Kommas unter einander zu stehen kommen, und subtrahirt nun wie bei ganzen Zahlen, ohne auf die Kommas zu achten; in der Differenz setzt man das Komma unter das Komma des Subtrahendus.

4,8274 — 2,0139. 6,3546 — 3,8273.

= 4,8274	= 6,3546
2,0139	3,8273
2,8135	2,5273

Fehlen im Minuendus oder Subtrahendus Decimalen, so werden diese auf Grund des § 81 mit Nullen ausgefüllt oder als mit solchen ausgefüllt gedacht.

3,842 — 1,00554. 6,004435 — 0,17.

= 3,842(00)	= 6,004435
1,00554	0,17(0000)
2,83646	5,834435

§ 86.

Das Subtrahiren benannter Zahlen mit Decimalbrüchen wird in gleicher Weise wie in § 85 ausgeführt.

1)	9	Thlr.	20	Sgr.	8,245	Pf.
	3	„	25	„	11,238	„
	5	Thlr.	24	Sgr.	9,007	Pf.

2)	76	Meter	7	Deci	8,094	Centi
	54	„	9	„	9,6578	„
	21	Meter	7	Deci	8,4362	Centi

3)	7	Ctr.	96	Pfd.	7	Neulth.
	3	„	88	„	6,775	„
	4	Ctr.	8	Pfd.	0,225	Neulth.

4)	9	Ball.	7	Rieß	8,379	Buch
	4	„	9	„	9	„
	4	Ball.	7	Rieß	19,379	Buch.

3) Die Multiplication.

§ 87.

Decimalbrüche werden mit einander multiplicirt, indem man sie, ohne auf die Kommas Rücksicht zu nehmen, wie bei ganzen Zahlen multiplicirt. Im Produkt schneidet man von der rechten zur linken Hand so viele Decimalen ab, als beide Factoren (Multiplicator und Multiplicandus) zusammen Decimalen haben. Ist der eine Factor eine ganze Zahl, so werden natürlich nur so viele Decimalen abgeschnitten, als der andere Factor Decimalen hat.

1) $47{,}82 \times 0{,}09$
$\times\ 9$
$4{,}3038$

2) $17{,}234 \times 0{,}41$
$\times\ 41$
$7{,}06594$

3) $0{,}082 \times 95$
410
738
7,790

§ 88.

Wenn beim Multipliciren zweier Decimalbrüche im Produkt nicht so viele Ziffern entstehen, als die Summe der Decimalen beider Factoren beträgt, so setzt man links so viele Nullen vor das Produkt, als erforderlich sind, um das Komma nach § 87 an seine gehörige Stelle zu bringen.

$0{,}0345 \times 0{,}023$
$\times\ 23$
$0{,}0007935$

$0{,}0042 \times 0{,}008$
$\times\ 8$
$0{,}0000336$

§ 89.

Wenn ein Decimalbruch mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt werden soll, so rückt man das Komma von der linken zur rechten Hand um so viele Stellen, als die Zahl, mit welcher man multiplicirt, Nullen hat:

$0{,}4 \times 10 = 4$; $24{,}25 \times 100 = 2425$; $12{,}5768 \times 1000 = 12576{,}8$

Die Richtigkeit des Verfahrens ergiebt sich aus dem dekadischen Gesetz, wonach jede Stelle links 10 mal größer ist als die Stelle rechts. Rückt man also das Komma um eine Stelle rechts, so werden die Ganzen, folglich auch der ganze Bruch, um 10 mal größer; der letzte ist demnach mit 10 multiplicirt worden.

Sind im Multiplicandus nicht so viele Decimalen vorhanden, als der Multiplicator Nullen hat, so werden rechts Nullen angehängt. Das Produkt ist dann stets eine ganze Zahl.

$0{,}4 \times 100 = 40$; $24{,}25 \times 1000 = 24250$; $8{,}08 \times 10000 = 80800$

§ 90.

Wenn Decimalbrüche, die aus vielen Ziffern bestehen, multiplicirt werden sollen, so kürzt man dieselben nach § 82 ab; will man jedoch ein genaueres Resultat haben, so multiplicirt man sie mittelst Logarithmen nach § 220. Sollen die beiden Decimalbrüche 47,83746 und 54,56894 mit einander multiplicirt werden, so ist der erste Bruch abgekürzt 47,84, der andere 54,57 und das Produkt beider 2610,63. Mit Logarithmen richtiger gerechnet erhält man als Produkt 2610,44; also ist das erste Produkt um 0,19 oder circa $^1/_4$ eines Ganzen zu groß. Je nachdem man also genau rechnen will, wählt man die eine oder die andere Art des Multiplicirens. Hat man keine Logarithmentafel und will doch möglichst genau rechnen, so nimmt man 3 statt 2 Decimalen; denn mit allen Decimalen zu multipliciren, was allerdings das richtigste Resultat liefert, kann, der außerordentlich langwierigen Arbeit wegen, nicht empfohlen werden.

Bei Decimalbrüchen mit wenigen Ziffern, entweder gegeben oder durch Abkürzung erzeugt, kann man sämmtliche Multiplicationsmethoden des § 18 in Anwendung bringen. Man verfährt, wenn der Multiplicator dazu geeignet ist, ohne auf das Komma desselben zu achten, genau wie dort.

```
1)  34,43 × 9,60        2) 54,27 × 1,236        3)  64,25 × 2,275
    ------- × 12           ------- × 12             ------- × 91
    41316 × 8              65124    × 3             5846750 0 : 4
    -------                 195372                  ---------
   330,528                 -------                  146,16875
                           67,07772
```

1,236 giebt 12 in 36 — 3 mal, § 18 r; 2275 ist $^{91}/_{4}$ von 100. § 18 t.

§ 91.

Wenn eine mehrfach benannte Zahl mit einem Decimalbruch multiplicirt werden soll, so bringt man entweder die benannte Zahl zur niedrigsten Benennung, die sie enthält, und multiplicirt sie dann mit dem Decimalbruch nach § 87 bis 90; oder man setzt unter den Decimalbruch seinen Nenner und betrachtet ihn als gewöhnlichen Bruch, hebt ihn so viel als möglich auf und verfährt dann nach § 70 und 72.

3 Thlr. 5 Sgr. 7 Pf. × 3,275 = 1147 Pf. × 3,275 = 3756,425 Pf.
= 10 Thlr. 13 Sgr. 0,425 Pf.

oder:

$3{,}275 = 3^{275}/_{1000} = 3^{11}/_{40}$, also

3 Thlr. 5 Sgr. 7 Pf. × $3^{11}/_{40}$ = 10 Thlr. 13 Sgr. $^{17}/_{40}$ Pf. nach § 72.

4) Die Division.

§ 92.

Soll ein Decimalbruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, so verfährt man, ohne auf das Komma des Dividendus zu achten, wie bei der gewöhnlichen Division und schneidet im Quotient so viele Decimalen ab, als der Dividendus Decimalen hat.

```
1)  48,7807 : 23 = 2,1209          2)  645,711 : 187 = 3,453
      2 4 2                            561
                                       ---
                                        847
3)  4631,67216 : 72                     748
    ------------ : 9                    ---
     514,63024 : 8                       991
    ------------                         935
      64,32878                           ---
                                          561
                                          561
                                          ---
```

§ 93.

Bleibt bei der Division ein Rest, so kann man weiter dividiren, wenn man diesem und jedem folgenden Rest eine Null anhängt und dies so lange fortsetzt, bis man Decimalen genug im Quotienten zu haben glaubt; denn jede angehängte Null giebt eine Decimale im Quotienten. Dividirt man durch Factoren, so werden dem zuerst bleibenden Reste die Nullen angehängt. Geht auch mit den angehängten Nullen die Division nicht auf, so wird dies durch Punkte hinten angedeutet.

1) 478,7 : 73 = 6,5575 . . .
438
407
365
420
365
550
511
390
365
25

2) 68660,403 : 81
: 9
7628,93366 . . . : 9
847,65929 . . .

Beim ersten Beispiel sind 3 Nullen angehängt, dazu 1 Decimale im Dividendus, giebt 4 Decimalen im Quotient. Beim zweiten Beispiel sind im Kopf 2 Nullen angehängt, dazu 3 Decimalen im Dividendus, giebt 5 Decimalen im Quotient.

§ 94.

Wird vorher bestimmt, daß der Quotient eine gewisse Anzahl Decimalen, z. B. 6, enthalten soll, so werden dem Dividendus, wenn er nicht so viele Decimalen hat, entweder gleich oder bei den Resten, wie in § 93, so viele Nullen angehängt, als nöthig sind, um die verlangte Anzahl Decimalen im Quotient zu erhalten.

1) 75,42 : 368 = 75,420000 : 368 (368 = 4 × 4 × 23).
: 4
18,855000 : 4
4,713750 : 23 = 0,204945 . . .
121)035
111

2) 439,6 : 408 (408 = 4 × 6 × 17)
: 4
109,9 : 6
18,316667 : 17 = 1,077451
112781

5 Nullen sind im Kopf beim Dividiren durch 6 angehängt, wodurch die Ziffern 16667 entstanden sind.

§ 95.

Enthält ein Quotient nach beendigter Division nicht so viele Ziffern, als der Dividendus Decimalen hat, so werden links so viele Nullen vor den Quotienten gesetzt, bis die Anzahl Decimalen in demselben gleich der des Dividendus ist.

1) 0,320 : 93 = 344 . . .
279 = 0,00344 . . .
410
372
380
372
8

2) 0,896 : 431 = 2078 . . .
862 = 0,002078 . . .
3400
3017
3830
3448
382

Im ersten Beispiel sind 2, im anderen 3 Nullen den Resten angehängt worden, daher der Quotient im ersten Beispiel aus 5, im anderen aus 6 Decimalen bestehen muß.

§ 96.

Soll ein Decimalbruch durch einen Decimalbruch dividirt werden, so verwandelt man den Divisorbruch in eine ganze Zahl, und zwar dadurch, daß man das Komma desselben um so viele Stellen rechts rückt, als er Decimalen hat. Eben so viele Stellen rückt man auch das Komma im Dividendus nach rechts;

hat dieser aber nicht so viele Decimalen, so wird für jede fehlende Stelle eine Null rechts angehängt. Der Divisor und Dividendus sind hierdurch mit einer gleichen Zahl multiplicirt, also nach § 74 (Anmerkung) in ihrem Werthe nicht verändert worden. Nachdem dies geschehen ist, verfährt man wie in § 92 bis 95.

1) 0,0545 : 0,05
= 5,45 : 5
1,09

3) 28,71 : 0,09
= 2871 : 9
319

2) 1559,4012 : 3,78
= 155940,12 : 378
: 9
17326,68 : 7 (: 378)
2475,24 : 6
412,54
(378 ist = 9 × 7 × 6).

§ 97.

Wenn eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch dividirt werden soll, so macht man durch Rücken des Kommas nach rechts den Divisor zu einer ganzen Zahl (§ 96); dem Dividendus werden alsdann rechts so viele Nullen angehängt, als das Komma im Divisor Stellen nach rechts gerückt worden ist.

1) 8 : 0,02
= 800 : 2
400

3) 448 : 0,07
= 44800 : 7
6400

2) 12415 : 3,25
= 1241500 : 325 = 3820
975
2665
2600
650
650

§ 98.

Soll ein Decimalbruch durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt werden, so rückt man das Komma um so viele Stellen links, als die Zahl, mit welcher man dividirt, Nullen hat.

678,54 : 10 = 67,854; 899,45 : 100 = 8,9945.
774,768 : 1000 = 0,774768.

Sind im Dividendus nicht Ziffern genug vorhanden, so werden links so viele Nullen vorgesetzt, als Ziffern fehlen:

3,75 : 1000 = 0,00375; 0,75 : 100 = 0,0075
23,27 : 10000 = 0,002327.

Die Richtigkeit des Verfahrens ergiebt sich aus dem dekadischen Gesetz der Zahlen, wonach jede Stelle rechts 10 mal kleiner ist, als die Stelle links; ist also das Komma eine Stelle links gerückt, so ist die Zahl um 10 mal kleiner, also durch 10 dividirt worden.

§ 99.

Bestehen die zu dividirenden Decimalbrüche aus vielen Ziffern und man will mehrere Decimalen im Quotienten haben, so ist die Division ebenso langwierig wie § 90 die Multiplication. Man kürzt demnach entweder den Divisor nach § 82 ab oder dividirt mittelst Logarithmen nach § 221. Die in manchen Lehrbüchern aufgenommene abgekürzte Division und Multiplication ist unpraktisch und daher hier nicht berücksichtigt worden.

§ 100.

Ist eine mehrfach benannte Zahl durch einen Decimalbruch zu dividiren, so multiplicirt man jede Benennung der benannten Zahl mit dem Nenner des Decimalbruches; dadurch ist nach § 96 der Decimalbruch zu einer ganzen Zahl geworden, mit welcher man nun nach § 39 dividirt. Ist der Divisor größer als die Zahl der größten Benennung, so wird diese zur folgenden niederen Benennung resolvirt. Kleine benannte Zahlen können auch ganz zur niedrigsten Benennung gebracht werden; hierauf wird nach § 23 dividirt.

24 Thlr.	17 Sgr.	5 Pf.	: 5,60;
= 240 „	170 „	50 „	: 56
			: 8
30 „	21 „	$9\frac{1}{4}$	: 7
4 Thlr.	11 Sgr.	$8\frac{5}{28}$ Pf.	

16 Gld.	35 Kr.	$2\frac{3}{4}$ Pf.	: 1,44
= 1600	3500	$200\frac{300}{4}$	: 144
= 1600	3500	275	: 144
			: 8
200	437	$36\frac{3}{8}$	: 6 (8 × 6 × 3 = 144)
33	92	$9\frac{19}{48}$	: 3
11	30	$5\frac{115}{144}$	
= 11 Gld.	31 Kr.	$1\frac{115}{144}$ Pf.	

§ 100 a.

Wenn benannte Zahlen, welche eine decimale Eintheilung haben, wie Hektar, Ar und □Meter — Meter, Centi und Milli — Hekto und Liter — östr. Gulden und Cents — holl. Gulden und Cents — Rubel und Kopeken — Francs und Centimes — Dollar und Cents u. s. w. mit einem Decimalbruch multiplicirt, oder durch denselben dividirt werden sollen, so verwandelt man die benannte Zahl immer in einen Decimalbruch der höchsten Benennung und verfährt dann, wie es im § 87 und 96 gezeigt ist.

1) 8 Hektar 87 Ar 76 □Meter × 3,12 = 8,8776 × 3,12 = 27,698112
= 27 Hektar 69 Ar 81,12 □Meter.

2) 21 Hektar 28 Ar 33,05 □Meter : 6,15 = 21,283305 : 6,15
= 2128,3305 : 6,15 = 3,4607 = 3 Hekt. 46 Ar 7 □Meter.

3) 76 Francs 63 Centimes × 4,18 = 76,63 × 4,18 = 320,3134
= 320 Francs 31,34 Centimes.

4) 61 Francs 72,27 Centimes : 7,63 = 61,7227 : 7,63 = 6172,27 : 763
= 8,09 = 8 Francs 9 Centimes.

(8,09 Francs sind 8 Francs 9 Centimes; 8,9 Frcs. dagegen sind 8 Frcs. 90 Centim., welches man bei dergleichen Zusammenstellungen immer sehr beachten muß.)

C. Verwandeln der Decimalbrüche.

§ 101.

Wenn ein Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden soll, so setzt man den zugehörigen Nenner unter den Decimalbruch und hebt denselben so viel als möglich auf.

$$0{,}50 = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}; \quad 0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}; \quad 7{,}125 = 7\frac{125}{1000} = 7\frac{1}{8}.$$

Soll ein gewöhnlicher Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werden, so dividirt man mit dem Nenner in den Zähler, wobei man diesem oder den Resten so viele Nullen anhängt, als man Decimalstellen haben will. Im Quotienten werden so viele Decimalen abgeschnitten, als man dem Dividendus oder den Resten Nullen angehängt hat.

$\frac{1}{2} = 1{,}0 : 2$
$5 = 0{,}5;$

$\frac{3}{4} = 3{,}00 : 4$
$75 = 0{,}75;$

$\frac{7}{25} = 7{,}00 : 25$
$28 = 0{,}28.$

$\frac{142}{211} = 1420 : 211 = 6729\ldots$
$1266 \qquad = 0{,}6729\ldots$
1540
1477
630
422
2080
1899

D. Von den periodischen Decimalbrüchen.

§ 102.

Oft ereignet es sich, daß bei der Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche die Ziffern im Quotienten in einer gewissen Reihefolge wiederkehren. Man nennt einen solchen Bruch einen periodischen Decimalbruch und jede wiederkehrende Ziffer eine Periode. Kehren mehrere verschiedene Ziffern wieder, so werden auch diese eine Periode genannt: 0,3333; 0,777; 0,272727; 0,351351351.

Die Periode heißt beim ersten Bruch 3, beim zweiten 7, beim dritten 27 und beim vierten 351.

Will man einen solchen periodischen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln, so nimmt man eine Periode heraus und giebt derselben so viele Neunen zum Nenner, als die Periode Ziffern hat.

$$0{,}333 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};\quad 0{,}2727 = \frac{27}{99} = \frac{3}{11};\quad 0{,}351351 = \frac{351}{999} = \frac{13}{37}.$$

Fängt die Periode nicht gleich hinter dem Komma an, z. B. 0,8333, so nennt man diesen Bruch einen unvollständigen oder unreinen periodischen Decimalbruch. Ein solcher wird auf folgende Art in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt: Man nimmt die Ziffer oder, wenn mehrere sind, die Ziffern vor der Periode mit einer oder zwei Perioden heraus, subtrahirt von dieser Zahl die vor der Periode stehende Ziffer (Ziffern) und giebt dem Rest so viele Neunen zum Nenner, als die Periode Ziffern hat, hängt aber diesen Neunen so viele Nullen an, als vor der Periode Ziffern stehen.

$0{,}8333 = 83;$
8
$\frac{75}{90} = \frac{5}{6}$

$0{,}1340909 = 13409;$
134
$\frac{13275}{99000} = \frac{59}{440}$

$0{,}34702702 = 34702$
34
$\frac{34668}{99900} = \frac{321}{925}$

Die Richtigkeit des Verfahrens ergiebt sich daraus, daß die periodischen Decimalbrüche wieder entstehen, wenn man die erhaltenen gewöhnlichen Brüche nach § 101 in Decimalbrüche verwandelt.

E. Resolviren und Reduciren der Decimalbrüche.

§ 103.

Um Decimalbrüche höherer Benennungen zu niederen Benennungen zu resolviren, multiplicirt man mit der Resolutionszahl (§ 26) den Decimalbruch nach § 87.

0,325 Thlr. sind 0,325 × 30 = 9,75 Sgr.; 0,75 Sgr. sind
0,75 × 12 = 9 Pf.; also 0,325 Thlr. = 9 Sgr 9 Pf.

2,373 Ctr. sind 2 Ctr. und 0,373 Ctr.; 0,373 Ctr. × 100 = 37,3 Pfd.;
0,3 Pfd. × 50 = 15 Neulth.
mithin sind 2,373 Ctr. = 2 Ctr. 37 Pfd. 15 Neulth.

1,475 Ballen sind 1 Bll. und 0,475 Bll.; 0,475 Bll. × 10 = 4,75 Rieß;
0,75 Rß. × 20 = 15 Buch; folglich 1,475 Bll. = 1 Bll. 4 Rß. 15 Buch.

Sollen Decimalbrüche oder ganze Zahlen niederer Benennung zu Decimalbrüchen höherer Benennung reducirt werden, so dividirt man mit der Reductionszahl (§ 27) den Decimalbruch nach § 92.

14,25 Sgr. sind 1,425 : 3;
= 0,475 Thlr.

12,36 Liter sind 12,36 : 50
: 5
2,472
: 10
= 0,2472 Neuschffl.

14 Sgr. 8,35 Pf. sind 8,35 : 12;
: 4
2,0875 : 3
= 0,6958

14,6958 Sgr. : 30
= 1,46958 : 3
0,48986 Thlr. = 0,49 Thlr.

11 Pf. sind 11,000 : 360;
= 1,1000 : 36 = 0,03055 Thlr. = 0,03 Thlr.

F. Decimalbrüche in Verbindung mit gewöhnlichen Brüchen.

§ 104.

Sollen Decimalbrüche und gewöhnliche Brüche addirt werden, so muß man, um einen Decimalbruch als Summe zu erzielen, die gewöhnlichen Brüche vor der Addition in Decimalbrüche verwandeln; will man aber einen gewöhnlichen Bruch als Summe erlangen, so hat man die Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche zu verwandeln.

$$4{,}35 + 3\,^4/_5 + 2{,}75 + 6\,^7/_8 + 4{,}25$$
$$= 4{,}35 + 3{,}8 + 2{,}75 + 6{,}875 + 4{,}25 = 22{,}025 \text{ oder}$$
$$= 4\,^7/_{20} + 3\,^4/_5 + 2\,^3/_4 + 6\,^7/_8 + 4\,^1/_4 = 22\,^1/_{40}.$$

§ 105.

Wenn Decimalbrüche von gewöhnlichen Brüchen, oder umgekehrt, gewöhnliche Brüche von Decimalbrüchen subtrahirt werden sollen, so verfährt man wie in § 104, nur daß man hier subtrahirt statt dort addirt.

$$7{,}75 - 4\,^3/_5 = 7{,}75 - 4{,}6 = 3{,}15$$
$$7\,^3/_4 - 4{,}6 = 7\,^3/_4 - 4\,^3/_5 = 3\,^3/_{20}.$$

Soll ein Decimalbruch mit einem gewöhnlichen Bruch, oder umgekehrt, ein gewöhnlicher Bruch mit einem Decimalbruch multiplicirt werden, so multiplicirt man in beiden Fällen den Decimalbruch mit dem Zähler des gewöhnlichen Bruchs und dividirt ihn durch den Nenner desselben. Gewöhnlich dividirt man aber erst und multiplicirt nachher.

$9{,}640 \times {}^7/_8$;	$8{,}355 \times {}^4/_{15}$;	${}^7/_{12} \times 0{,}78564$
: 8	: 3	: 12
$1{,}205 \times 7$	$2{,}785 : 5$	$0{,}06547 \times 7$
$8{,}435$	$0{,}557 \times 4$	$0{,}45829$
	$2{,}228$	

Ist der gewöhnliche Bruch eine gemischte Zahl, so multiplicirt man den Decimalbruch erst mit den Ganzen und dann mit dem Bruch der gemischten Zahl; hierauf werden beide Produkte addirt.

$7{,}375 \times 6^4/_5$;		$24{,}35 \times 16^3/_5$;	
$\times$ 6	$7{,}375 \times {}^4/_5$	$\times$ 16	$24{,}35 \times {}^3/_5$
$44{,}250$	: 5	$389{,}60$	: 5
$5{,}900$ (${}^4/_5$)	$1{,}475 \times 4$	$14{,}61$ (${}^3/_5$)	$4{,}87 \times 3$
$50{,}150$	$5{,}900$	$404{,}21$	$14{,}61$

§ 107.

Ein Decimalbruch wird durch einen gewöhnlichen Bruch dividirt, indem man ihn durch den Zähler des letzteren dividirt und mit dessen Nenner multiplicirt. Ist der Bruch eine gemischte Zahl, so muß diese in einen unechten Bruch verwandelt werden.

$8{,}775 : {}^5/_8$;	$16{,}855 : 3^3/_4$ (${}^{15}/_4$)
: 5	: 5
$1{,}775 \times 8$	$3{,}371 : 3$
$14{,}040$	$1{,}12366 \times 4$
	$4{,}49464$

Ein gewöhnlicher Bruch wird durch einen Decimalbruch dividirt, indem man den letzteren durch Rücken des Kommas zu einer ganzen Zahl macht (§ 97), demnächst den gewöhnlichen Bruch mit einer 1 und so vielen Nullen multiplicirt, als Stellen im Decimalbruch gerückt sind, und nun denselben durch die entstandene ganze Zahl des Divisors dividirt. Ist der gewöhnliche Bruch eine gemischte Zahl und der Nenner derselben geht in 100, 1000 u. s. w. nicht auf, so muß die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt werden.

$${}^7/_8 : 0{,}275 = \frac{7000}{8} : 275 = \frac{7000}{8 \cdot 275} = \frac{7000}{2200} = \frac{70}{22} = 3^2/_{11}.$$

$$3^4/_5 : 2{,}65 = 300^{400}/_5 : 265 = \frac{380}{265} = 1^{23}/_{53}.$$

$$5^4/_7 : 3{,}21 = \frac{3900}{7} : 321 = \frac{1300}{749} = 1^{551}/_{749}.$$

Zweite Abtheilung.

Die angewandten Rechnungsarten.

I. Die einfache Regeldetri.

§ 108.

Die Regeldetri lehrt aus drei gegebenen bekannten Sätzen einen vierten unbekannten Satz finden.

Nach der verschiedenen Art und Stellung der drei gegebenen Sätze sind folgende 3 Hauptfälle der Regeldetri zu unterscheiden:

a) Es ist die Einheit und ihr Werth gegeben; daraus soll der Werth der Mehrheit gefunden werden.

1 Meter kostet 2 Thlr., was kosten 10 Meter?

b) Es ist die Mehrheit und ihr Werth gegeben; daraus soll der Werth der Einheit gefunden werden;

10 Meter kosten 20 Thlr., was kostet ein Meter?

c) Es ist eine Mehrheit und ihr Werth gegeben; daraus soll der Werth einer anderen Mehrheit gefunden werden:

4 Meter kosten 8 Thlr., was kosten 10 Meter?

Betrachtet man die drei Sätze bei jedem dieser 3 Fälle, so sieht man, daß immer zwei Sätze eine gleiche Benennung (Meter) haben, der dritte Satz aber eine andere Benennung (Thaler) hat. Dieser Satz, der also keine gleiche Benennung mit den anderen beiden Sätzen hat, wird der Hauptsatz genannt, weil er dem 4ten zu suchenden Satz die Benennung giebt und beim Ansatz immer vorn (links) zu stehen kommt. Die anderen beiden Sätze (Nebensätze) müssen nicht allein eine gleichartige, sondern auch eine ganz gleiche Benennung haben. Sind die Benennungen nur gleichartig, als: 1 Liter kostet 4 Sgr., was kosten 3 Neuscheffel? so müssen die Neuscheffel zu Liter resolvirt werden, und in der Aufgabe: 1 Neuscheffel kostet $1^1/_2$ Thlr., was kosten 3 Neuscheffel 12 Liter? müssen entweder die Neuscheffel zu Liter resolvirt oder die Liter zu einem Neuscheffelbruch reducirt werden.

Da jeder der vorstehenden 3 Fälle der Regeldetri eine andere Behandlung erfordert, so sind sie im Folgenden getrennt worden.

1) Es ist die Einheit und ihr Werth gegeben; es soll daraus der Werth der Mehrheit gefunden werden.

§ 109.

Wenn die Einheit (1 Meter) und ihr Werth 2 Thlr. gegeben ist, so ist leicht einzusehen, daß dann zwei Meter 2 mal 2 Thlr. = 4 Thlr., 3 Meter 3 mal 2 Thlr. = 6 Thlr., 4 Meter 4 mal 2 Thlr. = 8 Thlr. u. s. w. kosten. Also: Ist die Einheit und ihr Werth gegeben, so findet man den Werth der Mehrheit, wenn man den Hauptsatz mit der unbenannten Zahl des anderen Satzes multiplicirt.

1 Meter kostet 5 Sgr., was kosten 16 Meter? (5 Sgr. Hauptsatz);

also 5 Sgr. × 16 = 80 Sgr. = 2 Thlr. 20 Sgr.

Da in diesem der drei Fälle der Regeldetri immer nur das Multipliciren vorkommt, so wird derselbe auch die Multiplications-Regeldetri genannt.

Die Grundregel, wie die Multiplications-Regeldetri gerechnet werden muß, ist die vorhin gegebene. Sache des Rechners ist es aber, in allen Verfahrungsweisen des Multiplicirens, wie sie in § 18, 35, 70 und 72 ausgeführt sind, gut bewandert zu sein, um schnell beurtheilen zu können, welchen Weg er einzuschlagen hat, um am kürzesten zum Ziele zu gelangen.

Die folgenden Beispiele enthalten ziemlich alle Multiplicationsmethoden; auch ist die bereits § 70 angewandte Zerlegungs- oder Zerstreuungsmethode (wälsche Praktik) in Anwendung gekommen, obgleich es nicht anzurathen, der letzteren Methode eine große Ausdehnung zu geben, wenn sie auch in mehreren, besonders in kaufmännischen Rechenlehrbüchern sehr empfohlen wird. Einmal lassen sich die nach derselben bequem zu rechnenden Aufgaben in anderer Weise oft noch leichter rechnen, wie aus den nachstehenden Beispielen 18 und 19 ersichtlich ist; ferner gestattet sie Irrthümern leichten Eingang, ist langwierig beim Vorkommen vieler Brüche und ungenau, wenn man diese Brüche außer Acht läßt.

In den ersten beiden der folgenden Beispiele ist auch die Methode, mit Zehnern und Einern zu rechnen, gezeigt, welche in Aufgaben, wo Silbergroschen, Neugroschen, Kreuzer, überhaupt Münzsorten, deren Reductionszahl hinten eine Null hat, vorkommen, oft recht vortheilhafte Anwendung findet, indem man die Zehner nur durch 3 zu dividiren nöthig hat, um Thaler, und durch 6, um Gulden zu erhalten.

1) 1 Meter kostet 14 Sgr., was kosten 64 Meter?
(14 Sgr. Hauptsatz.)

14 Sgr. × 64
896 Sgr. : 30
29 Thlr. 26 Sgr.

oder:

14 Sgr. = $\frac{1}{2}$ Thlr. — 1 Sgr.;
$\frac{64}{2}$ Thlr. = 32 Thlr.
64 Sgr. = 2 Thlr. 4 Sgr.
29 Thlr. 26 Sgr.

oder:

64 Sgr. = 2 Thlr. 4 Sgr.
14 × 2 Thlr. = 28 Thlr.
14 × 4 Sgr. = 1 Thlr. 26 Sgr.
29 Thlr. 26 Sgr.

oder:

64 × 4 Einer = 25 Zehner + 6 Einer
64 × 1 Zehner = 64 Zehner

89 Zehner = $^{89}/_{3}$ Thlr. = 29 Thlr. 20 Sgr.
dazu 6 Einer = 6 „

29 Thlr. 26 Sgr.

2) 1 Neuloth kostet 28 Kreuzer; was kosten 1 Pfund 26 Neuloth? (1 Pfund 26 Neuloth = 76 Neuloth; 28 Kreuzer Hauptsatz.)

28 Kr. × 76 × 7
532 × 4
2128 Kr. : 60
35 Gld. 28 Kr.

oder:

28 Kr. = $^{1}/_{2}$ Gld. — 2 Kr.
76 × $^{1}/_{2}$ Gld. = 38 Gld.
76 × 2 Kr. = 2 Gld. 32 Kr.

35 Gld. 28 Kr.

oder:

76 Kr. = $1^{1}/_{4}$ Gld. + 1 Kr.
28 × $1^{1}/_{4}$ Gld. = 35 Gld.
28 × 1 Kr. = 28 Kr.

35 Gld. 28 Kr.

oder:

76 × 8 Einer = 60 Zehner + 8 Einer
76 × 2 Zehner = 152 Zehner

212 Zehner = $^{212}/_{6}$ Guld. = 35 Guld. 20 Kr.
dazu 8 Einer = 8 „

35 Guld. 28 Kr.

3) Für 1 Rubel kauft man 5 Pfund; wie viele Pfund kauft man für $27^{4}/_{5}$ Rubel? (5 Pfund Hauptsatz.)

5 Pfund × $27^{4}/_{5}$
139 Pfund.

4) Für 1 Liter giebt man $^{5}/_{8}$ Thlr; was wird man für 2 Hekto 37 Liter zahlen müssen? (2 Hekto 37 Liter = 237 Liter.)

$^{5}/_{8}$ Thlr. × 237
: 8
$29^{5}/_{8}$ × 5
$148^{1}/_{8}$ Thlr.

5) Man erhält 1 Ctr. für $29^{2}/_{7}$ Thlr., was giebt man für $2^{5}/_{6}$ Ctr.?

$29^{2}/_{7}$ Thlr. × $2^{5}/_{6}$ ($2^{5}/_{6}$ Ctr. = 3 Ctr. — $^{1}/_{6}$ Ctr.)
× 3
$87^{6}/_{7}$ Thlr. für 3 Ctr.
$4^{37}/_{42}$ Thlr. für $^{1}/_{6}$ Ctr.
$82^{41}/_{42}$ Thlr.

6) Wenn 1 Hekto 27 Thlr. 16 Sgr. 7 Pf. kostet, was werden dann $^{7}/_{12}$ Hekto kosten? (27 Thlr. 16 Sgr. 7 Pf. Hauptsatz.)

27 Thlr. 16 Sgr. 7 Pf. × $^{7}/_{12}$
: 12
2 „ 8 „ $10^{7}/_{12}$ × 7
16 Thlr. 2 Sgr. $2^{1}/_{12}$ Pf.

7) Was kosten $8^2/_7$ Groß, wenn man 1 Groß für 17 Thlr. 9 Sgr. 4 Pf. kauft?

17 Thlr.	9 Sgr.	4 Pf.	$\times\ 8^2/_7$.	
			$\times$ 8	
138 „	14 „	8 „		
4 „	28 „	$4^4/_7$ „	($\times\ ^2/_7$)	
143 Thlr.	13 Sgr.	$^4/_7$ Pf.		

17 Thlr.	9 Sgr.	4 Pf.	: 7
2 „	14 „	$2^2/_7$	$\times$ 2
4 Thlr.	28 Sgr.	$4^4/_7$ Pf.	

8) 1 Schock kostet 18 Thlr. 11 Sgr. 7 Pf., was kosten $7^7/_{12}$ Schock?

18 Thlr.	11 Sgr.	7 Pf.	$\times\ 7^7/_{12}$.
			$\times$ 7
128 „	21 „	1 „	: 12
10 „	21 „	$9^1/_{12}$	
139 Thlr.	12 Sgr.	$10^1/_{12}$ Pf.	

Da hier der Zähler des Bruches gleich der ganzen Zahl ist, so konnte gleich mit 12 in das Produkt von 7 dividirt werden, um den Werth für $^7/_{12}$ zu erhalten.

9) Für einen Ballen zahlt man 42 Thlr. 27 Sgr. 3 Pf., was wird man für $41^7/_8$ Ballen zahlen müssen?

42 Thlr.	27 Sgr.	3 Pf.	$\times\ 41^7/_8$.
			$\times$ 6 } $\times$ 42
257 „	13 „	6 „	$\times$ 7 }
1802 „	4 „	6 „	
5 „	10 „	$10^7/_8$ „	($\times\ ^1/_8$)
1796 Thlr.	23 Sgr.	$7^1/_8$ Pf.	

($41^7/_8 = 42 - {}^1/_8$.)

42 Thlr.	27 Sgr.	3 Pf.	: 8
5 Thlr.	10 Sgr.	$10^7/_8$ Pf.	

10) Man kauft 1 Zimmer für 54 Thlr. 13 Ngr. 7 Pf., was zahlt man für $43^1/_2$ Zimmer?

54 Thlr.	13 Ngr.	7 Pf.	$\times\ 43^1/_2$
			$\times$ 7
381 „	5 „	9 „	$\times$ 6
2287 „	5 „	4 „	für 42 Zimmer
54 „	13 „	7 „	für 1 Zimmer
27 „	6 „	$8^1/_2$	für $^1/_2$ Zimmer.
2368 Thlr.	25 Ngr.	$9^1/_2$ Pf.	

($43^1/_2 = 42 + 1 + {}^1/_2$).

11) 1 Dutzend kostet 2 Thlr. 3 Sgr. 5 Pf., was kosten 4 Groß?

(4 Groß = 48 Dutzend; 2 Thlr. 3 Sgr. 5 Pf. = 2 Thlr. 2 Sgr. 6 Pf. + 11 Pf. = $2^1/_{12}$ Thlr. + 11 Pf.)

48 $\times\ 2^1/_{12}$ Thlr. =	100 Thlr.
48 $\times$ 11 Pf. = 44 Sgr. =	1 Thlr. 14 Sgr.
	101 Thlr. 14 Sgr.

12) 1 Liter kostet 7 Sgr. $5^2/_3$ Pf., was kosten 6 Hekto 56 Liter?

(6 Hekto 56 Liter = 656 Liter; 7 Sgr. $5^2/_3$ Pf. = $7^1/_2$ Sgr. — $^1/_3$ Pf. = $^1/_4$ Thlr. — $^1/_3$ Pf.)

656 $\times\ ^1/_4$ Thlr. = $^{656}/_4$ =	164 Thlr.
$^{656}/_3$ Pf. = $218^2/_3$ Pf. =	— „ 18 Sgr. $2^2/_3$ Pf.
	163 Thlr. 11 Sgr. $9^1/_3$ Pf.

13) Was hat man für $124\frac{3}{4}$ Ctr. zu bezahlen, wenn 1 Ctr. 35 Mark 13 Schillinge kostet?

35 Mrk. 13 Schill. $\times$ $124\frac{3}{4}$ (35 Mrk. 13 Schill. = 36 Mrk. — 3 Schll.
= 36 Mrk. — $\frac{3}{16}$ Mk.)

$\times 6$
$748\frac{1}{2} \times 6$
4491 M.
23 M. 6 Sch. 3 Pf.
4467 M. 9 Sch. 9 Pf.

$124\frac{3}{4} : 4$
$31\frac{3}{16} : 4$ } $\frac{3}{16}$ Mark.
$7\frac{51}{64} \times 3$
$23\frac{25}{64}$ M. = 23 M. 6 Sch. 3 Pf.

14) 1 Ballen kostet 34 Thlr. 13 Sgr. 7 Pf., was kosten $\frac{7}{8}$ Ballen?
($\frac{7}{8}$ Ballen = $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ Ballen.)

34 Thlr. 13 Sgr. 7 Pf. : 2
17 „ 6 „ $9\frac{1}{2}$ für $\frac{1}{2}$ Ballen
8 „ 18 „ $4\frac{3}{4}$ für $\frac{1}{4}$ „ (voriges Produkt durch 2 dividirt.)
4 „ 9 „ $2\frac{3}{8}$ für $\frac{1}{8}$ „ „ „ „ 2 „
30 Thlr. 4 Sgr. $4\frac{5}{8}$ Pf.

oder:

34 Thlr. 13 Sgr. 7 Pf. : 8
4 „ 9 „ $2\frac{3}{8} \times 7$
30 Thlr. 4 Sgr. $4\frac{5}{8}$ Pf.

oder:

34 Thlr. 13 Sgr. 7 Pf. : 8 = 1 Ballen.
4 „ 9 „ $2\frac{3}{8}$ = $\frac{7}{8}$ „
30 Thlr. 4 Sgr. $4\frac{5}{8}$ Pf.

15) Was kosten 5 Hekto 67 Liter, wenn 1 Liter 21 Sgr. 9 Pf. kostet?
(5 Hekto 67 Liter = 567 Liter.)

21 Sgr. 9 Pf. = $\frac{1}{2}$ Thlr. + $\frac{1}{6}$ Thlr. + $\frac{1}{30}$ Thlr. + $\frac{1}{60}$ Thlr. + $\frac{1}{120}$ Thlr.

567 : 2 = 283 Thlr. 15 Sgr. für $\frac{1}{2}$ Thlr.
94 „ 15 „ „ $\frac{1}{6}$ „ (voriges Produkt durch 3 dividirt.
18 „ 27 „ „ $\frac{1}{30}$ „ „ 5 „
9 „ 13 „ 6 Pf. $\frac{1}{60}$ „ „ 2 „
4 „ 21 „ 9 Pf. $\frac{1}{120}$ „ „ 2 „
411 Thlr. 2 Sgr. 3 Pf.

oder:

21 Sgr. 9 Pf. $\times$ 567
$\times 21$
11907 Sgr.
425 Sgr. 3 Pf.
12332 Sgr. 3 Pf.
= 411 Thlr. 2 Sgr. 3 Pf.

567 : 4
$141\frac{3}{4} \times 3$ } $\frac{3}{4}$ Sgr. = 9 Pf
$425\frac{1}{4}$ Sgr.

oder:

21 Sgr. 9 Pf. $\times$ 567
$\times 7$
5 Thlr. 2 Sgr. 3 Pf. $\times 8$ (1 Stelle links) § 18 r.
40 16 24
405 162 243
= 411 Thlr. 2 Sgr. 3 Pf.

16) 1 Groß kostet 15 Thlr. 13 Sgr. 5 Pf., was kosten 511 Groß?

15 Thlr.	13 Sgr.	5 Pf. × 511	(1 mal Multiplicandus)
15	13	5	(10 mal ")
77	7	1	(500 mal ")
7865	843	155	

= 7893 Thlr. 15 Sgr. 11 Pf.

17) Man erhält 1 Meter Tuch für 2 Thlr. 18 Sgr 6 Pf., was muß man für 297 Meter zahlen?

2 Thlr.	18 Sgr.	6 Pf. × 297	(297 = 300 — 3)
		× 3	
7 "	25 "	6 " × 10	
78 "	15 "	— " × 10	
785 "	— "	— "	
7 "	25 "	6 "	für 3 Meter.
777 Thlr.	4 Sgr.	6 Pf.	

18) Wenn 24 Thlr. 16 Sgr. $8\frac{1}{5}$ Pf. für einen Centner berechnet sind, was werden danach 175 Ctr. kosten?

24 Thlr.	16 Sgr.	$8\frac{1}{5}$ Pf.	× 175 (175 = 100 × $\frac{7}{4}$).
			× 7
171 "	26 "	$9\frac{2}{5}$ "	× 10
1718 "	27 "	10 "	× 10
17189 "	8 "	4 "	: 4
4297 Thlr.	9 Sgr.	7 Pf.	

19) 1 Centner kostet 57 Thlr. 18 Sgr. 7 Pf., was kosten $83\frac{1}{3}$ Centner?

57 Thlr.	18 Sgr.	7 Pf.	× $83\frac{1}{3}$ ($83\frac{1}{3}$ ist $\frac{5}{6}$ von 100).
			: 6
9 "	18 "	$1\frac{1}{6}$	× 5
48 "	— "	$5\frac{5}{6}$	× 10
480 "	4 "	$10\frac{1}{3}$	× 10
4801 Thlr.	18 Sgr.	$7\frac{1}{3}$ Pf.	

20) Ein Pfund kostet 1 Thlr. 23 Sgr. 7 Pf., was kostet 1 Centner 57 Pfund?

(1 Centner 57 Pfund = 157 Pfund)

	1 Thlr.	23 Sgr.	7 Pf.	
157 × 1 Thlr. =	157 "			157 Sgr. = 5 Thlr. 7 Sgr.
23 × 5 Thlr. 7 Sgr. =	115 "	161 "	— "	157 Pf. = 13 Sgr. 1 Pf.
7 × 13 Sgr. 1 Pf. =		91 "	7 "	§ 35 f. 3.
	272 Thlr.	252 Sgr.	7 Pf.	
	= 280 Thlr.	12 Sgr.	7 Pf.	

21) Wenn man für 1 Ar 19 Thlr. 13 Sgr. 7 Pf. bezahlt, was wird man für 7,28 Ar zahlen müssen?

19 Thlr. 13 Sgr. 7 Pf. × 7,28 (7,28 = 728 : 100)
× 7 — 7 in 28 = 4.
136 „ 5 „ 1 „ × 4
544 „ 20 „ 04 „ (2 Stellen rechts) § 18 r.
14144 „ 520 „ 104 „ : 10
1414 „ 64 „ $10^2/_5$: 10
141 Thlr. 18 Sgr. $5^{21}/_{25}$ Pf.

22) Jemand kauft $6^3/_4$ Ballen Papier und zahlt für den Ballen 24 Thlr.; der Transport macht 1 Thlr. 5 Sgr., andere Unkosten betragen 1 Thlr. 20 Sgr. für den Ballen; wenn er noch an jedem Ballen 4 Thlr. verdienen will, zu welchem Preise muß er die $6^3/_4$ Ballen verkaufen?

24 Thlr. + 1 Thlr. 5 Sgr. + 1 Thlr 20 Sgr. + 4 Thlr. = 30 Thlr. 25 Sgr. = $30^5/_6$ Thlr. kostet der Ballen im Verkauf.

$30^5/_6$ Thlr. × $6^3/_4$ ($6^3/_4 = 7 - {}^1/_4$)
× 7
$215^5/_6$ | $30^5/_6$: 4
$7^{17}/_{24}$ ($^1/_4$) | $7^{17}/_{24}$
$208^1/_8$ Thlr.

23) Es kauft Jemand 3 Fässer Zucker, welche zusammen 3 Ctr. 75 Pfd. wiegen: im 1sten Faß sind 1 Ctr. 23 Pfd., wovon das Pfund 8 Sgr. kostet; im 2ten Faß sind 1 Ctr. $20^1/_2$ Pfd., das Pfund zu $7^1/_2$ Sgr.; vom 3ten Faß kostet das Pfund 7 Sgr. Was kosten die 3 Fässer zusammen?

Die 3 Fässer wiegen 3 Ctr. 75 Pfund.
Das 1ste Faß 1 Ctr. 23 Pfd. (§ 35 f. 3.)
Das 2te Faß 1 Ctr. $20^1/_2$ Pfd.
2 Ctr. $43^1/_2$ Pfd.
Das 3te Faß wiegt also 1 Ctr. $31^1/_2$ Pfd.

1stes Faß: 123 Sgr. sind 4 Thlr. 3 Sgr. × 8 = 32 Thlr. 24 Sgr.
2tes Faß: $120^1/_2$ Pfd. à $^1/_4$ Thlr. = 30 „ 3 „ 9 Pf.
3tes Faß: $131^1/_2$ Sgr. = 4 Thlr. 11 Sgr. 6 Pf. × 7 = 30 „ 20 „ 6 „
93 Thlr. 18 Sgr. 3 Pf.

2) Die Mehrheit und ihr Werth ist gegeben; es soll der Werth der Einheit gesucht werden.

§ 110.

Wenn 2 Pfd. einer Waare 4 Sgr. kosten, so kostet 1 Pfd. 2 Sgr., also 4 Sgr. : 2; und wenn 3 Meter Zeug 6 Thlr. kosten, so kostet 1 Meter 2 Thlr., also 6 Thlr. : 3.

Wenn folglich der Werth der Mehrheit gegeben ist, so findet man den Werth der Einheit, wenn man den Hauptsatz (§ 108) durch die unbenannte Zahl des anderen gegebenen Satzes dividirt.

Da bei dieser Art der Regeldetri nur die Division vorkommt, so wird dieselbe auch die Divisions-Regeldetri genannt.

In den folgenden Beispielen sind die zweckmäßigsten Divisionsmethoden auf Grund der Paragraphen 23, 37 bis 39, 71 und 73 in Anwendung gebracht.

1) 8 Ctr. kosten 106 Thlr., was kostet 1 Ctr.? (106 Thlr. Hauptsatz.)

106 Thlr. : 8
$13\frac{1}{4}$ Thlr.
= 13 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf.

2) 50 Friedrichsd'or werden für 282 Thlr. 2 Sgr. 6 Pf. eingewechselt, wie hoch ist ein Friedrichsd'or gerechnet?

(282 Thlr. 2 Sgr. 6 Pf. Hauptsatz.)

282 Thlr. 2 Sgr. 6 Pf. : 50
: 10
28 „ 6 „ 3 „ : 5
5 Thlr. 19 Sgr. 3 Pf.

3) Für 13 Thlr. 2 Sgr. 6 Pf. kauft man 3 Pfund 7 Neuloth; was kostet 1 Neuloth?

3 Pfund 7 Neuloth = 157 Neuloth.

13 Thaler 2 Sgr. 6 Pf. : 157 = 2 Sgr. 6 Pf.
390 Sgr. 390 936
392 942
314 942
78
= 936 Pf.

4) Es werden 170 Thlr. 15 Sgr. 6 Pf. an 78 Arbeiter gezahlt, wieviel erhält 1 Arbeiter?

170 Thlr. 15 Sgr. 6 Pf. : 78 (78 = 2 × 39)
: 2
85 7 9 : 39 = 2 Thlr. 5 Sgr. 7 Pf.
78 217 273
7 195 273
210 Sgr. 22
264 Pf.

5) $^{5}/_{12}$ Schock kosten 12 Thlr. 13 Sgr. 9 Pf., was kostet 1 Schock?

12 Thlr. 13 Sgr. 9 Pf. : $^{5}/_{12}$
: 5
2 „ 14 „ 9 „ × 3
7 „ 14 „ 3 „ × 4
29 Thlr. 27 Sgr. — Pf.

6) Wenn $^{27}/_{31}$ Ctr. mit 13 Thlr. 4 Sgr. 5 Pf. berechnet sind, wieviel macht dies auf den Centner?

13 Thlr. 4 Sgr. 5 Pf. : $^{27}/_{31}$ = × $^{31}/_{27}$ ($^{31}/_{27}$ = 1 + $^{4}/_{27}$)
1 „ 28 „ $5^{5}/_{27}$
15 Thlr. 2 Sgr. $10^{5}/_{27}$ Pf.

13 Thlr. 4 Sgr. 5 Pf. : 9
1 „ 13 „ $9^{8}/_{9}$: 3
— „ 14 „ $7^{8}/_{27}$ × 4
(× $^{4}/_{27}$)
1 Thlr. 28 Sgr. $5^{5}/_{27}$ Pf.

7) Für $5^3/_8$ Thaler kauft man 91 Pfund 38 Neuloth 1 Gramm; wieviel für 1 Thaler?

91 Pfund 38 Neuloth 1 Gramm : $^{43}/_8$ ($5^3/_8 = {}^{43}/_8$)
86 | 250 | 300 | : 43 = 2 Pfd. 6 Nlth. 7 Gr. × 8
5 Pfd. | 288 | 301 | 17 Pfd. 3 Nlth. 6 Grm.
= 250 Nlth. | 258 | 301
30 Nlth.
= 300 Gramm.

8) $29^1/_4$ Liter kosten 4 Thaler $11^5/_8$ Sgr.; was kostet 1 Liter?

$29^1/_4$ Liter = $^{117}/_4$ Liter

4 Thlr. $11^5/_8$ Sgr. = $4^{93}/_{240}$ Thlr. = $4^{31}/_{80}$ Thlr. = $^{351}/_{80}$ Thlr.

$$\frac{351}{80}\text{ Thlr.} : \frac{117}{4} = \frac{351 \times 4}{80 \times 117} = {}^3/_{20}\text{ Thlr.} = 4^1/_2\text{ Sgr.}$$

9) $6^1/_4$ Hekto kosten 1365 Gld. 57 Kr. 2 Pf.; was kostet 1 Liter?

$6^1/_4$ Hekto = 625 Liter
1365 Gld. 57 Kr. 2 Pf. : 625 (625 = 5000 : 8)
: 5
273 „ 11 „ 2 „ × 8 (Verfahren umgekehrt wie in § 18 t.)
2185 Gld. 32 Kr. : 1000
2 Gld. 11,132 Kr. = 2 Gld. 11 Kr. 1,584 Pf.

10) $8^1/_3$ Centner kosten 98 Thlr. 13 Sgr. 5 Pf.; was kostet das Pfund?

$8^1/_3$ Centner = $833^1/_3$ Pfund
98 Thlr. 13 Sgr. 5 Pf. : $833^1/_3$ ($833^1/_3$ ist $^5/_6$ von 1000) § 65 u. 73.
: 5
19 „ 20 „ $8^1/_5$ „ × 6
118 „ 4 „ $1^1/_5$ „ : 1000
3 Sgr. $6^{1323}/_{2500}$ Pf.

11) 7,28 Quadrat-Meter sind mit 141 Thlr. 18 Sgr. $5^{21}/_{25}$ Pf. berechnet worden; was kostet 1 Quadrat-Meter?

14100 Thlr. | 1800 Sgr. | 584 Pf. : 728 = 19 Thlr. 13 Sgr. 7 Pf.
728 | 8040 | 4512
6820 | 9840 | 5096
6552 | 7280 | 5096 ($5^{21}/_{25} \times 100 = 500^{2100}/_{25}$
268 | 2560 | = 584 Pf.)
= 8040 Sgr. | 2184
376
= 4512 Pf.

12) Ein Tabackshändler kauft 3 Ctr. Taback zu 34 Thlr., 33 Thlr. und $32^1/_6$ Thlr. den Centner; was kostet ihm das Pfund von diesem Taback?

300 Pfd. kosten 99 Thlr. 5 Sgr., was kostet 1 Pfd.?

99 Thlr. 5 Sgr. : 300

: 10

9 „ 27 „ 6 Pf. : 3

3 „ 9 „ 2 „ : 10

9 Sgr. 11 Pf.

13) Ein Weinhändler kauft $1^4/_5$ Hekto Wein (180 Liter) und zahlt dafür 81 Thlr. 20 Sgr.; er gießt 20 Liter Wasser hinzu, was kostet nun das Liter?

$81^2/_3$ Thlr. : 200

$$= \frac{245}{3 \,.\, 200} = \frac{49}{120} \text{ Thlr.} = \frac{49 \,.\, 30}{120} \text{ Sgr.} = \frac{49}{4} \text{ Sgr.} = 12^1/_4 \text{ Sgr.}$$

14) Es kauft Jemand 130 junge Bäume für 51 Thlr. 9 Sgr. und pflanzt sie in seinen Park; 16 Bäume gehen aus, was kostet ihm der Baum?

51 Thlr. 9 Sgr. = 1539 Sgr. : 114 (130 — 16 = 114)

$13^{57}/_{114}$ Sgr. = 13 Sgr. 6 Pf.

15) Jemand kauft 2 Fässer Zucker für 67 Thlr. 5 Sgr.; das eine Faß enthält 125 Pfd., das andere 135 Pfd.; für das erste Faß sind 32 Thlr. 8 Sgr. 9 Pf. gerechnet. Was kostet 1 Pfd. des zweiten Fasses?

Das zweite Faß kostet 67 Thlr. 5 Sgr. — 32 Thlr. 8 Sgr. 9 Pf.
= 34 Thlr. 26 Sgr. 3 Pf.

34 Thlr. 26 Sgr. 3 Pf. : 135 (135 = 3 × 5 × 9)

: 3

11 „ 18 „ 9 „ : 5

2 „ 9 „ 9 „ : 9

7 Sgr. 9 Pf.

3) Es ist eine Mehrheit und ihr Werth gegeben; es soll daraus der Werth einer anderen Mehrheit gefunden werden.

§ 111.

Ist die Aufgabe gegeben: 4 Meter Tuch kosten 9 Thlr., was kosten 22 Meter? so kann dieselbe in 2 Theile zerlegt werden, nämlich in: 4 Meter Tuch kosten 9 Thlr., was kostet 1 Meter? worauf die Antwort nach § 110 ist: 9 Thlr. : 4 = $^9/_4$ Thlr. = $2^1/_4$ Thlr. und 1 Meter kostet $2^1/_4$ Thlr., was kosten 22 Meter? worauf die Antwort nach § 109 ist: $2^1/_4$ Thlr. × 22 = $49^1/_2$ Thlr.

Daraus geht hervor: Sind 3 Sätze gegeben, von denen keiner die Einheit ist, so findet man den 4ten Satz, wenn man den Hauptsatz (§ 108) durch seinen zugehörigen Mehrheitssatz dividirt und mit dem anderen Mehrheitssatz multiplicirt.

Da es aber zu störend sein würde, jedesmal zu untersuchen, welcher Mehrheitssatz multiplicirt oder dividirt, wohl aber augenblicklich aus der Aufgabe zu ersehen ist, ob der zu suchende 4te Satz größer oder kleiner als der Hauptsatz sein muß, so ist folgende Regel für diesen 3ten Fall der Regeldetri als Norm zu nehmen:

Man beurtheile aus der Aufgabe, ob man **mehr** oder **weniger**, als der Hauptsatz beträgt, für den zu suchenden 4ten Satz erhalten muß; bei **mehr** multiplicirt man mit der **größeren** und dividirt durch die kleinere Zahl der beiden Nebensätze (§ 108), bei **weniger** multiplicirt man mit der **kleineren** und dividirt durch die **größere** Zahl dieser beiden Sätze.

Man schreibt den Hauptsatz zuerst über einen Strich, neben ihn die multiplicirende und unter den Strich die dividirende Zahl. Der dadurch entstehende Bruchansatz wird nun wie jeder andere Bruch behandelt, namentlich so viel wie möglich im Zähler und Nenner desselben aufgehoben.

Man pflegt diese Art der Regeldetri, wenn man sie von den vorigen beiden Arten unterscheiden will, auch wohl die wirkliche Regeldetri zu nennen.

1) 4 Meter kosten 9 Thaler, was kosten 22 Meter?

(Hauptsatz 9 Thlr. Je mehr Meter gekauft werden, je mehr Thaler kosten sie; also die größere Zahl 22 multiplicirt.)

$$\frac{9 \text{ Thlr.} \times 22}{4} = \frac{99}{2} = 49\,^1/_2 \text{ Thaler.}$$

2) Für 32 Neuscheffel werden 24 Thlr. gezahlt, was werden 7 Neuscheffel kosten?

(Hauptsatz 24 Thlr. Je weniger Neuscheffel gekauft werden, je weniger Thaler kosten sie; also die kleinere Zahl 7 multiplicirt.)

$$\frac{24 \text{ Thlr.} \times 7}{32} = \frac{21}{4} = 5\,^1/_4 \text{ Thlr.}$$

3) Wenn man $3\,^1/_2$ Hekto für $26\,^2/_5$ Thlr. kauft, was kosten 21 Hekto?

$$\frac{26\,^2/_5 \text{ Thlr.} \,.\, 21}{3\,^1/_2} = \frac{132 \,.\, 2 \,.\, 21}{5 \,.\, 7} = \frac{792}{5} = 158\,^2/_5 \text{ Thlr.}$$

4) 5 Arbeiter verdienen wöchentlich $21\,^1/_4$ Thaler, wie viele Arbeiter zu gleichem Lohn kann man für $59\,^1/_2$ Thlr. anstellen?

$$\frac{5 \text{ Arb.} \,.\, 59\,^1/_2}{21\,^1/_4} = \frac{5 \,.\, 119 \,.\, 4}{2 \,.\, 85} = \frac{238}{17} = 14 \text{ Arbeiter.}$$

5) Man kauft für $26\,^2/_3$ Gulden $3\,^3/_4$ Meter, wieviel muß man für $7\,^3/_4$ Meter zahlen?

$$\frac{26\,^2/_3 \text{ Gld.} \,.\, 7\,^3/_4}{3\,^3/_4} = \frac{80 \,.\, 31 \,.\, 4}{3 \quad 4 \quad 15} = \frac{496}{9} = 55\,^1/_9 \text{ Gulden.}$$

6) $8\,^2/_3$ Meter kosten $15\,^3/_4$ Thlr., wie viele Meter kauft man für $85\,^7/_8$ Thlr.?

$$\frac{8\,^2/_3 \,.\, 85\,^7/_8}{15\,^3/_4} = \frac{26 \,.\, 687 \,.\, 4}{3 \quad 8 \quad 63} = \frac{2977}{63} = \frac{330\,^7/_9}{7} = 47\,^{16}/_{63} \text{ Meter.}$$

Der Nenner 63 ist in 7×9 zerlegt gedacht und zuerst mit 9 im Kopfe in 2977 dividirt; nachher ebenso mit 7 in $330\,^7/_9$.

7) $^3/_8$ Ctr. kosten 11 Thlr. 26 Sgr. 3 Pf., was kosten $3\,^3/_4$ Ctr.?

$$\frac{11 \text{ Thlr. } 26 \text{ Sgr. } 3 \text{ Pf.} \times {}^{15}/_4}{^3/_8} = \frac{11 \text{ Thlr. } 26 \text{ Sgr. } 3 \text{ Pf.} \times {}^{15}/_4 \times {}^8/_3}{\times 10 \qquad 118 \text{ Thlr. } 22 \text{ Sgr. } 6 \text{ Pf.}} \quad ({}^{15}/_4 \times {}^8/_3 = 10.)$$

8) Für 14 Thlr. 16 Sgr. 6 Pf. kauft man $^3/_5$ Ballen, was giebt man für $4^2/_3$ Ballen?

$\frac{14 \text{ Thlr. } 19 \text{ Sgr. } 6 \text{ Pf.} \times {}^{14}/_3}{{}^3/_5} = 14$ Thlr. 16 Sgr. 6 Pf. $\times$ $^{70}/_9$ $\left(\frac{14}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{70}{9}\right)$

14 Thlr.	16 Sgr.	6 Pf.	$\times$ $^{70}/_9$	: 9
1 "	18 "	6 "		$\times$ 10
16 "	5 "	— "		$\times$ 7
113 Thlr.	5 Sgr.			

9) Wenn $^4/_7$ Ctr. 28 Thlr. 19 Sgr. 4 Pf. kosten, was kosten $6^1/_2$ Ctr.?

$\frac{28 \text{ Thlr. } 19 \text{ Sgr. } 4 \text{ Pf.} \times {}^{13}/_2}{{}^4/_7} = 28$ Thlr. 19 Sgr. 4 Pf. $\times$ $^{91}/_8$ $\left(\frac{13}{2} : \frac{4}{7} = \frac{91}{8}\right)$

28 Thlr.	19 Sgr.	4 Pf.	$\times$ $^{91}/_8$	: 8
3 "	17 "	5 "	$\times$ 10	$^{90}/_8$
35 "	24 "	2 "	$\times$ 9	
322 "	7 "	6 "		
3 "	17 "	5 "	+ $^1/_8$	
325 Thlr.	24 Sgr.	11 Pf.		

10) Für einen Wechsel über 300 Mark Banco soll Tuch, das Meter zu 5 Mark $13^1/_3$ Schill. gekauft werden, wie viele Meter erhält man?

(5 Mrk. $13^1/_3$ Schill. = $5^5/_6$ Mrk. = $^{35}/_6$ Mrk.; Hauptsatz 1 Meter.)

$$\frac{1 \text{ Met.} \cdot 300}{{}^{35}/_6} = 300 \cdot {}^6/_{35} = \frac{1800}{35} = \frac{360}{7} = 51^3/_7 \text{ Meter.}$$

11) Wenn der Louisd'or 5 Thlr. 18 Sgr. gilt, wie viele kann man für 125 Thlr. einwechseln? (Hauptsatz 1 Louisd'or.) 5 Thlr. 18 Sgr. = $5^3/_5$ Thlr. = $^{28}/_5$ Thlr.

$$\frac{1 \text{ Ld'r.} \times 125}{{}^{28}/_5} = \frac{125 \cdot 5}{28} = \frac{625}{28} = 22^9/_{28} \text{ Ld'r.} = 22 \text{ Ld'r. und}$$

$^9/_{28}$ Ld'r. $\times$ $^{28}/_5$ = $^9/_5$ Thlr. = $1^4/_5$ Thlr. bleiben übrig.

Obwohl die beiden letzten Beispiele nur eine Division enthalten, so gehören sie doch nicht zur Divisions-Regeldetri, weil 1 Meter und 1 Louisd'or hier nicht die Einheit bezeichnen, sondern den Hauptsatz bilden.

12) 18 Meter kosten 0,45 Thlr., was kosten 48 Meter?

$$\frac{0{,}45 \text{ Thlr.} \cdot 48}{18} = 0{,}05 \times 24 = 1{,}20 \text{ Thlr.} = 1 \text{ Thlr. } 6 \text{ Sgr.}$$

(0,45 gegen 18 mit 9 gehoben giebt 0,05.)

13) Für 75,3 Thlr. kauft man 12 Hekto, was giebt man für 7,28 Hekto?

$\frac{75{,}3 \text{ Thlr.} \cdot 7{,}28}{12} = 25{,}1 \cdot 1{,}82$ (182 = 2 $\times$ 91)

25,1	$\times$ 2
50,2	$\times$ 91
45,682 Thlr. = 45 Thlr. 20 Sgr. 5,52 Pf.	

14) 2,334 Quadrat-Meter kosten 32 Thlr., was werden 6,54 Quadrat-Meter kosten?

$$\frac{32 \cdot 6{,}54}{2{,}334} = \frac{32 \cdot 1090}{389}$$ (Beide Decimalbrüche mit 1000 multiplicirt und mit 6 gehoben.)

1090 × 32
—— × 8
8720 × 4
34880 : 389 = $89^{259}/_{389}$ Thlr. = 89 Thlr. 19 Sgr. $11^{269}/_{389}$ Pf.
3112
3760
3501
259

15) 31,35 Dutzend kosten 15,10 Thlr., was kosten 11,22 Dutzend?

$\frac{15{,}10 \text{ Thlr.} \,.\, 11{,}22}{31{,}35} = \frac{3{,}02 \,.\, 374}{209}$ } Mit 3 und 5 gehoben und mit 100 Zähler und Nenner multiplicirt.

3,02 . 374
748
1122
1129,48 : 209 = 5,404 Thlr.
1045 = 5 Thlr. 12 Sgr. $1^{11}/_{25}$ Pf.
844
836
880

16) 7 Rieß 10 Buch kauft man für 16 Thlr. 20 Sgr., was kosten 2 Ballen 3 Rieß 15 Buch?

7 Rieß 10 Buch = $7^1/_2$ Rieß; 16 Thlr. 20 Sgr. = $16^2/_3$ Thlr.; 2 Ballen 3 Rieß 15 Buch = $23^3/_4$ Rieß.

$$\frac{16^2/_3 \text{ Thlr.} \,.\, 23^3/_4}{7^1/_2} = \frac{50 \,.\, 2 \,.\, 95}{3 \quad 15 \quad 4} = \frac{475}{9} = 52^7/_9 \text{ Thlr.}$$

17) 7 Groß 2 Dutz. 3 Stück kosten 8 Thlr. 12 Sgr., was kosten 15 Groß 6 Dutzend 8 Stück?

7 Groß 2 Dtz. 3 Stck. = $7^9/_{48}$ = $7^3/_{16}$ Grß; 8 Thlr. 12 Sgr. = $8^2/_5$ Thlr.; 15 Groß 6 Dutz. 8 Stück = $15^5/_9$ Groß.

$$\frac{8^2/_5 \text{ Thlr.} \times 15^5/_9}{7^3/_{16}} = \frac{42 \,.\, 140 \,.\, 16}{5 \quad 9 \quad 115} = \frac{6272}{345} = 18^{62}/_{345} \text{ Thlr.}$$

Man verwandelt die Sätze nur dann zu Brüchen der höchsten Benennung, wenn sich diese voraussichtlich noch heben lassen, wie $^9/_{48}$ Groß zu $^3/_{16}$ Groß, $^{12}/_{30}$ Thlr. zu $^2/_5$ Thlr. u. s. w. Ist dies nicht der Fall, so hat das Umwandeln keinen Nutzen, sondern man muß dann wie bei den folgenden Beispielen 18 und 19 verfahren. Läßt sich nicht der Hauptsatz, aber lassen die anderen beiden Sätze sich in noch aufhebbare Brüche der höchsten Benennung umwandeln, so wandelt man diese um und verfährt, indem man den Hauptsatz unverändert läßt, wie in Beispiel 7 bis 9. Läßt sich der Hauptsatz allein umwandeln, mit den anderen beiden Sätzen kann es aber nicht geschehen, so hat dies wieder keinen Nutzen; man muß dann ebenfalls wie in Beispiel 18 und 19 verfahren.

18) Für 47 Thlr. 19 Sgr. 7 Pf. kauft man 76 Pfd. 35 Neuloth, was wird man für 7 Ctr. 88 Pfd. 50 Neuloth bezahlen müssen?

47 Thlr. 19 Sgr. 7 Pf. = 17155 Pf.; 76 Pfd. 35 Neuloth = 3835 Neuloth;
7 Ctr. 88 Pfd. 5 Nlth. = 39405 Neuloth.

$$\frac{17155 \, . \, 39405}{3835} = \frac{17155 \, . \, 7881}{767} = 489 \text{ Thlr. } 19 \text{ Sgr. } 1\tfrac{232}{767} \text{ Pf.}$$

19) Für 3 Groß 5 Dtz. 7 Stück zahlt man 29 Thlr. 17 Sgr. 5 Pf., wieviel für 12 Groß 8 Dtz. 3 Stück?

3 Groß 5 Dtz. 7 Stck. = 499 Stück; 29 Thlr. 17 Sgr. 5 Pf. = 10649 Pf.;
12 Groß 8 Dtz. 3 Stück = 1827 Stück.

$$\frac{10649 \, . \, 1827}{499} = 108 \text{ Thlr. } 9 \text{ Sgr. } 1\tfrac{212}{499} \text{ Pf.}$$

20) 1 Pud kostet 36 Thlr. 23 Sgr. 7 Pf., was kosten 38 Pud 31 Pfund 54 Solotnick? (1 Pud = 40 Pfd.; 1 Pfd. = 96 Solotnick.)

36 Thlr. 23 Sgr. 7 Pf. = 13243 Pf.; 38 Pud 31 Pfd. 54 Solotnick
= 148950 Solotnick; 1 Pud = 3840 Solotnick.

$$\frac{148950 \, . \, 13243}{3840} = 1426 \text{ Thlr. } 26 \text{ Sgr. } 11\tfrac{71}{128} \text{ Pf.}$$

Oder:

36 Thlr.	23 Sgr.	7 Pf.	für 1 Pud	
			× 4	
147 "	4 "	4 "	× 9	für 36 Pud } für 38 Pud
1324 "	9 "	— "		
73 "	17 "	2 "	für 2 Pud	
18 "	11 "	$9\frac{1}{2}$	" $\frac{1}{2}$ " = 20 Pfd.	(2 Pud : 4)
9 "	5 "	$10\frac{3}{4}$	" $\frac{1}{4}$ " = 10 "	($\frac{1}{2}$ " : 2)
	27 "	$7\frac{3}{40}$	" $\frac{1}{40}$ " = 1 Pfd.	($\frac{1}{4}$ " : 10)
	13 "	$9\frac{43}{80}$	" $\frac{1}{80}$ " = 48 Solt.	($\frac{1}{40}$ " : 2)
	1 "	$8\frac{443}{640}$	" $\frac{1}{640}$ = 6 "	($\frac{1}{80}$ " : 8)
1426 Thlr.	26 Sgr.	$11\frac{71}{128}$ Pf.		

Aufgaben wie die in Beispiel 18 bis 20 muß man, um das langweilige Multipliciren und Dividiren mit den großen Zahlen zu vermeiden, nur mittelst Logarithmen rechnen. Wenn, wie im Beispiel 20, der erste Satz die Einheit ist und es läßt sich der mit ihm correspondirende Satz (der eine gleichartige Benennung hat) bequem in Theile zerlegen, die mit der Einheit gleiche Benennung haben, so kann man auch die Zerstreuungsmethode (§ 109) anwenden, wie es beim Beispiel 20 geschehen ist. Das Rechnen mit Logarithmen (§ 224) ist aber noch leichter wie diese Methode, selbst wenn man bei dieser die Brüche außer Acht läßt.

§ 112.

Die folgenden Beispiele sind von denen im vorigen Paragraph nur deshalb getrennt worden, weil sie noch in manchen Rechenlehrbüchern als eine besondere Rechnungsart unter dem Namen „verkehrte Regeldetri" vorkommen. Sie bilden aber weder eine besondere Rechnungsart, noch sind sie in Hinsicht der Auflösung von dem 3ten Falle § 111 verschieden, denn auch bei ihnen gilt dieselbe Auflösungsregel, welche dort gegeben ist, nämlich: Man beurtheile aus der Aufgabe, ob man mehr oder weniger, als der Hauptsatz beträgt, für den zu suchenden 4ten Satz erhalten muß; bei mehr multiplicirt man mit der größeren und dividirt durch die kleinere Zahl der beiden Nebensätze (§ 108); bei weniger multiplicirt man mit der kleineren und dividirt durch die größere Zahl dieser beiden Sätze.

1) Es wird ein Stück Land in $13^1/_2$ Tagen mit 5 Pflügen umgepflügt; wie viele Pflüge sind erforderlich, um es in $4^1/_2$ Tagen umzupflügen?

(Hauptsatz 5 Pflüge. Soll das Land in weniger Tagen umgepflügt werden, so sind mehr Pflüge erforderlich; also die größere Zahl $13^1/_2$ multiplicirt, die kleinere $4^1/_2$ dividirt.)

$$\frac{5\text{ Pfl.} \times 13^1/_2}{4^1/_2} = \frac{5 \,.\, 27 \,.\, 2}{2 \quad 9} = 15 \text{ Pflüge.}$$

2) 10 Arbeiter fertigen eine Arbeit in $12^1/_2$ Tagen, wie lange werden 15 Arbeiter daran arbeiten?

(Hauptsatz $12^1/_2$ Tage. Je mehr Arbeiter angestellt werden, je weniger Tage gebrauchen sie zu derselben Arbeit; also die kleinere Zahl 10 multiplicirt, die größere 15 dividirt.)

$$\frac{12^1/_2 \text{ Tg.} \times 10}{15} = \frac{25 \,.\, 10}{2 \quad 15} = \frac{25}{3} = 8^1/_3 \text{ Tage.}$$

3) Für einen gewissen Preis kann ein Trottoir, das 2 Meter 20 Centi breit ist, 63 Meter lang gelegt werden; wie breit kann es für denselben Preis gelegt werden, wenn es nur 45 Meter lang werden soll? (2 Meter 20 Centi $= 2^1/_5$ Meter.)

(Hauptsatz $2^1/_5$ Meter breit. Je weniger lang, je mehr breit kann das Trottoir für denselben Preis gelegt werden; also die größere Zahl 63 multiplicirt, die kleinere 45 dividirt.)

$$\frac{2^1/_5 \text{ Meter} \times 63}{45} = \frac{11 \,.\, 63}{5 \,.\, 45} = \frac{11 \,.\, 7}{5 \,.\, 5} = \frac{77}{25} = 3^2/_{25} \text{ Meter} = 3 \text{ Met. } 8 \text{ Centi.}$$

4) Eine Mauer kann für einen gewissen Preis 63 Meter lang und $3^1/_2$ Met. hoch gebaut werden; wie hoch kann sie werden, wenn sie für denselben Preis und bei gleicher Stärke 70 Meter lang werden soll?

(Hauptsatz $3^1/_2$ Meter hoch. Je mehr lang, je weniger hoch; die kleinere Zahl 63 multiplicirt, die größere 70 dividirt.)

$$\frac{3^1/_2 \text{ Meter} \times 63}{70} = \frac{7 \,.\, 63}{2 \quad 70} = \frac{63}{20} = 3^3/_{20} \text{ Meter} = 3 \text{ Meter } 15 \text{ Centi.}$$

5) Eine Mühle mahlt mit ihren 8 Gängen eine gewisse Menge Getreide in $37^3/_4$ Stunden; wieviel Zeit wird erforderlich sein, wenn sie mit 5 Gängen ebenso viel Getreide mahlen soll?

(Hauptsatz $37^3/_4$ Stunden. Je weniger Gänge, je mehr Stunden.)

$$\frac{37^3/_4 \times 8}{5} = \frac{151 \,.\, 8}{4 \quad 5} = \frac{302}{5} = 60^2/_5 \text{ Stunden.}$$

6) Wenn der Neuscheffel Roggen 2 Thlr. $5^1/_4$ Sgr. kostet, so wiegt ein Brod $5^2/_5$ Pfd.; wie schwer wird es wiegen, wenn der Neuscheffel Roggen 2 Thlr. 27 Sgr. kostet?

(Hauptsatz $5^2/_5$ Pfd. Je theurer der Neuscheffel Roggen, je weniger schwer das Brod.) (2 Thlr. $5^1/_4$ Sgr. $= 65^1/_4$ Sgr.; 2 Thlr. 27 Sgr. = 87 Sgr.)

$$\frac{5^2/_5 \times 65^1/_4}{87} = \frac{27 \,.\, 261}{5 \quad 4 \,.\, 87} = \frac{81}{20} = 4^1/_{20} \text{ Pfd.} = 4 \text{ Pfd. } 2^1/_2 \text{ Neuloth.}$$

7) Es geht Jemand täglich 6 Meilen und braucht $13^1/_2$ Tage zu einer Reise; wie viele Tage wird er gebrauchen, wenn er nur 5 Meilen täglich geht?

(Je weniger Meilen er geht, je mehr Tage gebraucht er.)

$$\frac{13^1/_2 \text{ Tage} \times 6}{5} = \frac{27 \cdot 6}{2 \cdot 5} = \frac{81}{5} = 16^1/_5 \text{ Tage.}$$

8) Um ein großes Bassin mit Wasser zu füllen, gebrauchen 3 Röhren $17^3/_4$ Stunden; in wieviel Zeit wird es gefüllt, wenn 5 Röhren angelegt werden?

(Je mehr Röhren, je weniger Stunden sind erforderlich.)

$$\frac{17^3/_4 \text{ St.} \times 3}{5} = \frac{71 \cdot 3}{4 \quad 5} = \frac{213}{20} = 10^{13}/_{20} \text{ Std.} = 10 \text{ Stunden } 39 \text{ Minuten.}$$

9) Jemand braucht zu einem Rock $2^1/_5$ Meter Tuch, wenn es $1^1/_2$ Meter breit ist; wieviel gebraucht er, wenn das Tuch nur $1^1/_4$ Meter breit ist?

(Je weniger breit, je mehr Meter Tuch gebraucht er.)

$$\frac{2^1/_5 \cdot 1^1/_2}{1^1/_4} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 4}{5 \quad 2 \quad 5} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 2}{25} = \frac{66}{25} = 2^{16}/_{25} \text{ Met.} = 2 \text{ Met. } 64 \text{ Centi.}$$

10) Eine Garnison von 750 Mann reicht mit ihrem Proviant 7 Wochen 3 Tage; wie lange werden 900 Mann bei gleichem Rationssatz damit auskommen? (7 Wochen 3 Tage = 52 Tage.)

(Je mehr Mann, je weniger Tage kommen sie aus.)

$$\frac{52 \text{ Tage} \times 750}{900} = \frac{130}{3} = 43^1/_3 \text{ Tage.}$$

11) Eine Allee enthält 2093 Bäume, mit einem Zwischenraume von 6,25 Meter von Baum zu Baum; wie viele Bäume sind erforderlich, wenn der Zwischenraum nur 5,75 Meter betragen soll?

(Je weniger Zwischenraum, je mehr Bäume sind erforderlich.)

$$\frac{2093 \times 625}{575} = \frac{2093 \cdot 25}{23} = 91 \cdot 25 = 2275 \text{ Bäume.}$$

12) Um eine Fläche zu belegen, gebraucht man 648 quadratförmige Rasenstücke, deren Seiten 32 Centi lang sind; wie viele Rasenstücke werden gebraucht, wenn die Seitenlänge der Stücke 36 Centi beträgt?

(32 Centi ins Quadrat giebt 1024 Quadrat-Centi
36 " " " " 1296 Quadrat-Centi.)

(Je größer die Stücke, je weniger sind erforderlich.)

$$\frac{648 \cdot 1024}{1296} = \frac{1024}{2} = 512 \text{ Rasenstücke.}$$

II. Die zusammengesetzte Regeldetri.

§ 113.

Die zusammengesetzte Regeldetri ist nichts weiter, als die Verbindung mehrerer Regeldetrisätze zu einer Aufgabe. Man schreibt den Hauptsatz, der auch hier mit keinem anderen gegebenen Satz, sondern nur mit dem zu suchenden Satz gleiche Benennung hat, über einen Strich und vergleicht dann jedes Paar Sätze, die eine gleiche Benennung haben, mit dem Hauptsatz, ob sie für den zu suchenden Satz **mehr** oder **weniger** geben müssen, wie der Hauptsatz beträgt. Bei **mehr** wird die größere Zahl **über**, die kleinere **unter** den Strich neben den Hauptsatz gesetzt, bei **weniger** umgekehrt; demnächst wird wie in § 111 und 112 verfahren.

Um sich das Ansetzen der Aufgaben zu erleichtern, kann man (doch ist es nicht immer nothwendig) erst die Sätze, welche die Bedingung enthalten, neben einander hinschreiben und unter diese die Fragesätze stellen, welche gleiche Benennungen mit den Bedingungssätzen haben. Unter den Hauptsatz wird dann ein Fragezeichen gemacht.

1) In 6 Tagen fertigen 14 Weber 532 Meter Zeug; wie viele Meter werden 8 Weber in 9 Tagen fertigen?

Bedingung: in 6 Tagen 14 Weber 532 Meter.
Frage: in 9 „ 8 „ ?

Je mehr Tage (in der Frage), je **mehr** Meter; also die größere Zahl 9 kommt über den Strich (multiplicirt), die kleinere Zahl 6 unter den Strich (dividirt).

$$\frac{532 \,.\, 9}{6}$$

Je weniger Weber (in der Frage), je **weniger** Meter; also die kleinere Zahl 8 kommt über den Strich (multiplicirt), die größere Zahl 14 unter den Strich (dividirt).

$$\frac{532 \,.\, 9 \,.\, 8}{6 \,.\, 14} = 456 \text{ Meter.}$$

2) Man braucht zu einem halben Dutzend Hemden 16 Meter von 82 Centi breiter Leinwand; wie viele Meter sind zu $1^1/_2$ Dutzend erforderlich, wenn die Leinwand 1 Meter breit ist?

6 Hemd. 16 Mtr. 82 Ct. breit
18 „ ? „ 100 „ „
} Je mehr Hemden, je **mehr** Meter; je mehr breit, je **weniger** Meter.

$$\frac{16 \,.\, 18 \,.\, 82}{6 \,.\, 100} = \frac{48 \,.\, 82}{100} = \frac{3936}{100} = 39{,}36 \text{ Meter} = 39 \text{ Mtr. } 36 \text{ Centi.}$$

3) Ein Fuhrmann fährt 30 Centner 12 Meilen für 10 Thlr.; wie viele Meilen wird er 21 Ctr. für $10^1/_2$ Thlr. fahren?

30 Ctr. 12 Meil. 10 Thlr.
21 „ ? „ $10^1/_2$ „
} Je weniger Centner, je **mehr** Meilen; je mehr Geld, je **mehr** Meilen.

$$\frac{12 \text{ Meil.} \,.\, 30 \,.\, 10^1/_2}{21 \,.\, 10} = \frac{12 \,.\, 30 \,.\, 21}{21 \,.\, 2 \,.\, 10} = 18 \text{ Meilen.}$$

4) Ein Müller mahlt mit 5 Gängen 80 Neuscheffel Getreide in $2^1/_2$ Tagen; wie viele Tage wird er gebrauchen, um mit 8 Gängen 120 Neuschffl. zu mahlen?

5 Gänge 80 Neuschffl. $2^1/_2$ Tg. ⎫ Je mehr Gänge, je weniger Tage;
8 „ 120 „ ? „ ⎭ je mehr Neuschffl., je mehr Tage.

$$\frac{2^1/_2 \text{ Tg. } 5 . 120}{8 . 80} = \frac{5 . 5 . 120}{2 \; 8 . 80} = \frac{75}{32} = 2^{11}/_{32} \text{ Tg.} = 2 \text{ Tg. } 8^1/_4 \text{ St.}$$

5) 20 Meter $1^1/_4$ Meter breites Tuch kosten $26^2/_3$ Thlr.; was sind 30 Meter von demselben Tuche werth, wenn es $1^1/_2$ Meter breit liegt?

20 Mtr. $1^1/_4$ br. $26^2/_3$ Thlr. ⎫ Je mehr Meter, je mehr Geld; je mehr
30 „ $1^1/_2$ „ ? „ ⎭ breit, je mehr Geld.

$$\frac{26^2/_3 \text{ Thlr.} . 30 . 1^1/_2}{20 . 1^1/_4} = \frac{80 . 30 . 3 . 4}{3 \; 20 \; 2 \; 5} = 48 \text{ Thlr.}$$

6) 15 Arbeiter verdienen in $6^1/_2$ Wochen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten, $136^1/_2$ Thlr.; wieviel werden 32 Arbeiter in $3^3/_4$ Wochen verdienen, wenn sie täglich nur 10 Stunden arbeiten?

15 Arb. $6^1/_2$ Wch. 12 St. $136^1/_2$ Thlr. ⎫ Je mehr Arbeiter, je mehr Geld; je
32 „ $3^3/_4$ „ 10 „ ? „ ⎬ weniger Wochen, je weniger Geld; je
⎭ weniger Stunden, je weniger Geld.

$$\frac{136^1/_2 \text{ Thlr.} . 32 . 3^3/_4 . 10}{15 \; 6^1/_2 . 12} = \frac{273 . 32 . 15 . 2 . 10}{2 \; 15 \; 4 \; 13 . 12} = 140 \text{ Thlr.}$$

7) Eine Mauer, die 100 Meter lang, 60 Centi dick und 3 Meter hoch ist, kostet 3000 Thlr; wie hoch wird die Mauer werden können, wenn nur 2500 Thlr. dafür bezahlt werden und wenn sie 150 Meter lang und 50 Centi dick sein soll?

100 lang 60 dick 3 hoch 3000 Thlr. ⎫ Je mehr lang, je weniger hoch; je we-
150 „ 50 „ ? „ 2500 „ ⎬ niger dick, je mehr hoch; je weniger Geld,
⎭ je weniger hoch.

$$\frac{3 \text{ Mtr.} . 100 . 60 . 2500}{150 \; 50 \; 3000} = \frac{6}{3} = 2 \text{ Meter hoch.}$$

8) Ein Feld, welches 240 Meter lang und 105 Meter breit ist, wird von 8 Arbeitern in 20 Tagen à 10 Stunden umgegraben; wie viele Tage werden 10 Arbeiter zu einem Felde gebrauchen, das 210 Meter lang und 90 Meter breit ist, wenn sie täglich nur 8 Stunden arbeiten?

240 lang 105 breit 8 Arb. 20 Tg. 10 Stunden ⎫ Je weniger lang, je weniger Tage; je weniger breit, je we-
210 „ 90 „ 10 „ ? „ 8 „ ⎬ niger Tage; je mehr Arbeiter, je weniger Tage; je weniger
⎭ Stunden, je mehr Tage.

$$\frac{20 . 210 . 90 . 8 . 10}{240 \; 105 \; 10 . 8} = \frac{30}{2} = 15 \text{ Tage.}$$

9) Der Besitzer einer Fabrik unterhält 50 Gasflammen, für die er, bei einer täglichen Brennzeit von 6 Stunden, halbjährlich 250 Thlr. bezahlt; er bedarf jedoch fernerhin nur einer Brennzeit von 4 Stunden 12 Minuten täglich,

will aber die Flammen heller haben, so daß jede $\frac{1}{4}$ mehr Gas als bisher consumirt und statt 50 Flammen 60 Flammen alle Abende brennen sollen; wieviel wird er in 8 Monaten für Gas zahlen müssen?

50 Fl.	6 St.	6 M.	250 Thlr.	1 hell.	Je mehr Flammen, je mehr Geld; je weniger Stunden, je weniger Geld; je mehr Monate, je mehr Geld; je heller, je mehr Geld.
60 „	$4\frac{1}{5}$ „	8 „	? „	$1\frac{1}{4}$ „	

$$\frac{250\ \text{Thlr.} \cdot 60 \cdot 4\frac{1}{5} \cdot 8 \cdot 1\frac{1}{4}}{50 \quad 6 \quad 6 \quad 1} = \frac{250 \cdot 60 \cdot 21 \cdot 8 \cdot 5}{50 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 350\ \text{Thlr.}$$

10) 25 Weber fertigen in $7\frac{1}{2}$ Wochen à $5\frac{1}{2}$ Tage à 12 Stunden 1200 Meter 1 Meter breite Leinwand; wie viele Wochen werden 30 Weber an 1500 Meter 80 Centi breite Leinwand weben, wenn sie 6 Tage in der Woche, täglich 15 Stunden arbeiten?

25 Wb.	$7\frac{1}{2}$ Wch.	$5\frac{1}{2}$ Tg.	12 St.	1200 Mtr.	100 Centi	Je mehr Weber, je weniger Wochen; je mehr Tage, je weniger Wochen; je mehr Stunden, je weniger Wochen; je mehr Meter, je mehr Wochen; je weniger breit, je weniger Wochen.
30 „	? „	6 „	15 „	1500 „	80 „	

$$\frac{7\frac{1}{2}\ \text{Wch.} \cdot 25 \cdot 5\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 1500 \cdot 80}{30 \quad 6 \quad 15 \quad 1200 \quad 100} = \frac{15 \cdot 25 \cdot 11 \quad 12 \cdot 1500 \cdot 80}{2 \quad 30 \quad 2 \cdot 6 \cdot 15 \quad 1200 \quad 100} = \frac{55}{12}\ \text{Wochen};$$

$\frac{55}{12}$ Wochen sind 4 Wochen $3\frac{1}{2}$ Tage.

11) Ein Graben der 49 Meter lang, $2\frac{1}{5}$ Meter tief, unten $2\frac{1}{4}$ und oben $3\frac{3}{5}$ Meter breit ist, wird von 27 Arbeitern, bei 10stündiger Arbeitszeit täglich, in $3\frac{1}{2}$ Wochen à $5\frac{1}{2}$ Tagen ausgehoben; wie viele Arbeiter sind erforderlich, wenn ein Graben, der 63 Meter lang, 2 Meter tief, unten $3\frac{1}{5}$ und oben $4\frac{2}{5}$ Meter breit ist, bei 8stündiger Arbeitszeit täglich, in 5 Wochen à 6 Tagen ausgehoben werden soll?

49 Mtr. lng.	$2\frac{1}{5}$ Mtr. tief	$2\frac{1}{4}$ br. unt.	$3\frac{3}{5}$ br. ob.	27 Arb.	10 Std.	$3\frac{1}{2}$ Wch.	$5\frac{1}{2}$ Tg.
63 „ „	2 „ „	$3\frac{1}{5}$ „ „	$4\frac{2}{5}$ „ „	? „	8 „	5 „	6 „

(Je länger, je mehr Arbeiter; je weniger tief, je weniger Arbeiter; je breiter unten, je mehr Arbeiter; je breiter oben, je mehr Arbeiter; je weniger Stunden, je mehr Arbeiter; je mehr Wochen, je weniger Arbeiter; je mehr Tage, je weniger Arbeiter.)

$$\frac{27\ \text{Arb.} \cdot 63 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 22 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 7 \quad 11}{49 \quad 11 \quad 5 \quad 9 \quad 5 \quad 18 \quad 8 \quad 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6} = 44\ \text{Arbeiter.}$$

III. Die Procentrechnung.

§ 114.

Es ist allgemein gebräuchlich, Theile einer Quantität (Menge) nach Hundert zu bestimmen und man nennt diese Theile **Procente**, weil pro Centum für Hundert heißt. Geschrieben wird dies auch p. C. oder p. c. oder %.

Zahlt Jemand 4 % Vermögenssteuer, so heißt dies: von je 100 Thlr. seines Vermögens zahlt er 4 Thlr. Steuern; ist der Spiritus 80=procentig, so bestehen je 100 Liter Spiritus aus 80 Litern Weingeist (wirklichem Spiritus) und 20 Litern Wasser; enthält die atmosphärische Luft 79 % Sauerstoff, so sind in je 100 Kubikmetern oder Kubikcenti Luft 79 Kubikmeter oder Kubikcenti Sauerstoff enthalten.

Die Zahl, welche die Procente angiebt, wird der Procentsatz oder der Procentfuß genannt.

Bei denjenigen Procentsätzen, die in 100, entweder mit einer ganzen Zahl oder mit einem zum Dividiren bequemen Bruch, aufgehen, hat man nur nöthig, durch diese Zahl oder diesen Bruch die Quantität (Valuta bei Geld und Waaren) zu dividiren, um sofort in dem daraus entstehenden Quotienten den gesuchten Theil der Quantität zu erhalten. 4 in 100 giebt 25, also sind 4 % Steuern von 675 Thlrn. Vermögen = 675 : 25 = 27 Thlr.; $66^2/_3$ in 100 giebt $^3/_2$, also enthalten 600 Liter $66^2/_3$=procentigen Spiritus, 600 : $^3/_2$ = 400 Liter wirklichen Spiritus u. s. w. Wer mit Procenten viel zu rechnen hat, kann sich leicht eine Tabelle anlegen, aus welcher zu jedem solchen Procentfuß der Divisor ersichtlich ist.

Bei allen anderen Procentsätzen geschieht die Berechnung der Quantitätstheile, oder wenn diese gegeben sind, die Berechnung des Procentfußes nach der Regeldetri: im ersten Falle bildet der Procentfuß den **Hauptsatz** und die Zahl 100 ist dann der stereotype (feststehende) Divisor; im anderen Falle bildet 100 den Hauptsatz und der Procentfuß ist nun der stetige Divisor.

Bei jeder Aufgabe dieser Art muß also die Zahl 100, welche in dem Ausdruck „Procent" liegt, mit in Ansatz kommen. Steht sie als Divisor im Nenner, so hebt man sie nicht gern auf, damit ein Decimalbruch gebildet werden kann, der nur resolvirt oder reducirt zu werden braucht.

1) Die Miethssteuer in Berlin beträgt $6^2/_3$ %; wer für eine Wohnung 380 Thlr. Miethe giebt, wieviel hat der an Miethssteuer zu zahlen?

(100 Thlr. Miethe geben $6^2/_3$ Thlr. Steuer; wieviel Steuer geben 380 Thlr. Miethe?)

$$\frac{6^2/_3 \,.\, 380}{100} = \frac{20 \,.\, 380}{3 \quad 100} = \frac{76}{3} = 25^1/_3 \text{ Thlr.}$$

Oder: $6^2/_3$ ist der 15te Theil von 100, also $380 : 15 = \frac{380}{15} = \frac{76}{3} = 25^1/_3$ Thlr.

2) Ein Kapitalist hat 975 Thlr. Einkommensteuer zu zahlen; wie groß ist sein Vermögen, wenn die Steuer $1^1/_2$ % desselben beträgt? ($1^1/_2$ Thlr. Steuer geben 100 Thlr. Vermögen; 975 Thlr. Steuer geben wieviel Vermögen?)

$$\frac{100 \,.\, 975}{1^1/_2} = \frac{100 \,.\, 975 \,.\, 2}{3} = 65000 \text{ Thlr.}$$

3) Ein Kapitalist zahlt von seinem 65000 Thlr. betragenden Vermögen 975 Thlr. Einkommensteuer; wieviel Procent beträgt die Steuer? (65000 Thlr. Vermögen geben 975 Thlr. Steuer; 100 Thlr. Vermögen geben wieviel Steuer?)

$$\frac{975 \cdot 100}{65000} = \frac{39}{26} = 1^1/_2\,\%.$$

4) Ein Beamter mit 625 Thlrn. Gehalt erhält eine Zulage von 12 %; um wie viele Thaler hat sich sein Gehalt erhöht? (100 Thlr. Gehalt geben 12 Thlr. Zulage; 625 Thlr. geben wieviel Zulage?)

$$\frac{12 \text{ Thlr.} \cdot 625}{100} = 75 \text{ Thlr.}$$

5) Das Gehalt eines Beamten beträgt 625 Thlr.; es wird um 75 Thlr. erhöht, wieviel Procent beträgt die Gehaltszulage? (625 Thlr. Gehalt geben 75 Thlr. Erhöhung; 100 Thlr. geben wieviel?)

$$\frac{75 \cdot 100}{625} = 12\,\%.$$

6) Nachdem Jemand $17^1/_2\,\%$ in der Miethe gesteigert worden, zahlt er 470 Thlr.; wieviel Miethe zahlte er vorher?

Wenn er $17^1/_2\,\%$ gesteigert worden ist, so zahlt er jetzt $117^1/_2$ Thlr. und früher 100 Thlr.; also $117^1/_2$ Thlr. jetzt geben 100 Thlr. früher, 470 Thlr. jetzt geben wieviel früher?

$$\frac{100 \cdot 470}{117^1/_2} = \frac{100 \cdot 470 \cdot 2}{135} = 400 \text{ Thlr.}$$

7) 160 Liter Wein enthalten $12^1/_2\,\%$ Wasser; aus wieviel Wein und Wasser besteht die Mischung?

Zu 100 Liter Wein sind $12^1/_2$ Liter Wasser gemischt, also $112^1/_2$ Liter Mischung geben 100 Liter Wein; 160 Liter Mischung geben wieviel Wein?

$$\frac{100 \cdot 160}{112^1/_2} = \frac{100 \cdot 160 \cdot 2}{225} = \frac{1280}{9} = 142^2/_9 \text{ Liter Wein}$$

$$\text{und } 160 - 142^2/_9 = 17^7/_9 \text{ Liter Wasser.}$$

8) Ein Neuscheffel Korn giebt $9^1/_2$ Liter Kleie; wieviel Procent sind dies?

50 Liter Korn geben $9^1/_2$ Liter Kleie; 100 Liter geben wieviel Kleie?

$$\frac{9^1/_2 \cdot 100}{50} = \frac{19 \cdot 100}{2\ \ 50} = 19\,\%.$$

9) 62 Liter Kleie sind 18 % von wie vielen Litern Korn?

18 Liter Kleie geben 100 Liter Korn; 62 Liter Kleie geben wie viele Liter Korn?

$$\frac{100 \cdot 62}{18} = \frac{5031}{9} = 559 \text{ Liter} = 11 \text{ Neuscheffel } 9 \text{ Liter Korn.}$$

10) Das Meter graues Tuch kostet 2 Thlr. 15 Sgr., das Meter blaues Tuch 2 Thlr. $27^1/_2$ Sgr.; um wieviel Procent ist das blaue Tuch theurer als das graue?

2 Thlr. $27^1/_2$ Sgr. — 2 Thlr. 15 Sgr. = $12^1/_2$ Sgr. ist das blaue Tuch theurer als das graue; also:

$2^1/_2$ Thlr. geben $^5/_{12}$ Thlr., was geben 100 Thlr.?

$$\frac{^5/_{12} \cdot 100}{2^1/_2} = \frac{5 \cdot 100 \cdot 2}{12 \quad\quad 5} = \frac{50}{3} = 16^2/_3\,\%.$$

11) Das Meter graues Tuch kostet 2 Thlr. 15 Sgr., das Meter blaues Tuch 2 Thlr. $27^1/_2$ Sgr.; um wieviel Procent ist das graue Tuch billiger als das blaue?

2 Thlr. $27^1/_2$ Sgr. — 2 Thlr. 15 Sgr. = $12^1/_2$ Sgr. ist das graue Tuch billiger als das blaue; also:

$2^{11}/_{12}$ Thlr. (2 Thlr. $27^1/_2$ Sgr.) geben $^5/_{12}$ Thlr., was geben 100 Thlr.?

$$\frac{^5/_{12} \cdot 100}{2^{11}/_{12}} = \frac{5 \cdot 100 \cdot 12}{12 \quad\quad 35} = \frac{100}{7} = 14^2/_7\,\%.$$

Man sieht aus den beiden vorstehenden Beispielen, daß, wenn das blaue Tuch $16^2/_3\,\%$ theurer als das graue, nicht auch das graue Tuch $16^2/_3\,\%$ billiger als das blaue ist.

Der Grund liegt darin, daß man bei der Frage nach t h e u r e r die billigere Sorte, und bei der Frage nach b i l l i g e r die theuere Sorte in Ansatz bringen muß, wodurch die verschiedenen Procente entstehen und worauf man bei derartigen Aufgaben immer zu achten hat.

12) In einer Stadt wurden durch eine Seuche $^2/_7$ der ganzen Einwohner hinweggerafft; wieviel Procent betrug die Zahl der Gestorbenen?

Von $^7/_7$ starben $^2/_7$ oder von 7 starben 2, wieviel von 100?

$$\frac{2 \cdot 100}{7} = \frac{200}{7} = 28^4/_7\,\%.$$

13) Ein Kaufmann verkauft $^5/_6$ seines Kaffeevorraths; wieviel Procent hat er verkauft?

$^5/_6$ von 100 sind $100 \times {}^5/_6 = {}^{500}/_6 = 83^1/_3\,\%$.

14) Ein Kaufmann verkauft $83^1/_3\,\%$ seines Kaffeevorraths, den wievielten Theil desselben hat er verkauft?

$$\frac{83^1/_3}{100} = \frac{250}{300} = {}^5/_6,$$ also den $^5/_6$ Theil.

15) 12 Pfund Kaffee geben nach dem Brennen 10 Pfund 20 Neuloth; wieviel Procent hat der Kaffee an Gewicht verloren?

12 Pfd. — $10^2/_5$ Pfd. = $1^3/_5$ Pfd.

12 Pfd. geben $1^3/_5$ Pfd., was geben 100 Pfd.?

$$\frac{1^3/_5 \cdot 100}{12} = \frac{8 \cdot 100}{5 \cdot 12} = \frac{40}{3} = 13^1/_3\,\%.$$

16) 10 Pfund 20 Neuloth gebrannten Kaffee haben durch das Brennen $13^1/_3$ % verloren; wieviel wogen dieselben ungebrannt?

Wenn 100 Pfund ungebrannten Kaffee $13^1/_3$ Pfund verlieren, so bleiben $86^2/_3$ Pfd.; also $86^2/_3$ Pfd. gebrannter Kaffee geben 100 Pfd. ungebrannten Kaffee, wieviel ungebrannten Kaffee geben $10^2/_5$ Pfd.?

$$\frac{100 \,.\, 10^2/_5}{86^2/_3} = \frac{100 \,.\, 52 \,.\, 3}{5 \,.\, 260} = 12 \text{ Pfd.}$$

17) Es ist Jemand 36 Jahre, sein Sohn 8 Jahre alt; wieviel Procent ist der Sohn jünger?

Der Sohn ist 28 Jahre jünger als der Vater, also: 36 geben 28, was geben 100?

$$\frac{28 \,.\, 100}{36} = \frac{700}{9} = 77^7/_9 \,\% \text{ ist der Sohn jünger.}$$

18) Früher kaufte man für 392 Thlr. 49 Ctr. Waare, später für dieselbe Summe 56 Ctr. derselben Waare; um wieviel Procent ist die Waare billiger geworden?

392 Thlr. : 49 = 8 Thlr. für 1 Ctr. ⎫ Der Centner ist 1 Thlr. billiger
392 Thlr. : 56 = 7 Thlr. für 1 Ctr. ⎭ geworden.

8 Thlr. geben 1 Thlr. billiger, was geben 100?

$$100 : 8 = 12^1/_2 \,\%.$$

19) Der Weizen ist um 12 % billiger geworden und kostet jetzt $61^3/_5$ Thlr., was hat er früher gekostet?

Wenn der Weizen 12 % billiger geworden ist, so kostet er jetzt 88 Thlr., wenn er früher 100 Thlr. gekostet hat, also: 88 geben 100, was geben $61^3/_5$?

$$\frac{100 \,.\, 61^3/_5}{88} = \frac{100 \,.\, 308}{88 \quad 5} = 70 \text{ Thlr.}$$

20) Man kauft für eine gewisse Summe 26 Hekto Weizen; wie viele Hekto kann man für dasselbe Geld kaufen, wenn der Weizen $13^1/_3$ % billiger ist?

100 — $13^1/_3 = 86^2/_3$; also $86^2/_3$ geben 100, 26 Hekto geben wie viele Hekto?

$$\frac{100 \,.\, 26}{86^2/_3} = \frac{100 \,.\, 26 \,.\, 3}{260} = 30 \text{ Hekto.}$$

21) Ein Kanal soll in 50 Tagen, statt in den zuerst festgesetzten 65 Tagen vollendet werden, um wieviel Procent müssen die Arbeiter vermehrt werden?

65 Tage geben 100 Arbeiter, 50 Tage geben wie viele Arbeiter?
(Je weniger Tage, je mehr Arbeiter.)

$$\frac{100 \,.\, 65}{50} = 130, \text{ also um } 30 \,\%.$$

22) Es will Jemand 64 Wochen mit seinem jährlichen Gehalt auskommen, das übrige sparen; wieviel Procent muß er täglich weniger ausgeben?

Bei 52 Wochen giebt er täglich 100 aus, bei 64 Wochen kann er täglich wieviel ausgeben? (Je mehr Wochen, je weniger kann er ausgeben.)

$$\frac{100 \,.\, 52}{64} = \frac{325}{4} = 81^1/_4 \text{ kann er täglich ausgeben,}$$

also 100 — $81^1/_4 = 18^3/_4$ % weniger.

23) Unter 147 Personen sollte eine bestimmte Summe gleichmäßig vertheilt werden, es wurde jedoch der auf jede Person fallende Betrag um $12^1/_2$ % vermindert; wie viele Personen konnten nun an dieser Summe Theil nehmen?

$100 - 12^1/_2 = 87^1/_2$; 100 geben 147 Personen, $87^1/_2$ wieviel? (Je kleiner der Betrag, je mehr Personen.)

$$\frac{147 \,.\, 100}{87^1/_2} = \frac{147 \,.\, 100 \,.\, 2}{175} = 168 \text{ Personen.}$$

24) Statt unter 120 Personen, soll eine gewisse Summe unter 150 Personen gleichmäßig vertheilt werden; um wieviel Procent muß der auf jede Person fallende Betrag vermindert werden?

120 geben 100; 150 wieviel? (Je mehr Personen, je geringer der Betrag.)

$$\frac{100 \,.\, 120}{150} = 80;\ 100 - 80 = 20\,\%\ \text{vermindert.}$$

25) Eine Anzahl Frauen vollendet eine Arbeit in 24 Tagen; wie viele Tage werden ebenso viele Männer daran arbeiten, wenn diese 20 % mehr leisten als die Frauen?

100 geben 24 Tage; 120 geben wie viele Tage? (Je mehr Arbeit geleistet wird, je weniger Tage sind erforderlich.)

$$\frac{24 \,.\, 100}{120} = 20 \text{ Tage.}$$

26) 48 Frauen gebrauchen zu einer Arbeit 20 Tage; wie lange werden 30 Männer daran arbeiten, wenn diese 20 % mehr leisten als die Frauen?

48 Fr. 20 Tg. leisten 100 } Je weniger Arbeiter (Frau oder Mann), je mehr Tage;
30 M. ? do. 120 } je mehr geleistet wird, je weniger Tage.

$$\frac{20 \,.\, 48 \,.\, 100}{30 \,.\, 120} = \frac{80}{3} = 26^2/_3 \text{ Tage}$$

IV. Die Gewinn- und Verlustrechnung.

§ 115.

Wenn eine Waare oder ein anderer Gegenstand zu einem höheren Preise verkauft wird, als er ein- oder angekauft worden ist, so hat der Verkäufer daran einen Gewinn, der gleich dem Verkaufspreis minus den Einkaufspreis ist; wenn aber die Waare zu einem niedrigeren Preise verkauft werden muß, als sie eingekauft ist, so hat der Verkäufer einen Verlust, der gleich dem Einkaufspreise minus den Verkaufspreis ist. Ist der Gewinn oder Verlust für eine kleinere Quantität bekannt und es soll daraus derselbe für eine größere Quantität berechnet werden, so geschieht dies nach der einfachen Regeldetri; ebenso, wenn der Gewinn oder Verlust in Procenten ausgedrückt ist oder werden soll.

In den folgenden Beispielen ist, der besseren Uebersicht wegen, das Berechnen des Gewinnes von dem des Verlustes getrennt und es sind beide noch in entsprechende Unterabtheilungen gebracht.

A. Gewinn.

a) Der Gewinn wird gesucht.

§ 116.

Der Gewinn ist gleich dem Verkaufspreise minus den Einkaufspreis. Wird derselbe nach Procenten bestimmt, so sind diese immer nach dem Einkaufspreise, nicht nach dem Verkaufspreise zu berechnen.

4) Eine Partie Getreide wird für 29 Thlr. 15 Sgr. eingekauft und für 35 Thlr. 20 Sgr. verkauft; wieviel gewinnt oder verdient der Verkäufer daran?

Verkauf	35	Thlr.	20	Sgr.
Einkauf	29	„	15	„
Gewinn	6	Thlr.	5	Sgr.

2) An 117 Rubeln, die Jemand für Waaren eingenommen hat, verdient er $19\frac{1}{2}$ Rubel; wieviel wird er verdienen, wenn er für 213 Rubel von derselben Waare verkauft?

117 Rbl. geben $19\frac{1}{2}$ Rbl. Gewinn, was geben 213 Rbl?

$$\frac{19\frac{1}{2} \,.\, 213}{117} = \frac{39 \,.\, 213}{2 \,.\, 117} = \frac{71}{2} = 35\frac{1}{2} \text{ Rubel.}$$

3) Ein Centner Zucker wird für $23\frac{1}{3}$ Thlr. eingekauft und das Pfund für $9\frac{1}{2}$ Sgr. verkauft; wieviel Procent werden daran verdient?

100 Pfd. à $9\frac{1}{2}$ Sgr. $= 950$ Sgr. $= 31\frac{2}{3}$ Thlr.; $31\frac{2}{3}$ Thlr. $- 23\frac{1}{3}$ Thlr. $= 8\frac{1}{3}$ Thlr. Gewinn.

$23\frac{1}{2}$ Thlr. Einkauf geben $8\frac{1}{3}$ Thlr. Gewinn; 100 Thlr. Einkauf geben wieviel Gewinn?

$$\frac{8\frac{1}{3} \text{ Thlr.} \,.\, 100}{23\frac{1}{3}} = \frac{25 \,.\, 100 \,.\, 3}{3 \qquad 70} = \frac{250}{7} = 35\frac{5}{7}\,\%.$$

4) Es kauft Jemand $1\frac{1}{4}$ Centner Kaffee, das Pfund zu 8 Sgr. 9 Pf.; die Kosten betragen im Ganzen 1 Thlr. 15 Sgr.; er verkauft das Pfund zu 11 Sgr. 6 Pf.; wieviel Procent hat er verdient?

$8\frac{3}{4}$ Sgr. $\times$ 125 =	36	Thlr.	13	Sgr.	9	Pf.	
Kosten	1	„	15	„			
Einkauf	37	„	28	„	9	„	
$11\frac{1}{2}$ Sgr. $\times$ 125 =	47	„	27	„	6	„	(Verkauf)
Gewinn	9	Thlr.	28	Sgr.	9	Pf.	

37 Thlr. 28 Sgr. 9 Pf. $= 37\frac{23}{24}$ Thlr.; 9 Thlr. 28 Sgr. 9 Pf. $= 9\frac{23}{24}$ Tlr.

$37\frac{23}{24}$ Thlr. Einkauf geben $9\frac{23}{24}$ Thlr. Gewinn; was geben 100 Thlr. Einkauf?

$$\frac{9\frac{23}{24} \,.\, 100}{37\frac{23}{24}} = \frac{239 \,.\, 100 \,.\, 24}{24 \qquad 911} = \frac{23900}{911} = 26\frac{214}{911}\,\% \text{ (circa } 26\frac{1}{4}\,\%.)$$

5) Eine Handelsgesellschaft hat von ihrem angelegten, 500000 Thlr. betragenden Capital eine Jahreseinnahme von 67500 Thlrn. Davon hat sie an Steuern $^1/_{30}$ und an sonstigen Ausgaben $^2/_{15}$ der Einnahme zu zahlen; wieviel Procent kommen als Gewinn zur Vertheilung?

$^1/_{30} + {}^2/_{15} = {}^5/_{30} = {}^1/_6$; 67500 Thlr. $\times$ $^1/_6$ = 11250 Thlr.

67500 Thlr. — 11250 Thlr. = 56250 Thlr. Gewinn.

500000 Thlr. geben 56250 Thlr. Gewinn; was geben 100 Thlr.?

$$\frac{56250 \,.\, 100}{500000} = 11{,}25 = 11^1/_4\,\%.$$

6) Der Centner Waare wurde früher mit $69^3/_8$ Thlrn. verkauft und es wurden daran $12^1/_2\,\%$ verdient; jetzt wird der Centner, bei gleichem Einkauf, für 74 Thlr. verkauft, wieviel Procent werden nun verdient?

$69^3/_8$ ist der Einkauf plus den Gewinn; $100 + 12^1/_2$ ist der Einkauf plus den Gewinn für 100, also:

$69^3/_8$ Thlr. geben $112^1/_2$ Thlr., was geben 74 Thlr.?

$$\frac{112^1/_2 \,.\, 74}{69^3/_8} = \frac{225 \,.\, 74 \,.\, 8}{2 \quad 555} = 120 \text{ Thlr.}$$

120 ist der Einkauf plus den Gewinn für 100; also 20 % Gewinn, wenn der Centner für 74 Thlr. verkauft wird.

b) Der Einkaufspreis wird gesucht.

§ 117.

Der Einkaufspreis ist gleich dem Verkaufspreise minus den Gewinn. Beim Rechnen mit gegebenen Procenten wird 100 als Einkaufspreis angenommen und 100 plus den Procentsatz giebt den Verkaufspreis. Soll nämlich von 30 Thlrn. Verkaufspreis, bei 10 % Gewinn, der Einkaufspreis gesucht werden, so sagt man: 110 Thlr. Verkauf geben 100 Thlr. Einkauf, wieviel Einkauf geben 30 Thlr.? Also:

$$\frac{100 \,.\, 30}{110} = \frac{300}{11} = 27^3/_{11} \text{ Thlr.}$$

Wollte man 10 % = $^1/_{10}$, von 30 Thlr. Verkauf = 3 Thlr. Gewinn nehmen und von 30 Thlr. abziehen, wodurch man 27 Thlr. Einkauf erhielte, so würde man falsch rechnen, denn 27 Thlr. Einkauf geben bei 10 % Gewinn nicht wieder 30 Thlr. Verkauf.

1) Eine Partie Roggen wird für 45 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf. verkauft und es werden $8^1/_2$ Thlr. daran verdient; was hat der Roggen im Einkauf gekostet?

Verkauf	45 Thlr.	7 Sgr.	6 Pf.
Gewinn	8 „	15 „	— „
Einkauf	36 Thlr.	22 Sgr.	6 Pf.

2) Drei Centner Waare werden für 148 Mark mit 20 % Gewinn verkauft; welches ist der Einkaufspreis derselben?

100 Mrk. Einkauf + 20 Mrk. Gewinn geben 120 Mrk. Verkauf, also 120 Mrk. Verkauf geben 100 Mrk. Einkauf, was geben 148 Mrk. Verkauf?

$$\frac{100 \,.\, 148}{120} = \frac{370}{3} = 123^1/_3 \text{ Mrk. Einkauf.}$$

3) Von 7 Ballen Papier werden 25 Rieß à Buch $3^1/_2$ Sgr. und 45 Rieß à 2 Thlr. verkauft; was hat bei 25 % Gewinn das Papier im Einkauf gekostet?

25 Rieß = 500 Buch à $3^1/_2$ Sgr. = 58 Thlr. 10 Sgr.
45 „ à 2 Thlr. 90 „ — „
Verkauf 148 Thlr. 10 Sgr.

125 Thlr. Verkauf geben 100 Thlr. Einkauf, was geben $148^1/_3$ Thlr. Verkauf?

$$\frac{100 \,.\, 148^1/_3}{125} = \frac{100 \,.\, 445}{3 \,.\, 125} = \frac{356}{3} = 118^2/_3 \text{ Thlr. Einkauf.}$$

4) Es hat Jemand 122 Schock Eier gekauft und verkauft davon $^3/_8$ der Anzahl für $7^1/_2$ Sgr., $^1/_4$ für 6 Sgr. und den Rest für 4 Sgr. 6 Pf. die Mandel, dabei verdient er $33^1/_3$ %; was haben die Eier im Einkauf gekostet?

122 Schock = 488 Mandel, also $^1/_8$ = 61 Mandel; $^3/_8$ sind demnach = 183 Mandel, $^2/_8$ = 122 Mandel und der Rest von $^3/_8$ = 183 Mandel.

183 Mandel à $^1/_4$ Thlr. = $45^3/_4$ Thlr.
122 „ à $^1/_5$ „ = $24^2/_5$ „
183 „ à $^3/_{20}$ „ = $27^9/_{20}$ „
$97^3/_5$ Thlr.

$133^1/_3$ Thlr. Verkauf geben 100 Thlr. Einkauf; $97^3/_5$ Thlr. Verkauf geben wieviel Einkauf?

$$\frac{100 \,.\, 97^3/_5}{133^1/_3} = \frac{100 \,.\, 488 \,.\, 3}{5 \quad 400} = \frac{366}{5} = 73^1/_5 \text{ Thlr. Einkauf.}$$

5) Jemand hat 2 Fässer Zucker gekauft, welche zusammen $2^3/_4$ Centner wiegen; er verkauft mit 30 % Gewinn das Pfund für 13 Sgr. Das eine Faß enthält $^2/_5$ des ganzen Zuckers; was hat jedes Faß im Einkauf gekostet?

130 Sgr. Verkauf geben 100 Sgr. Einkauf; 13 Sgr. Verkauf geben wieviel Einkauf?

$$\frac{100 \,.\, 13}{130} = 10 \text{ Sgr.}$$

1 Pfd. kostet also im Einkauf 10 Sgr.

275 Pfd. à $^1/_3$ Thlr. = 91 Thlr. 20 Sgr. Einkauf beider Fässer; $^1/_5$ von 91 Thlr. 20 Sgr. = 18 Thlr. 10 Sgr.; $^2/_5$ = 36 Thlr. 20 Sgr.; $^3/_5$ = 55 Thlr. Das eine Faß kostet also $36^2/_3$ Thlr., das andere 55 Thlr.

c) Der Verkaufspreis wird gesucht.

§ 118.

Der Verkaufspreis ist gleich dem Einkaufspreise plus den Gewinn. Beim Rechnen nach Procenten wird 100 als Einkaufspreis und 100 plus den Procentfuß als Verkaufspreis angenommen; doch kann man auch, was vortheilhafter ist, den Gewinn allein berechnen und diesen zum Einkaufspreis addiren.

1) Ein Centner Kaffee ist für 29 Thlr. 9 Sgr. 9 Pf. eingekauft und beim Verkauf wurden 6 Thlr. 15 Sgr. 3 Pf. daran verdient; zu welchem Preise ist das Pfund verkauft?

Einkauf	29 Thlr.	9 Sgr.	9 Pf.
Gewinn	6 „	15 „	3 „
Verkauf	35 Thlr.	25 Sgr.	— Pf.

35 Thlr. 25 Sgr. : 100 = 10 Sgr. 9 Pf. das Pfund im Verkauf.

2) Ein Meter kostet 4 Thlr. 16 Sgr. im Einkauf; wie theuer muß das Meter verkauft werden, wenn $12\frac{1}{2}$% verdient werden sollen?

$12\frac{1}{2}$% ist $\frac{1}{8}$ von 100; 4 Thlr. 16 Sgr. : 8 = 15 + 2 Sgr. = 17 Sgr.; 4 Thlr. 16 Sgr. + 17 Sgr. = 5 Thlr. 3 Sgr. für das Meter im Verkauf.

3) Ein Weinhändler kauft 16 Pfund Kaviar für 16 Thlr. 20 Sgr.; er will beim Verkauf 60% verdienen, wie viele Neuloth kann er dann auf eine Portion à 5 Sgr. geben?

$$60\% \text{ ist } \frac{3}{5} \text{ von } 100;\ 16\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{50 \cdot 3}{3 \quad 5} = 10 \text{ Thlr. Verdienst;}$$

16 Thlr. 20 Sgr. + 10 Thlr. = 26 Thlr. 20 Sgr. Verkauf.

$26\frac{2}{3}$ Thlr. geben 16 Pfund, wieviel giebt $\frac{1}{6}$ Thlr.?

$$\frac{16 \text{ Pfd.} \cdot \frac{1}{6}}{26\frac{2}{3}} = \frac{16 \cdot 1 \cdot 3}{6 \quad 80} = \frac{1}{10} = 5 \text{ Neuloth für 5 Sgr.}$$

4) Ein Weinhändler kauft 200 Flaschen Rheinwein für 150 Gulden, beim Transport zerbrechen 20 Flaschen; wenn er dennoch 30% beim Verkauf verdienen will, wie theuer muß er die Flasche verkaufen?

30% ist $\frac{3}{10}$ von 100; 150 Gld. $\times \frac{3}{10}$ = 45 Gld. Verdienst; 150 Gld. + 45 Gld. = 195 Gld. Verkauf; 180 Flaschen müssen für 195 Gld., also 1 Flasche für $\frac{195}{180} = 1\frac{1}{12}$ Gld. = 1 Gld. 5 Kreuzer verkauft werden.

5) Ein Kaufmann kauft eine Partie Waare, je 30 Pfund für 4 Rubel er will beim Verkauf 20% verdienen, wieviel Pfund kann er dann für 4 Rubel verkaufen?

20% ist $\frac{1}{5}$ von 100; 4 Rbl. : 5 =	$\frac{4}{5}$	Rbl. Verdienst,
dazu	4	Rbl. Einkauf,
giebt	$4\frac{4}{5}$	Rbl. Verkauf.

$4\frac{4}{5}$ Rbl. geben 30 Pfund, was geben 4 Rbl?

$$\frac{30 \cdot 4}{4\frac{4}{5}} = \frac{30 \cdot 4 \cdot 5}{24} = 25 \text{ Pfd. für 4 Rubel.}$$

6) Es verkauft Jemand den Centner Waare für $69\frac{3}{8}$ Thlr. und verdient dabei $12\frac{1}{2}$%; er will aber künftig 20% verdienen, wie theuer muß er den Centner verkaufen?

$69\frac{3}{8}$ Thlr. ist der Einkauf plus den Gewinn.

100 + $12\frac{1}{2}$ ist auch Einkauf plus Gewinn, also

$112\frac{1}{2}$ geben $69\frac{3}{8}$, was geben 120?

$$\frac{69\frac{3}{8} \cdot 120}{112\frac{1}{2}} = \frac{555 \cdot 120 \cdot 2}{8 \qquad 225} = \frac{222}{3} = 74 \text{ Thlr.}$$

B. Verlust.

a) Der Verlust wird gesucht.

§ 119.

Der Verlust ist gleich dem Einkaufspreise minus den Verkaufspreis. Ist der Verlust in Procenten angegeben, so muß er wie beim Gewinn § 116 nach dem Einkaufspreise, nicht nach dem Verkaufspreise berechnet werden, wobei für den Procentfuß der Einkaufspreis 100 ist. Fehlt der wirkliche Einkaufspreis, so muß er vorher aus den gegebenen Sätzen gesucht werden.

1) Der Centner einer Waare wird für 50 Thlr. eingekauft und das Pfd. muß zu 12 Sgr. verkauft werden; wieviel beträgt der Verlust?

100 Pfd. à 12 Sgr. = 1200 Sgr. = 40 Thlr. Verkauf.
50 „ Einkauf.
10 Thlr. Verlust.

2) Eine Partie Waare wird für $175\frac{1}{2}$ Gulden eingekauft und für $146\frac{1}{4}$ Gulden verkauft, wieviel Procent sind daran verloren?

$175\frac{1}{2}$ Gld. Einkauf — $146\frac{1}{4}$ Guld. Verkauf = $29\frac{1}{4}$ Guld. Verlust.

$175\frac{1}{2}$ Gld. Einkauf geben $29\frac{1}{4}$ Gld. Verlust; 100 Gld. Einkauf geben wieviel?

$$\frac{29\frac{1}{4} \cdot 100}{175\frac{1}{2}} = \frac{117 \cdot 100 \cdot 2}{4 \qquad 351} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}\,\%\text{ Verlust.}$$

3) Eine Partie Waare wird mit 29 Mark Verlust für $79\frac{3}{4}$ Mark verkauft; wieviel Procent sind daran verloren?

$79\frac{3}{4}$ Mrk. Verkauf + 29 Mrk. Verlust = $108\frac{3}{4}$ Mrk. Einkauf; also $108\frac{3}{4}$ Mrk. Einkauf geben 29 Mrk. Verlust, 100 Mrk. Einkauf geben wieviel?

$$\frac{29 \cdot 100}{108\frac{3}{4}} = \frac{29 \cdot 100 \cdot 4}{435} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}\,\%\text{ Verlust.}$$

4) Es kauft Jemand 400 Flaschen Champagner für 620 Francs; er kann die Flasche nur zu $1\frac{1}{2}$ Franc verkaufen und 28 Flaschen sind ihm zerbrochen; wieviel Procent Verlust hat er?

400 Flsch. — 28 Flsch. = 372 Flsch. à $1\frac{1}{2}$ Frc. = 558 Frcs.

620 Frcs. Einkauf — 558 Frcs. Verkauf = 62 Frcs. Verlust; 62 Frcs. Verlust ist $\frac{1}{10}$ von 620 Frcs., $\frac{1}{10}$ von 100 ist 10 % Verlust.

5) Ein Goldarbeiter läßt 100 Medaillen prägen, von denen ihm jede an Silber $1\frac{1}{2}$ Thlr. und an Arbeitslohn $22\frac{1}{2}$ Sgr. kostet. Er verkauft 40 Medaillen mit 20% Gewinn, von den übrigen muß er aber die Hälfte für den Kostenpreis, die andere Hälfte für den Silberwerth verkaufen; wieviel Procent Verlust hat er?

1 Thlr. 15 Sgr. + $22\frac{1}{2}$ Sgr. = 2 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf. = $2\frac{1}{4}$ Thlr. Einkauf einer Medaille.

40 Medaillen à $2\frac{1}{4}$ Thlr.	=	90 Thlr.	
20 % Gewinn = $\frac{1}{5}$ von 90	=	18 „	
30 Medaillen à $2\frac{1}{4}$ Thlr.	=	67 „	15 Sgr.
30 do. à $1\frac{1}{2}$ „	=	45 „	
		220 Thlr.	15 Sgr. Verkauf.
100 Medaillen à $2\frac{1}{4}$ „	=	225 „	— „ Einkauf.
		4 Thlr.	15 Sgr. Verlust.

225 Thlr. Einkauf geben $4^1/_2$ Thlr. Verlust; 100 Thlr. Einkauf geben wieviel Verlust?

$$\frac{4^1/_2 \cdot 100}{225} = \frac{9 \cdot 100}{2 \cdot 225} = 2\,\%\ \text{Verlust.}$$

6) Wenn eine Partie Weizen zu $62^2/_3$ Thlrn. verkauft wird, so verliert der Verkäufer 6%; wieviel verliert er, wenn er den Weizen zu $57^1/_3$ Thlrn. verkaufen muß?

100 Thlr. Einkauf — 6 Thlr. Verlust geben 94% Verkauf.
also $62^2/_3$ Thlr. Verkauf geben 94% Verkauf, was geben $57^1/_3$ Thlr. Verkauf?

$$\frac{94 \cdot 57^1/_3}{62^2/_3} = \frac{94 \cdot 172 \cdot 3}{3 \quad 188} = 86\,\%\ \text{Verkauf.}$$

100 Thlr. Einkauf — 86 Thlr. Verkauf geben 14% Verlust.

b) Der Einkaufspreis wird gesucht.

§ 120.

Der Einkaufspreis wird gefunden, wenn man den Verlust zum Verkaufspreis addirt. Beim Berechnen nach Procenten wird 100 als Einkaufspreis, 100 — Procentfuß als Verkaufspreis angenommen. Ist der Verlust und der Procentfuß allein gegeben, so bildet 100 als Einkaufspreis den fehlenden 3ten Satz.

1) 2 Hekto Wein werden für 80 Thlr. mit einem Verlust von 1 Sgr. 6 Pf. pro Liter verkauft; was haben die 2 Hekto im Einkauf gekostet?

2 Hekto = 200 Liter; 200 Liter à $1^1/_2$ Sgr. = 300 Sgr. = 10 Thlr. Verlust; 80 Thlr. Verkauf + 10 Thlr. Verlust geben 90 Thlr. Einkauf.

2) 1 Pfd. einer Waare wird mit $1^1/_2$ Sgr. unter dem Einkaufspreise für $7^1/_2$ Sgr. verkauft; was hat der Centner im Einkauf gekostet?

$7^1/_2$ Sgr. Verkauf + $1^1/_2$ Sgr. Verlust = 9 Sgr. Einkauf; 9 Sgr. × 100 = 900 Sgr. = 30 Thlr. Einkauf für den Centner.

3) 1 Centner Kaffee wird mit einem Verlust von $^1/_8$ des Einkaufspreises zu $22^3/_4$ Thalern verkauft, was hat der Centner im Einkauf gekostet?

$22^3/_4$ Thlr. = $^7/_8$ des Einkaufspreises ($^1/_8$ ist Verlust).

Sind $^7/_8$ = $22^3/_4$ Thlr., so ist $^1/_8$ = $22^3/_4 : 7 = 3^1/_4$ Thlr.; und $^8/_8$ = 26 Thlr. Einkauf für den Centner.

4) Eine Partie Waare wird mit 10% Verlust für 84 Gulden verkauft; was hat sie im Einkauf gekostet?

100 Gld. Einkauf — 10 Gld. Verlust = 90 Gld. Verkauf;

also 90 Gld. Verkauf geben 100 Gld. Einkauf, was geben 84 Gld. Verkauf?

$$\frac{100 \cdot 84}{90} = \frac{280}{3} = 93^1/_3\ \text{Gld. Einkauf.}$$

5) Ein Kaufmann verkauft eine Partie Waare $20^2/_3$ Frcs. billiger, als er sie eingekauft hat, und verliert dabei $16^2/_3$%; wie theuer hat er die Waare eingekauft?

$20^2/_3$ Frcs. billiger, sind $20^2/_3$ Frcs. wirklicher Verlust beim Verkauf der ganzen Waare; $16^2/_3$ % Verlust sind von 100 Frcs. Einkauf gerechnet, also $16^2/_3$ Frcs. Verlust geben 100 Frcs. Einkauf, $20^2/_3$ Frcs. Verlust geben wieviel Einkauf?

$$\frac{100 \cdot 20^2/_3}{16^2/_3} = \frac{100 \cdot 62 \cdot 3}{3 \quad 50} = 124 \text{ Frcs. Einkauf der Waare.}$$

c) Der Verkaufspreis wird gesucht.

§ 121.

Der Verkaufspreis wird gefunden, wenn man den Verlust vom Einkaufspreise subtrahirt. Beim Berechnen nach Procenten können 2 verschiedene Wege eingeschlagen werden: entweder man berechnet aus 100, als Einkaufspreis, und dem Procentfuß den wirklichen Verlust und zieht diesen von dem wirklichen Einkaufspreise ab; oder man berechnet direkt aus 100, als Einkaufspreis, und 100 minus Procentfuß den wirklichen Verkaufspreis. Das erste Verfahren ist vorzuziehen, weil man bei demselben mit kleineren Zahlen zu thun hat.

1) 150 Meter Seidenzeug werden für 164 Thlr. 15 Sgr. gekauft, Transport und andere Unkosten betragen 10 Thlr. 15 Sgr.; das Meter muß 5 Sgr. billiger verkauft werden, als es gekostet hat, zu welchem Preise ist es verkauft worden?

164 Thlr. 15 Sgr. für Zeug + 10 Thlr. 15 Sgr. Unkosten = 175 Thlr. Einkauf.
150 Meter à 5 Sgr. = 25 „ Verlust.
150 Thlr. Verkauf.

1 Meter ist also für 1 Thlr. verkauft worden.

2) 1 Groß neusilberner Feuerzeuge wird für 72 Thlr. gekauft und das Stück mit einem Verlust verkauft, der $^1/_8$ des Verkaufspreises beträgt; wie theuer ist das Stück verkauft?

Wenn der Verlust $^1/_8$ des Verkaufspreises beträgt, so ist der Verkaufspreis plus den Verlust = $^9/_8$ = dem Einkaufspreise. Also 72 Thlr. : 9 = 8 Thlr. der Verlust und 8 × 8 Thlr. = 64 Thlr. der Verkaufspreis.

$$64 \text{ Thlr.} : 144 = \frac{64}{144} = {}^4/_9 \text{ Thlr.} = 13 \text{ Sgr. } 4 \text{ Pf. Verkaufspreis für 1 Feuerzeug.}$$

3) 4 Ctnr. Waare werden für $87^1/_2$ Thlr. eingekauft und mit 16 % Verlust verkauft; welches ist der Verkaufspreis?

100 Thlr. Einkauf geben 16 Thlr. Verlust; $87^1/_2$ Thlr. Einkauf geben wieviel Verlust?

$$\frac{16 \cdot 87^1/_2}{100} = \frac{16 \cdot 175}{100 \quad 2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ Thlr. Verlust.}$$

$87^1/_2$ Thlr. Einkauf — 14 Thlr. Verlust = $73^1/_2$ Thlr. Verkauf.

Oder 100 Thlr. Einkauf — 16 Thlr. Verlust = 84 Thlr. Verkauf;

also 100 Thlr. Einkauf geben 84 Thlr. Verkauf, welchen Verkauf geben $87^1/_2$ Thlr. Einkauf?

$$\frac{84 \cdot 87^1/_2}{100} = \frac{84 \cdot 175}{100 \cdot 2} = \frac{147}{2} = 73^1/_2 \text{ Thlr. Verkauf.}$$

4) Ein Weinhändler kauft 4 Hekto Wein à $40^1/_2$ Thlr.; die Steuer beträgt $3^1/_3$%, die Fracht 7 Thlr. 18 Sgr. Der Wein muß mit $11^2/_3$% Verlust verkauft werden, was ist für die 4 Hekto eingenommen?

$40^1/_2$ Thlr. $\times$ 4 = 162 Thlr. Zahlung für den Wein.

$3^1/_3$% in 100 = 30; 162 Thlr. : 30 = $5^2/_5$ Thlr. Steuer.

162 Thlr. Wein + $5^2/_5$ Thlr. Steuer + $7^3/_5$ Thlr. Fracht = 175 Thlr. Einkauf.

100 Thlr. Einkauf geben $11^2/_3$ Thlr. Verlust; 175 Thlr. Einkauf geben wieviel?

$$\frac{11^2/_3 \,.\, 175}{100} = \frac{35 \,.\, 175}{3 \,.\, 100} = \frac{245}{12} = 20^5/_{12} \text{ Thlr. Verlust.}$$

175 Thlr. Einkauf — $20^5/_{12}$ Thlr. Verlust = $154^7/_{12}$ Thlr. Verkauf.

5) Ein Faß Butter soll mit Verlust verkauft werden: wird es mit 4% Verlust verkauft, so kostet das Pfund 9 Sgr. im Verkauf; es muß aber mit $14^2/_3$% Verlust verkauft werden, was kostet nun das Pfd. im Verkauf?

100 Thlr. Einkauf geben bei 4% Verlust 100 — 4 = 96% Verkauf und bei $14^2/_3$% Verlust 100 — $14^2/_3$ = $85^1/_3$ Verkauf, also:

96% Verkauf geben 9 Sgr., $85^1/_3$% Verkauf geben wieviel?

$$\frac{9 \text{ Sgr.} \,.\, 85^1/_3}{96} = \frac{9 \,.\, 256}{96 \quad 3} = 8 \text{ Sgr.}$$

C. Gewinn und Verlust.

§ 122.

1) Jemand verkaufte früher eine Robe für 36 Thlr. 18 Sgr. und verdiente dabei 35%; jetzt will er sie mit 10% Verlust verkaufen, zu welchem Preise muß dies geschehen?

Man kann aus dem Gewinne und dem Verkaufspreise den Einkaufspreis berechnen und dann aus diesem und dem Verlust den anderen Verkaufspreis suchen; allein dieses Verfahren ist zu umständlich. Man sagt dagegen: 100 Thlr. Einkauf haben früher 135% Verkauf gegeben und es ist die Robe mit $36^3/_5$ Thlrn. verkauft worden; jetzt sollen 100 Thlr. Einkauf 90% Verkauf geben, zu welchem Preise ist die Robe nun zu verkaufen?

135% geben $36^3/_5$ Thlr., was geben 90%?

$$\frac{36^3/_5 \text{ Thlr.} \,.\, 90}{135} = \frac{183 \,.\, 90}{5 \,.\, 135} = \frac{122}{5} = 24^2/_5 \text{ Thlr.}$$

2) Es verkauft Jemand die Robe für 36 Thlr. 18 Sgr. und gewinnt dabei 35%, später verkauft er sie für 24 Thlr. 12 Sgr.; mit wieviel Procent Gewinn oder Verlust verkauft er sie nun?

$36^3/_5$ Thlr. geben 135%, was geben $24^2/_5$ Thlr.

$$\frac{135 \,.\, 24^2/_5}{36^3/_5} = \frac{135 \,.\, 122 \,.\, 5}{5 \,.\, 183} = 90\%;\ 100 - 90 = 10\% \text{ Verlust.}$$

3) Es sollte Jemand den Centner Waare für 57 Thlr. 15 Sgr. verkaufen und hätte dann 8 % Verlust gehabt; jetzt verkauft er den Centner mit 22 % Gewinn, wieviel erhält er nun für den Centner?

92 % geben $57^1/_2$ Thlr., 122 % geben wieviel?

$$\frac{57^1/_2 \;.\; 122}{92} = \frac{115 \;.\; 122}{2 \;.\; 92} = \frac{305}{4} = 76^1/_4 \text{ Thlr.}$$

4) Es verkauft Jemand den Centner Waare für 57 Thlr. 15 Sgr. und hat dabei 8 % Verlust; später erhält er 76 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf. für den Centner, wieviel Procent gewinnt oder verliert er nun?

$57^1/_2$ Thlr. geben 92 %, $76^1/_4$ Thlr. geben wieviel?

$$\frac{92 \;.\; 76^1/_4}{57^1/_2} = \frac{92 \;.\; 305 \;.\; 2}{4 \;\; 115} = 122\,\%;$$ 22 % mehr als 100, also 22 % Gewinn.

V. Die Zinsrechnung.

§ 123.

Wer Gelder, Capitalien ausleihet, erhält dafür eine Vergütigung, die man Zinsen (Interessen) nennt. Der Verleiher heißt dem Entleiher gegenüber Creditor oder Gläubiger und der letztere ist des ersteren Debitor oder Schuldner.

Die Zinsen werden gewöhnlich nach Hundert bestimmt, also in Procenten ausgedrückt. Die Zahl, welche die Höhe der Procente angiebt, wird der Zinsfuß, Procentsatz oder Procentfuß genannt; er ist immer auf 1 Jahr gemeint, wenn nicht ausdrücklich eine andere Zeit angegeben ist.

Die Zinsrechnung umfaßt 4 verschiedene Fälle:

1) Das Capital, der Zinsfuß und die Zeit sind gegeben, es sollen die Zinsen gesucht werden. 2) Das Capital, die Zinsen und die Zeit sind gegeben, es soll der Zinsfuß gesucht werden. 3) Die Zinsen, der Zinsfuß und die Zeit sind gegeben, es soll das Capital gesucht werden. 4) Das Capital, der Zinsfuß und die Zinsen sind gegeben, es soll die Zeit gesucht werden.

A. Die Zinsen werden gesucht:

a) Auf 1 Jahr.

§ 124.

Die Zinsen auf 1 Jahr können, wie die in Procenten ausgedrückten Theile einer Quantität § 114, mittelst der Regeldetri gefunden werden. Ist z. B. ein Capital von 8765 Thlrn. zu 4 % ausgeliehen und will man wissen, wie hoch die Zinsen für dasselbe sich auf 1 Jahr belaufen, so kann man ansetzen:

100 Thlr. Capital geben 4 Thlr. Zinsen, 8765 Thlr. Capital geben wieviel Zinsen?

$$\frac{4 \text{ Thlr.} \;.\; 8765}{100} = \frac{1753}{5} = 350^3/_5 \text{ Thlr.}$$

In der Praxis löst man jedoch dergleichen Aufgaben nicht durch die Regeldetri, sondern wendet, gestützt auf dieselbe, folgende 3 Verfahrungsweisen an.

1) Man sieht zu, ob der Zinsfuß in 100 dividirt einen bequemen Divisor giebt (§ 114), durch den man dann das Capital dividirt.

4% sind 25 mal in 100 enthalten, also:

$$8765 : 25 = \frac{8765}{25} = \frac{1753}{5} = 350^3/_5 \text{ Thlr.}$$

2) Man dividirt das Capital durch 100 und multiplicirt den dadurch entstehenden Decimalbruch mit dem Zinsfuß.

$$8765 : 100 = 87{,}65; \quad 87{,}65 \times 4 = 350{,}60 \text{ Thlr.} = 350^3/_5 \text{ Thlr.}$$

3) Man multiplicirt das Capital mit dem Zinsfuß und dividirt dies durch 100; vorher bildet man jedoch einen Bruchansatz, den man so viel als möglich aufhebt.

$$\frac{8765 \text{ Thlr.} \,.\, 4}{100} = \frac{1753}{5} = 350^3/_5 \text{ Thlr.}$$

Will man also die Zinsen von einem Capital auf 1 Jahr berechnen, so sucht man zuerst das 1ste Verfahren in Anwendung zu bringen. Zu dem Ende muß man den Divisor derjenigen Zinsfüße, die sich dazu eignen, möglichst im Kopfe haben; er ist nämlich von $1^1/_3$%, 75; von $1^2/_3$%, 60; von 2%, 50; von $2^1/_2$%, 40; von $3^1/_3$%, 30; von $3^3/_4$%, $^{80}/_3$; von 4%, 25; von $4^1/_6$%, 24; von 5%, 20; von $6^1/_4$%, 16; von $6^2/_3$%, 15; von $7^1/_2$%, $^{40}/_3$; von $8^1/_3$%, 12; von 10%, 10; von $12^1/_2$%, 8 u. s. w.

Von 9424 Thlrn. Capital, zu $3^3/_4$% ausgeliehen, werden also die Zinsen sein:

$$\begin{array}{l} 9424 \text{ Thlr.} : {}^{80}/_3 \\ \underline{\qquad\qquad} : 8 \text{ (und 10)} \\ 117{,}8 \times 3 \\ \hline 353{,}4 \text{ Thlr.} = 353 \text{ Thlr. 12 Sgr.} \end{array}$$

Das 2te Verfahren wendet man an, wenn der Zinsfuß eine ganze Zahl ist, die keinen bequemen Divisor in 100 giebt, oder wenn der Zinsfuß eine gemischte Zahl ist, deren Bruch sich leicht zerlegen läßt:

8275 Mark Bco. zu 3% geben in 1 Jahr

$$82{,}75 \times 3 = 248{,}25 = 248^1/_4 \text{ Mark Bco. Zinsen.}$$

12487 Guld. zu $6^3/_4$% geben in 1 Jahr

$$\begin{array}{rl} 124{,}87 \times 6 & \\ \hline 749{,}22 & = 6\% \\ 62{,}435 & = {}^1/_2\% \quad (124{,}87 : 2) \\ 31{,}217 & = {}^1/_4\% \quad (62{,}435 : 2) \\ \hline 842{,}872 \text{ Gld.} & = 842 \text{ Gld. } 52{,}3 \text{ Kr. Zinsen.} \end{array}$$

Das 3te Verfahren wird in allen übrigen Fällen angewendet.

21525 Francs zu $3^5/_7$% geben in 1 Jahr

$$\frac{21525 \,.\, 3^5/_7}{100} = \frac{21525 \,.\, 26}{100 \,.\, 7} = \frac{1599}{2} = 799^1/_2 \text{ Francs Zinsen.}$$

§ 125.

Sind dem Capital kleine Münzsorten beigefügt, was bei großen Capitalien selten vorkommt, so werden sie in einen Bruch (am besten in einen Decimalbruch) der höchsten Benennung verwandelt, sobald es darauf ankommt, die genauen Zinsen auf Pfennige und Bruchpfennige zu berechnen, wie es bei den Behörden gewöhnlich der Fall ist. Im Geschäftsleben werden jedoch Münzsorten, wenn sie unter $^1/_2$ der höchsten gleichartigen Sorte sind, als Null, wenn sie $^1/_2$ oder darüber sind, als ein Ganzes betrachtet. 13 Sgr. = 0 Thlr., 22 Kr. = 0 Gld.; 22 Sgr. = 1 Thlr., 43 Kr. = 1 Guld. u. s. w. Ebenso werden Brüche der kleinsten Benennung, wenn sie $^1/_2$ oder darüber sind, als ein Ganzes, unter $^1/_2$ als Null betrachtet. $^2/_3$, $^9/_{16}$, $^{15}/_{19}$ = 1 Thlr.; $^1/_3$, $^7/_{16}$, $^8/_{19}$ = 0 u. s. w.

§ 126.

Für kleinere Beträge ist zu merken: 1 Thlr. zu 5% giebt jährlich $1^1/_2$ Sgr. Zinsen; zu 4%, $1^1/_5$ Sgr.; zu 3%, $^9/_{10}$ Sgr. 1 südd. Gulden giebt jährlich zu 5%, 3 Kr.; zu 4%, $2^2/_5$ Kr.; zu 3%, $1^4/_5$ Kr. 1 österr. Gulden giebt jährlich so viele Kreuzer Zinsen, als die Zahl des Zinsfußes beträgt, also bei 5% 5 Neukreuzer, bei 4% 4 Neukreuzer, bei 3% 3 Neukreuzer u. s. w. Dasselbe ist bei Francs und bei allen Münzsorten der Fall, deren niedere Benennung 100 theilig ist.

b) Auf mehrere Jahre.

§ 127.

Die Zinsen auf mehrere Jahre können mittelst der zusammengesetzten Regeldetri gefunden werden.

Ist z. B. ein Capital von 6457 Thlrn. zu $3^1/_2$% ausgeliehen und will man wissen, wieviel Zinsen dasselbe in $6^1/_4$ Jahren bringt, so kann man ansetzen:

100 Thlr. in 1 Jahr $3^1/_2$ Thlr. Zinsen 6457 „ „ $6^1/_4$ „ ? „ „	Je mehr Capital, je mehr Zinsen; je mehr Jahre, je mehr Zinsen.

$$\frac{3^1/_2 \cdot 6457 \cdot 6^1/_4}{100 \quad 1} = \frac{7 \cdot 6457 \cdot 25}{2 \quad 100 \quad 4} = \frac{45199}{32} = 1412^{15}/_{32} \text{ Thlr.}$$

Man bedient sich der zusammengesetzten Regeldetri jedoch nur in sehr wenigen Fällen; gewöhnlich löst man diese Art Aufgaben in folgender Weise:

1) Giebt der Zinsfuß, oder die Jahre, in 100 dividirt einen bequemen Divisor (§ 124. 1.), so dividirt man mit diesem das Capital und multiplicirt das Ergebniß mit der anderen Zahl (Jahre oder Zinsfuß).

Die vorstehende Aufgabe hiernach gerechnet, giebt:

$6^1/_4$ Jahre sind 16 mal in 100 enthalten (§ 124), also:

6457 : 16
$403^9/_{16}$ zu $6^1/_4$% auf 1 Jahr
× 3
$1210^{11}/_{16}$ auf 3 Jahre
: 6
$201^{75}/_{96}$ auf $^1/_2$ Jahr
$1412^{15}/_{32}$ Thlr. auf $3^1/_2$ Jahre zu $6^1/_4$% oder auf $6^1/_4$ Jahre zu $3^1/_2$%.

Da in den Bruchansätzen die Zahlen nur als unbenannte Zahlen in Betracht kommen, so ist es gleichgültig, welche Zahl man als Jahre und welche als Zinsfuß annimmt, denn 100 Thlr. zu 5% geben in 2 Jahren 10 Thaler

Zinsen und 100 Thlr. zu 2 % geben in 5 Jahren auch 10 Thlr. Zinsen; man kann mithin den Zinsfuß mit den Jahren verwechseln.

2) Wenn der Zinsfuß und die Jahre mit einander multiplicirt eine Zahl geben, die in 100 dividirt einen bequemen Divisor entstehen läßt, so verfährt man genau nach § 124. 1.

8373 Gld. zu 3 % ausgeliehen, geben wieviel Zinsen in $8^1/_3$ Jahren?

$$3 \times 8^1/_3 = 25; \; 25 \text{ in } 100 \text{ giebt } 4, \text{ also:}$$
$$8373 \text{ Gld.} : 4 = 2093^1/_4 \text{ Gld. Zinsen.}$$

100 Thlr. zu 10 % geben in 1 Jahr 10 Thlr. Zinsen und 100 Thlr. zu 5 % geben in 2 Jahren auch 10 Thlr. Zinsen; man kann also die Jahre und den Zinsfuß multipliciren und das Ergebniß als den Zinsfuß für 1 Jahr betrachten, oder den Zinsfuß zu 1 % und Zinsfuß mal Jahre als Jahre annehmen.

3) Wenn sich voraussichtlich in dem zu bildenden Bruchansatz mehrere Zahlen im Zähler und Nenner heben lassen, so multiplicirt man das Capital mit dem Zinsfuß und den Jahren, und dividirt das Resultat durch 100.

9975 Mark sind zu $4^2/_3$ % ausgeliehen, welche Zinsen bringen sie in 8 Jahren?

$$\frac{9975 \,.\, 4^2/_3 \,.\, 8}{100} = \frac{9975 \,.\, 14 \,.\, 8}{100 \quad 3} = 266 \,.\, 14 = 3724 \text{ Mark.}$$

4) Sind die vorigen Fälle nicht in Anwendung zu bringen, so dividirt man das Capital durch 100 und multiplicirt den dadurch entstehenden Decimalbruch mit dem Product aus Zinsfuß mal Jahre.

7677 österr. Gulden sind zu $3^1/_2$ % auf $5^1/_2$ Jahre ausgeliehen, wieviel Zinsen geben sie in der Zeit?

$3^1/_2 \times 5^1/_2$	$76{,}77 \times {}^{77}/_4$ (7677 : 100 = 76,77)
$= \frac{7}{2} \times \frac{11}{2} = \frac{77}{4}$	$\times 11$
	844,47 × 7
	5911,29 : 4
	1477,82 Gld. = 1477 Gld. 82 Neukreuzer.

c) Auf Monate.

§ 128.

Auch auf Monate können die Zinsen mittelst der zusammengesetzten Regeldetri gefunden werden.

7860 Thlr. sind zu $6^2/_3$ % auf 4 Monate ausgeliehen, wieviel Zinsen bringen sie?

100 Thlr. in 12 Mon. $6^2/_3$ Thlr.	}	Je mehr Capital, je mehr Zinsen; je weniger Monate, je weniger Zinsen.
7860 „ „ 4 „ ? „		

$$\frac{6^2/_3 \text{ Thlr.} \,.\, 7860 \,.\, 4}{100 \quad 12} = \frac{20 \,.\, 7860 \,.\, 4}{3 \quad 100 \quad 12} = \frac{524}{3} = 174^2/_3 \text{ Thlr.}$$

Man macht jedoch nur selten den Regeldetri-Ansatz, sondern verfährt auf Grund desselben in folgender Art:

1) Lassen sich voraussichtlich mehrere Zahlen im Zähler und Nenner des zu bildenden Bruchansatzes heben, so multiplicirt man das Capital mit dem Zinsfuß und den Monaten und dividirt dies durch 100 und 12, also durch 1200.

6500 Thlr. zu 4% geben in 9 Monaten wieviel Zinsen?

$$\frac{6500 \cdot 4 \cdot 9}{1200} = 195 \text{ Thlr.}$$

9435 Gulden bringen zu 5% in 10 Monaten welche Zinsen?

$$\frac{9435 \cdot 5 \cdot 10}{1200} = \frac{3145}{8} = 393\tfrac{1}{8} \text{ Gld.}$$

2) Läßt sich voraussichtlich in dem Bruchansatz nichts heben, so nimmt man statt des gegebenen Zinsfußes den Zinsfuß von 3, 4 oder 6% an, um einen kleineren, zum Dividiren bequemeren Nenner zu erhalten, und verwandelt nachher den angenommenen Zinsfuß in den gegebenen um. (3% giebt in 1200 den Divisor 400; 4% 300; 6% 200.)

5741 Thlr. zu $3\frac{1}{2}$% ausgeliehen, geben in $10\frac{1}{3}$ Monaten wieviel Zinsen?
(3%, Divisor 400.)

5741 × $10\frac{1}{3}$
× 10
57410
1913,6 = $\frac{1}{3}$ (5741 : 3)
59323,6 : 400
148,309 = 3%
24,718 = $\frac{1}{2}$% (3% : 6)
173,027 Thlr.

8491 Gulden geben zu $4\frac{2}{5}$% in $8\frac{1}{9}$ Monaten wieviel Zinsen?
(4%, Divisor 300.)

8491 × $8\frac{1}{9}$
× 8
67928
943,4 = $\frac{1}{9}$ (8491 : 9)
68871,4 : 300
229,571 = 4%
22,957 = $\frac{2}{5}$% (4% : 10)
252,528 Gulden.

9053 Mark zu $5\frac{1}{3}$% geben in $11\frac{1}{6}$ Monaten wieviel Zinsen?
(6%, Divisor 200.)

(6% — $\frac{2}{3}$% = $5\frac{1}{3}$.)

9053 × $11\frac{1}{6}$
× 11
99583
1508,8 = $\frac{1}{6}$ (9053 : 6)
101091,8 : 200
505,459 = 6%
56,162 = $\frac{2}{3}$% (6% : 9)
449,297 Mark.

Eignen sich die Monate besser wie der Zinsfuß zur Umwandlung, so kann man jene statt des letzteren nehmen. (§ 127.)

6443 Rubel zu $3\frac{2}{5}$% geben in $6\frac{3}{4}$ Monaten wieviel Zinsen?
(6 Monat, Divisor 200.)

6443 × $\frac{17}{5}$
× 17
109531 : 5
21906,2 : 200
109,531 = 6 Monat
13,691 = $\frac{3}{4}$ Monat (6 Monat : 8)
123,222 Rubel.

§ 129.

Wenn von mehreren Capitalien, welche verschiedene Monate, aber zu gleichem Zinsfuß ausstehen, die Zinsen gesucht werden sollen, so multiplicirt man jedes Capital mit den zugehörigen Monaten, addirt die erhaltenen Zahlen und betrachtet sie als ein Capital, das nun noch mit dem Zinsfuß zu multipliciren und durch 1200 zu dividiren ist. Man führt die Multiplication und Division direkt aus oder nimmt, wie in § 128. 2, einen anderen Zinsfuß an.

5400 Thlr. sind 10 Monate, 6642 Thlr. 8 Monate, und 7956 Thlr. 4 Monate zu 5 % ausgeliehen, wieviel Zinsen bringen sie zusammen?

$$\begin{aligned} 5400 \times 10 &= 54000 \\ 6642 \times 8 &= 53136 \\ 7956 \times 4 &= 31824 \\ &\overline{138960} \end{aligned}$$

Durch direkte Multiplication und Division:

$$\frac{138960 \times 5}{1200} = 579 \text{ Thlr.}$$

Durch Annahme von 6 %:

$$\begin{aligned} &138960 : 200 \\ &\overline{694{,}80} \;: 6 = 6\,\% \\ &115{,}8 \quad\;\; = 1\,\% \end{aligned} \Big\} \; 5\,\%$$

$$\overline{579{,}00} \text{ Thlr.}$$

§ 130.

Im kaufmännischen Verkehr kommt es zuweilen vor, daß der Zinsfuß für einen Monat gerechnet wird; man nennt dies Zinsen pro mese (p. m.). Sie werden ebenso wie in § 127 berechnet, weil man die gegebenen Monate als Jahre betrachten kann.

315 Thlr. zu $^2/_3$ % p. m. geben in $4^1/_2$ Monaten wieviel Zinsen?

$$^2/_3 \times 4^1/_2 = 3\,\%; \quad 3{,}15 \times 3 = 9{,}45 \text{ Thlr. Zinsen.}$$

6258 Gld. zu $^5/_9$ % p. m. geben wieviel Zinsen in $7^1/_2$ Monaten?

$$\frac{6258 \,.\, ^5/_9 \,.\, 7^1/_2}{100} = \frac{6258 \,.\, 5 \,.\, 15}{100 \quad 9 \quad 2} = \frac{1043}{4} = 260^3/_4 \text{ Gld. Zinsen.}$$

§ 131.

Für kleinere Beträge ist zu merken:

Bei Thalern. So viel Procent jährlich, so viel mal $2^1/_2$ Sgr. oder Ngr. monatlich; also bei 6 % 15 Sgr., bei 5 % $12^1/_2$ Sgr., bei 4 % 10 Sgr. u. s. w.

Bei südd. Gulden. So viel Procent jährlich, so viel mal 5 Kr. monatlich; also bei 6 % 30 Kr., bei 5 % 25 Kr., bei 4 % 20 Kr. u. s. w.

Bei österr. Gulden. So viel Procent jährlich, so viel mal $8^1/_3$ Neukrz. monatlich; also bei 6 % 50 Neukr., bei 5 % $41^2/_3$ Neukr., bei 3 % 25 Nkr. u. s. w.

Bei Mark Bco. So viel Procent jährlich, so viel mal $1^1/_3$ Schill. monatlich; also bei 6 % 8 Schill., bei 3 % 4 Schill. u. s. w.

Ferner: 1 Thlr.	giebt bei 5 %	monatlich	$1^1/_2$	Pf.
1 südd. Guld.	„ 5 %	do.	1	„
1 österr. Gld.	„ 6 %	do.	$^1/_2$	Neukr.

d) Auf Tage.

§ 132.

Im gewerblichen und kaufmännischen Verkehr wird bei der Zinsrechnung das Jahr zu 360 Tagen und der Monat zu 30 Tagen angenommen. Werden

die Tage nach dem Datum bestimmt, so bringt der Tag, an welchem das Capital ausgeliehen wird, Zinsen, der Tag, an welchem es gezahlt wird, aber nicht. Wenn man das Datum beider Tage richtig addirt oder subtrahirt, so ergiebt dies gerade die Tage, welche man ohne Rücksicht auf den Zahlungstag annehmen muß. Vom 8ten bis 23sten September sind 23 — 8 = 15 Tage, eigentlich aber den 23sten mitgerechnet, 16 Tage; dies ist der Zahltag, der nicht in Rechnung kommt. Daher sind vom 23sten Juli bis 8ten November 105 Tage; denn 30 — 23 = 7 Tage pro Juli, dazu 90 Tage für August, September, October, und 8 Tage vom 30sten October bis 8ten November. Vom 1sten November bis 8ten November sind nicht 8, sondern 7 Tage, denn 8 — 1 = 7. Diese Rechnungsweise ist wohl zu beachten. In England (auch bei den Kaufleuten daselbst) und gewöhnlich auch bei allen Behörden wird das Jahr zu 365 Tagen angenommen und die Monate werden nach ihren wirklichen Tagen gezählt. Ob der Zahltag gerechnet wird oder nicht, bestimmt dann die Behörde.

§ 133.

Die Zinsen auf Tage können ebenfalls mittelst der zusammengesetzten Regeldetri gefunden werden.

8463 österr. Gulden zu $2^2/_3$ % geben in 162 Tagen wieviel Zinsen?

100 Gld. in 360 Tag. $2^2/_3$ Gld. Zinsen. ⎫ Je mehr Capital, je mehr Zinsen;
8463 „ „ 162 „ ? „ „ ⎭ je weniger Tage, je weniger Zinsen.

$$\frac{2^2/_3 \,.\, 8463 \,.\, 162}{100 \quad 360} = \frac{8 \,.\, 8463 \,.\, 162}{3 \quad 100 \quad 360} = \frac{5642 \,.\, 9}{500} = 101{,}55 \text{ Gld.} = 101 \text{ Gld. } 55 \text{ Nkr.}$$

Man macht aber auch hier selten den Regeldetri-Ansatz, sondern verfährt auf Grund desselben in folgender Art:

1) Lassen sich voraussichtlich in dem zu bildenden Bruchsatze Zahlen im Zähler und Nenner heben, so multiplicirt man das Capital mit dem Zinsfuß und den Tagen und dividirt das Ergebniß durch 100 und 360, also durch 36000.

Wieviel Zinsen geben 6900 südd. Gulden zu 5 % in 80 Tagen?

$$\frac{6900 \,.\, 5 \,.\, 80}{36000} = \frac{230}{3} = 76^2/_3 \text{ Gld.} = 76 \text{ Gld. } 40 \text{ Krz.}$$

Welche Zinsen bringen 9540 Mark zu $3^1/_3$ % in 84 Tagen?

$$\frac{9540 \,.\, 3^1/_3 \,.\, 84}{36000} = \frac{9540 \,.\, 10 \,.\, 84}{36000 \,.\, 3} = \frac{742}{10} = 7^1/_5 \text{ Mark.}$$

74 1/5

2) Wenn sich voraussichtlich in dem Bruchsatz nichts heben läßt, so nimmt man, wie bei den Monaten, 3, 4 oder 6 % als Zinsfuß an und verwandelt nachher diese zu dem gegebenen Zinsfuß.

(3 %, Divisor 12000; 4 %, Divisor 9000; 6 %, Divisor 6000.)

8753 Rubel sind zu $3^1/_2$ % ausgeliehen; wieviel Zinsen geben sie in 79 Tagen?

```
  8753 × 80            ⎫
  700240               ⎬ × 79
   8753 (1 × 8753)     ⎭
  691487 : 9000
   76,8319 = 4 %                  ⎫
    9,6039 = 1/2 % (4 % : 8)      ⎭ 3 1/2 %
   67,2280 Rubel = 67 Rubel 23 Kopeken.
```

Wieviel Zinsen geben 9751 Gulden zu $5\frac{1}{4}\%$ in 217 Tagen?

$$\begin{array}{l} 9751 \times 217 \quad (7 \text{ in } 21 = 3) \\ \quad \times 7 \\ 68257 \times 3 \\ 204771 \quad (1 \text{ Stelle links}) \\ 2115967 : 6000 \\ 352,6611 = 6\% \\ \ \ 44,0826 = \tfrac{3}{4}\% \ (6\% : 8) \\ 308,5785 \text{ Gld.} = 308 \text{ Gld. } 34 \text{ Kr. } 3 \text{ Pf.} \end{array} \Bigg\} 5\tfrac{1}{4}\%$$

3) Wenn sich die Tage so zerlegen lassen, daß der erste Theil ein aliquoter Theil von 12000, 9000 oder 6000 ist und die anderen Theile der Tage aliquote Theile des ersten Theils sind, so hebt man den ersten Theil gegen jene Zahlen auf, um einen kleineren Multiplicator und Divisor zu erhalten.

Wieviel Zinsen geben 9943 Mark zu $3\frac{1}{2}\%$ in 187 Tagen?

$3\frac{1}{2}\%$ läßt sich leicht von 4% umwandeln, und zu diesem gehört der Divisor 9000; 187 Tage können in 180 + 6 + 1 zerlegt werden; 180 gegen 9000 gehoben, giebt den Multiplicator 2 und den Divisor 100. (6 ist $\frac{1}{30}$ von 180 und 1 ist $\frac{1}{6}$ von 6; 9943 : 100 = 99,43.)

$$\begin{array}{l} 99,43 \times 2 = \times 180 \text{ Tage} \\ 198,86 : 30 = \times \ \ 6 \text{ Tage} \\ \ \ 6,628 : 6 = \times \ \ 1 \text{ Tag} \\ \ \ 1,104 \end{array} \Bigg\} \times 187 \text{ Tage}$$

$$\begin{array}{l} 206,592 = 4\% \\ \qquad : 8 \\ \ \ 25,824 = \tfrac{1}{2}\% \end{array} \Bigg\} 3\tfrac{1}{2}\%$$

$$180,768 \text{ Mark } 12 \text{ Schill. } 3 \text{ Pf.}$$

4) Lassen sich die vorstehenden drei Verfahrungsarten nicht vortheilhaft anwenden, so bildet man nach dem ersten Verfahren einen Bruchsatz und führt, wenn große Zahlen entstehen, die Multiplication und Division mittelst Logarithmen aus.

§ 134.

Wenn von mehreren Capitalien, welche verschiedene Tage, aber zu gleichem Zinsfuße ausstehen, die Zinsen gesucht werden sollen, so multiplicirt man jedes Capital mit den zugehörigen Tagen, addirt die erhaltenen Produkte und betrachtet die Summe als ein Capital, das nun noch mit dem Zinsfuß zu multipliciren und durch 36000 zu dividiren ist. Man führt die Multiplication und Division entweder direkt aus oder nimmt, wie in § 133. 2., einen anderen Zinsfuß an.

4241 Francs sind auf 67 Tage, 3451 Francs auf 53 Tage und 2633 Frcs. auf 47 Tage zu $3\frac{1}{2}\%$ ausgeliehen; wie viele Zinsen geben sie zusammen?

$$\begin{array}{l} 4241 \times 67 = 284147 \\ 3451 \times 53 = 182903 \\ 2633 \times 47 = 123751 \\ \qquad\qquad 590801 : 9000 \\ \qquad\qquad 65,644 = 4\% \\ \qquad\qquad\ \ 8,205 = \tfrac{1}{2}\% \ (4\% : 8) \\ \qquad\qquad 57,439 \text{ Francs} = 57 \text{ Francs } 44 \text{ Centimes.} \end{array}$$

($3\frac{1}{2}\%$.)

§ 135.

Für kleine Beträge ist zu merken:

Bei preuß. Währung, den Thaler zu 30 Sgr. à 12 Pf. So viel Procent jährlich, so viele Pfennige täglich, also bei 6 % 6 Pf., bei 5 % 5 Pf. u. s. w.

Bei Thalern zu 30 Ngr. à 10 Pf. So viel Procent jährlich, so viel mal $^5/_6$ Ngr. täglich, also bei 6 % 5 Pf., bei 5 % $4^1/_6$ Pf. u. s. w.

Bei südd. Gulden. So viel Procent jährlich, so viel mal $^1/_6$ Kr. täglich, also bei 6 % 1 Kr., bei 5 % $^5/_6$ Kr. u. s. w.

Bei österr. Gulden. So viel Procent jährlich, so viel mal $^5/_{18}$ Kr. täglich, also bei 6 % $1^2/_3$ Kr., bei 5 % $1^7/_{18}$ Kr. u. s. w.

e) Auf Monate und Tage.

§ 136.

Sollen die Zinsen auf Monate und Tage gesucht werden, so macht man die Tage zu einem Monatsbruch, wenn derselbe sich noch heben läßt, und verfährt nach § 128. Läßt sich der Monatsbruch nicht heben, so verwandelt man die Monate, wenn es nur wenige sind, zu Tagen und verfährt nach § 133. Beträgt die Zahl der Monate über 7 oder 8 und es läßt sich, wenn die Monate zu Tagen gemacht würden, voraussichtlich in dem zu bildenden Bruchsatz nichts heben, so berechnet man die Zinsen auf 1 Jahr und zerlegt die Monate und Tage in Jahres- und Monatstheile.

Wie viele Zinsen bringen 1253 holl. Gulden zu $3^1/_2$ % in 9 Monaten 13 Tagen?

12,53 (1253 : 100 = 12,53)				
× 3				
37,59 = 3 %				
6,265 = $^1/_2$ % (3 % : 6)				
43,855 = $3^1/_2$ % auf 1 Jahr				
21,928	do.	do.	6 Monate	(1 Jahr : 2)
10,964	do.	do.	3 do.	(6 Mon. : 2)
1,218	do.	do.	10 Tage	(3 Mon. : 9)
0,365	do.	do.	3 do.	(3 Mon. : 30)
34,475 Gld. = 34 Gld. 48 Cents.				

f) Auf Jahre und Monate, und auf Jahre, Monate und Tage.

§ 137.

Sind Jahre und Monate gegeben, so verwandelt man die Monate in einen Jahresbruch, wenn sich derselbe noch heben läßt, und verfährt nach § 127; andernfalls verwandelt man die Jahre zu Monaten und verfährt nach § 128.

Sind Jahre, Monate und Tage gegeben und es läßt sich aus den Monaten und Tagen kein Jahresbruch bilden, der noch gehoben werden kann, so berechnet man die Zinsen auf 1 Jahr, multiplicirt dies mit den gegebenen Jahren und zerlegt die Monate und Tage wie in § 136 zu Jahresbrüchen. Lassen sich die Monate nicht gut zu Jahresbrüchen zerlegen, so sucht man den Werth für einen Monat und multiplicirt dies mit den gegebenen Monaten.

2953 Gulden zu $4\frac{3}{4}$% bringen in 3 Jahren 11 Monaten 7 Tagen wieviel Zinsen?

29,53 (2953 : 100 = 29,53) × 4			
118,12	= 4 %		
14,77	= $\frac{1}{2}$ % = (4 % : 8 oder 29,53 : 2)		
7,38	= $\frac{1}{4}$ % = ($\frac{1}{2}$ % : 2)		
140,27	= $4\frac{3}{4}$ %	auf	1 Jahr
11,69	do.	auf	1 Monat (1 Jahr : 12)
128,58	do.	auf	11 Monate (1 Jahr — 1 Monat)
420,81	do.	auf	3 Jahre (1 Jahr × 3)
2,34	do.	auf	6 Tage (1 Monat : 5)
0,39	do.	auf	1 Tag (6 Tage : 6)
552,12 Gld.	do.	auf	3 Jahre 11 Monate 7 Tage.

Wird die Zerlegung zu zeitraubend und schwierig, so macht man die Jahre und Monate zu Tagen und verfährt wie in § 133. 4.

Soll das Jahr zu 365 Tagen und die Monate nach ihren wirklichen Tagen gerechnet werden, so verfährt man, wenn es möglich, wie oben; in den meisten Fällen wird man aber auch die Jahre und Monate zu Tagen machen und wie in § 133. 4. verfahren müssen.

g) Verschiedene Aufgaben.

§ 138.

1) Eine am 3ten August gemachte Schuld für Waaren beträgt 606 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf.; der Debitor führt am 21sten September die Schuld ab, wieviel Verzugszinsen à 6% hat er zu zahlen?

(Vom 3ten August bis 21sten September sind 48 Tage; 606 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf. = 606,25 Thlr.)

$$\frac{606{,}25 \cdot 6 \cdot 48}{100 \quad 360} = 4{,}85 \text{ Thlr.} = 4 \text{ Thlr. } 25 \text{ Sgr. } 6 \text{ Pf.}$$

2) Wieviel Zinsen bringt ein Capital von 13000 Thlrn. in $6\frac{1}{2}$ Jahren, wenn 5500 Thaler in $4\frac{1}{2}$ Jahren zu demselben Zinsfuß 990 Thlr. gebracht haben?

5500 Thlr. in $4\frac{1}{2}$ Jahren 990 Thlr. Zinsen
13000 „ „ $6\frac{1}{2}$ „ ?
} Je mehr Capital, je mehr Zinsen; je mehr Jahre, je mehr Zinsen.

$$\frac{990 \cdot 13000 \cdot 6\frac{1}{2}}{5500 \cdot 4\frac{1}{2}} = \frac{990 \cdot 13000 \cdot 13 \cdot 2}{5500 \cdot 2 \cdot 9} = 3380 \text{ Thlr. Zinsen.}$$

3) Welche Zinsen erhält man in $4\frac{1}{2}$ Jahren von einem zu 5% ausgegebenen Capital, wenn dasselbe zu 4% in $6\frac{1}{2}$ Jahren 2132 Mark Zinsen gebracht hat?

4% in $6\frac{1}{2}$ Jahren 2132 Mrk. Zinsen
5% in $4\frac{1}{2}$ „ ?
} Je mehr Procent, je mehr Zinsen; je weniger Jahre, je weniger Zinsen.

$$\frac{2132 \cdot 5 \cdot 4\frac{1}{2}}{4 \cdot 6\frac{1}{2}} = \frac{2132 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot 13} = 41 \cdot 5 \cdot 9 = 1845 \text{ Mark.}$$

4) Wieviel Zinsen bringt ein zu $3^1/_2$ % ausgeliehenes Capital in $^2/_3$ der Zeit, in welcher dasselbe Capital, zu $2^1/_2$ % ausgegeben, 360 Rubel bringt?

$2^1/_2$ % in 1 Zeit 360 Rbl. } Je mehr Procent, je mehr Zinsen; je weniger Zeit,
$3^1/_2$ % in $^2/_3$ „ ? } je weniger Zinsen.

$$\frac{360 \,.\, 3^1/_2 \,.\, ^2/_3}{2^1/_2 \,.\, 1} = \frac{360 \,.\, 7 \,.\, 2 \,.\, 2}{2 \,.\, 5 \,.\, 3} = 24 \,.\, 14 = 336 \text{ Rubel.}$$

5) Wieviel Zinsen bringen 8500 Dollar, wenn 3500 Doll. in $^1/_4$ so kurzer Zeit, aber zu demselben Zinsfuß, $122^1/_2$ Doll. bringen?

3500 Doll. in $^1/_4$ Zeit $122^1/_2$ Doll. } Je mehr Capital, je mehr Zinsen; je
8500 „ „ 1 „ ? } mehr Zeit, je mehr Zinsen.

$$\frac{122^1/_2 \,.\, 8500 \,.\, 1}{3500 \,.\, ^1/_4} = \frac{245 \,.\, 8500 \,.\, 4}{2 \quad 3500 \quad 1} = 1190 \text{ Dollar.}$$

6) Wieviel Zinsen erhält man von einem Capital, welches zu $4^1/_2$ % aussteht, in derselben Zeit, in welcher ein halb so großes Capital zu 6 % 342 Francs Zinsen giebt?

$^1/_2$ Capital zu 6 % 342 Frcs. Zinsen. } Je mehr Capital, je mehr Zinsen; je
1 „ „ $4^1/_2$ % ? } weniger Procent, je weniger Zinsen.

$$\frac{342 \,.\, 1 \,.\, 4^1/_2}{^1/_2 \,.\, 6} = \frac{342 \,.\, 2 \,.\, 9}{1 \quad 2 \,.\, 6} = 513 \text{ Francs.}$$

7) Es verleiht Jemand auf 10 Monate eine gewisse Summe zu $3^3/_5$ % und erhält im Ganzen $968^1/_5$ Thlr. zurück; wieviel betrugen hiervon die Zinsen?

Da in den $968^1/_5$ Thlrn. Capital und Zinsen enthalten sind, so muß man auch bei den Procenten Capital und Zinsfuß zusammen in Ansatz bringen; da man aber in allen Fällen, wo Capital und Zinsen zusammengefaßt sind, die Aufgabe nicht nach der zusammengesetzten Regeldetri rechnen darf, weil dann die Zeit, die nur die Zinsen verändern soll, auch das Capital verändern würde, so muß man vorher den Zinsfuß für die gegebene Zeit berechnen. 12 Monate geben $3^3/_5$ Thlr. Zinsen, 10 Monate also $\frac{18 \,.\, 10}{5 \,.\, 12} = 3$ Thlr. Zinsen. Die Aufgabe lautet nun:

103 Thlr. Capital und Zinsen geben 3 Thlr. Zinsen.
$968^1/_5$ „ „ „ „ „ ? „ „

$$\frac{3 \,.\, 968^1/_5}{103} = \frac{3 \,.\, 4841}{5 \,.\, 103} = \frac{141}{5} = 28^1/_5 \text{ Thlr. Zinsen.}$$

Da man jetzt das Capital kennt, nämlich $968^1/_5$ Thlr. — $28^1/_5$ Thlr. = 940 Thlr., so kann man folgende Gegenprobe machen:

100 Thlr. in 12 Mon. $3^3/_5$ Thlr. Zinsen } Je mehr Capital, je mehr Zinsen; je
940 „ „ 10 „ ? } weniger Monate, je weniger Zinsen.

$$\frac{3^3/_5 \,.\, 940 \,.\, 10}{100 \,.\, 12} = \frac{18 \,.\, 940 \,.\, 10}{5 \quad 100 \,.\, 12} = \frac{141}{5} = 28^1/_5 \text{ Thlr. Zinsen.}$$

8) Es verleiht Jemand am 1sten März 1870 10000 Thlr. zu $4\frac{2}{3}$%; am 1sten December desselben Jahres zieht er 3000 Thlr. ein; am 1sten Juni 1871 zieht er wieder 3000 Thlr. ein; die übrigen 4000 Thlr. bleiben bis zum 1sten Januar 1872 stehen. Wieviel betragen die Zinsen zusammen?

10000 Thlr. stehen vom 1sten März bis 1sten December = 9 Monate.	$10000 \times 9 = 90000$
7000 Thlr. vom 1sten December bis 1sten Juni = 6 Monate.	$7000 \times 6 = 42000$
4000 Thlr. vom 1sten Juni bis 1sten Januar 1872 = 7 Monate.	$4000 \times 7 = 28000$
	$160000 : 300$ (§ 128. 2)
	$533{,}33 = 4$%
	$88{,}89 = \frac{2}{3}$% (4% : 6)
	622,22 Thlr. $622\frac{2}{9}$ Thlr. (§ 102)
	= 622 Thlr. 6 Sgr. 8 Pf. Zinsen.

oder: $\frac{1000}{100} \cdot \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{35}{9}$ Thlr. auf 1 Monat für 1000 Thlr.

10000 Thlr. auf 9 Monate $= \frac{35}{9} \times 10 \times 9 = 350$ Thlr.

7000 „ „ 6 „ $= \frac{35}{9} \times 7 \times 6 = 163\frac{1}{3}$ „

4000 „ „ 7 „ $= \frac{35}{9} \times 4 \times 7 = 108\frac{8}{9}$ „

$622\frac{2}{9}$ Thlr.

= 622 Thlr. 6 Sgr. 8 Pf.

B. Der Zinsfuß wird gesucht.

§ 139.

Das Berechnen des Zinsfußes geschieht mittelst der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri. Man könnte für einzelne Fälle auch einfachere Verfahrungsweisen aufstellen; da aber Aufgaben dieser Art im Geschäftsleben wenig vorkommen, so reicht die Anwendung jener beiden Rechnungsarten vollkommen aus.

1) Ein Capital von 7800 Thlrn. hat in einem Jahre 312 Thlr. Zinsen gebracht, zu wieviel Procent ist es ausgeliehen worden?

7800 Thlr. geben 312 Thlr. Zinsen 100 „ „ ?	$\frac{312 \cdot 100}{7800} = 4$%

2) 6450 Guld. bringen in $7\frac{1}{2}$ Jahren $2418\frac{3}{4}$ Guld. Zinsen; zu wieviel Procent steht das Capital aus?

6450 Guld. in $7\frac{1}{2}$ Jahren $2418\frac{3}{4}$ Guld. Zins.
150 „ „ 1 „ ? — Je weniger Capital, je weniger Zinsen; je weniger Jahre, je weniger Zinsen.

$$\frac{2418\frac{3}{4} \cdot 100 \cdot 1}{6450 \cdot 7\frac{1}{2}} = \frac{9675}{4} \cdot \frac{100}{6450} \cdot \frac{1 \cdot 2}{15} = 5\ \%.$$

3) Zu wieviel Procent sind 5700 Francs ausgeliehen worden, wenn sie vom 1sten Juli 1866 bis 1sten April 1867 zu $5849\,^5/_8$ Francs angewachsen sind?

Vom 1sten Juli 1866 bis 1sten April 1867 sind 9 Monate. Wenn 5700 Frcs. in 9 Monaten zu $5849\,^5/_8$ Frcs. angewachsen sind, so betragen die Zinsen auf 9 Monate $5849\,^5/_8$ — 5700 Frcs. = $149\,^5/_8$ Frcs., also:

5700 Frcs. Capital in 9 Mon. $149\,^5/_8$ Frcs. Zinsen.
100 „ „ „ 12 „ ?

Je weniger Capital, je weniger Zinsen; je mehr Monate, je mehr Zinsen.

$$\frac{149\,^5/_8 \cdot 100 \cdot 12}{5700 \cdot 9} = \frac{1179 \cdot 100 \cdot 12}{8 \cdot 5700 \cdot 9} = \frac{133}{8} = 3\,^1/_2\,\%.$$

4) Zu wieviel Procent ist ein Capital, das in 5 Jahren 495 holl. Guld. Zinsen bringt, ausgeliehen, wenn es zu $2\,^1/_2\,\%$ in $7\,^1/_2$ Jahren $506\,^1/_4$ Gld. Zinsen gebracht hat?

$506\,^1/_4$ Gld. Zinsen erfordern in $7\,^1/_2$ Jahren $2\,^1/_2\,\%$.
495 „ „ „ „ 5 „ ?

Je weniger Zinsen, je weniger Procent; je weniger Jahre, je mehr Procent sind erforderlich, um gewisse Zinsen zu erhalten.

$$\frac{2\,^1/_2 \cdot 495 \cdot 7\,^1/_2}{506\,^1/_4 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 495 \cdot 4 \cdot 15}{2 \cdot 2025 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{11}{3} = 3\,^2/_3\,\%.$$

5) Zu wieviel Procent bringen 4200 Rubel Capital 1134 Rubel Zinsen, wenn in derselben Zeit 3500 Rubel Capital zu $4\,^2/_5\,\%$ 924 Rubel Zinsen bringen?

3500 Rbl. Capital erfordern zu 924 Rbl. Zinsen $4\,^2/_5\,\%$.
4200 „ „ „ „ 1134 „ „ ?

Je mehr Capital, je weniger Procent sind erforderlich, wenn bestimmte Zinsen erzielt werden sollen. Je mehr Zinsen, je mehr Procent.

$$\frac{4\,^2/_5 \cdot 3500 \cdot 1134}{4200 \cdot 924} = \frac{22 \cdot 3500 \cdot 1134}{5 \cdot 4200 \cdot 924} = \frac{9}{2} = 4\,^1/_2\,\%.$$

6) Zu wieviel Procent ist ein Capital ausgeliehen, wenn es in 5 Jahren halb so viel Zinsen bringt, als ein ebenso großes Capital zu 6 % in $6\,^2/_3$ Jahren?

1 Zinsen erfordern in $6\,^2/_3$ Jahren 6 %.
$^1/_2$ „ „ „ 5 „ ?

Je weniger Zinsen, je weniger Procent; je weniger Jahre, je mehr Procent. (Vergl. Beispiel 4.)

$$\frac{6 \cdot {}^1/_2 \cdot 6\,^2/_3}{1 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 1 \cdot 20}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 4\,\%.$$

7) Wie hoch ist ein Capital verzinst, wenn es in 8 Jahren so viel Zinsen bringt, wie ein $^2/_3$ mal so großes Capital zu 4 % in 6 Jahren?

$^2/_3$ Capital erfordert in 6 Jahren 4 %.
1 „ „ „ 8 „ ?

Je mehr Capital, je weniger Procent (vergleiche Beispiel 5); je mehr Jahre, je weniger Procent (vergl. Beispiel 4. 6).

$$\frac{4 \cdot {}^2/_3 \cdot 6}{1 \cdot 8} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 6}{3 \cdot 8} = 2\,\%.$$

8) Zu welchem Zinsfuß sind 12000 öſtr. Gld. ausgegeben, wenn ſie 6 mal ſo viel Zinſen bringen, als in derſelben Zeit 5000 öſtr. Gld. zu $2\frac{1}{2}$ %?

5000 öſtr. Gld. erfordern zu 1 Zinſen $2\frac{1}{2}$ %.
12000 „ „ „ „ 6 „ ?
} Je mehr Capital, je weniger Procent (Beiſpiel 5); je mehr Zinſen, je mehr Procent.

$$\frac{2\frac{1}{2} . 5000 . 6}{12000 . 1} = \frac{5 . 5000 . 6}{2 . 12000} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}\ \%.$$

9) Von 1900 Thlrn. ſind 700 Thlr. zu 4 % und 700 zu $4\frac{1}{2}$ % ausgeliehen, die Zinſen von den ganzen 1900 Thlrn. betragen nach 2 Jahren $165\frac{2}{3}$ Thlr.; zu wieviel Procent iſt der Reſt ausgeliehen?

700 Thlr. zu 4 % geben in 1 Jahr 28 Thlr., in 2 Jahren 56 Thlr.
700 „ „ $4\frac{1}{2}$ „ „ „ 1 „ $31\frac{1}{2}$ „ „ 2 „ 63 „
zuſammen 119 Thlr.

$165\frac{2}{3}$ Thlr. Zinſen — 119 Thlr. Zinſen = $46\frac{2}{3}$ Thlr. für den Reſt von 500 Thlrn.

500 Thlr. in 2 Jahr. $46\frac{2}{3}$ Thlr.
100 „ „ 1 „ ?
} Je weniger Capital, je weniger Zinſen; je weniger Jahre, je weniger Zinſen.

$$\frac{46\frac{2}{3} . 100 . 1}{500 . 2} = \frac{140 . 100 . 1}{3 \quad 500 . 2} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}\ \%.$$

10) Ein Capitaliſt hat 800 Francs zu $2\frac{1}{2}$ %, 1000 Francs zu 3 % und 600 Francs zu 5 % ausgeliehen; er will dieſe Capitalien fernerhin zu gleichem Zinsfuß ausgeben, aber dieſelben Zinſen einnehmen. Zu wieviel Procent muß er die Capitalien ausgeben?

800 Frcs.	zu $2\frac{1}{2}$ %	geben	in 1	Jahr	20 Frcs.
1000 „	„ 3 %	„	„ 1	„	30 „
600 „	„ 5 %	„	„ 1	„	30 „
2400 Frcs.		geben	in 1	Jahr	80 Frcs.

Alſo 2400 Frcs. geben in 1 Jahr 80 Frcs. Zinſen; 100 Frcs. geben mithin $^{80}/_{24} = 3\frac{1}{3}$ %.

11) Ein Capitaliſt verleiht 8000 Rubel zu $4\frac{2}{3}$ % und $1333\frac{1}{3}$ Rubel ohne Zinſen; wieviel Procent kann der Verleiher annehmen, die er im Ganzen für ſein ausgeliehenes Geld erhält?

8000 Rbl. zu $4\frac{2}{3}$ % geben $373\frac{1}{3}$ Rbl. Zinſen; beide Summen zuſammen, alſo $9333\frac{1}{3}$ Rbl., eben ſo viel. Folglich:

$9333\frac{1}{3}$ Rbl. geben $373\frac{1}{3}$ Rbl. Zinſen, was geben 100 Rbl.?

$$\frac{100 . 373\frac{1}{3}}{9333\frac{1}{3}} = \frac{100 . 1120 . 3}{3 \quad 28000} = 4\ \%.$$

12) Es hat Jemand 800 ſüdd. Gld. zu $3\frac{1}{2}$ % ausgeliehen; da ihm aber der Zinsfuß zu niedrig iſt, will er ihn ſo erhöhen, daß er in 3 Jahren ſo viel Zinſen, als bisher in 4 Jahren hat; wie hoch muß er den Zinsfuß ſtellen?

800 Gld. zu $3^1/_2$ % geben in 1 Jahr 28 Gld., in 4 Jahren 112 Gld.

112 Gld. in 3 Jahren, giebt in 1 Jahr $37^1/_3$ Gld.

Also 800 Gld. geben $37^1/_3$ Gld., was geben 100 Gld.?

$$\frac{37^1/_3 \cdot 100}{800} = \frac{112 \cdot 100}{3 \cdot 800} = \frac{14}{3} = 4^2/_3\,\%.$$

13) Jemand hat 2 Capitalien, jedes zu 21000 Thlrn., ausgeliehen und erhält von beiden zusammen jährlich $1347^1/_2$ Thlr. Zinsen; von dem einen aber betragen die Zinsen $^1/_3$ mehr als von dem anderen. Zu welchem Zinsfuße sind beide Capitalien ausgeliehen?

Wenn das eine Capital $^3/_3$ Zinsen bringt, dann bringt das andere $^4/_3$, zusammen $^7/_3$.

$1347^1/_2$ Thlr. : 7 = $192^1/_2$ Thlr. Zinsen auf $^1/_3$.

21000 Thlr. geben $192^1/_2$ Thlr.
100 „ „ ?

$$\frac{385 \cdot 100}{2 \cdot 21000} = \frac{11}{12}\ \text{Thlr.}$$

$^{11}/_{12}$ Thlr. $\times$ 3 = $2^3/_4$ % das eine,
$^{11}/_{12}$ „ $\times$ 4 = $3^2/_3$ % das andere Capital.

14) Es hat Jemand 5500 Mark und 2100 Mark ausgeliehen, die zusammen in $2^1/_4$ Jahren $591^3/_4$ Mark Zinsen bringen; der Zinsfuß des zweiten Capitals ist um $1^2/_3$ % höher, als der des ersten. Zu wieviel Procent ist jedes Capital ausgeliehen?

$591^3/_4$ Mark : $2^1/_4$ = 263 Mark Zinsen in 1 Jahr.

Die 2100 Mrk. stehen $1^2/_3$ % höher, also 100 Mrk. geben $1^2/_3$ Mrk.
2100 „ „ ?

$$\frac{5 \cdot 2100}{3 \cdot 100} = 35\ \text{Mrk.}$$

263 Mrk. — 35 Mrk. = 228 Mrk.

Beide Capitalien stehen nun zu gleichen Procenten,

also 7600 Mrk. geben 228 Mrk.
100 „ „ ?

$$\frac{228 \cdot 100}{7600} = 3\,\%.$$

Die 5500 Mark stehen mithin zu 3 %, die 2100 Mark zu $4^2/_3$ % aus.

15) Jemand verleiht 4000 Thlr. am 1sten April 1865 und 2400 Thlr. am 1sten Juli 1866 zu gleichem Zinsfuß. Am 1sten Januar 1868 nimmt er für beide Capitalien 657 Thlr. Zinsen ein; wie hoch waren sie verzinst?

Vom 1sten April 1865 bis 1sten Januar 1868 sind $2^3/_4$ Jahre; vom 1sten Juli 1866 bis 1sten Januar 1868 ist $1^1/_2$ Jahr.

4000 Thlr. bringen in $2^3/_4$ Jahren eben so viel Zinsen, wie 4000 $\times$ $2^3/_4$ = 11000 Thlr. in 1 Jahr; und 2400 Thlr. bringen in $1^1/_2$ Jahren so viel Zinsen, wie 2400 $\times$ $1^1/_2$ = 3600 Thlr. in 1 Jahr.

11000 Thlr. + 3600 Thlr. = 14600 Thlr., also:

14600 Thlr. geben 657 Thlr. Zinsen
100 „ „ ?

$$\frac{657 \cdot 100}{14600} = \frac{657}{146} = 4^1/_2\,\%.$$

C. Das Capital wird gesucht.

§ 140.

Die Aufgaben werden, wie die vorhergehenden, am leichtesten nach der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri gerechnet.

1) Die Zinsen von einem auf 1 Jahr zu 5 % ausgegebenen Capital betragen 270 Thlr.; wie groß ist das Capital?

5 Thlr. geben 100 Thlr. Capital 270 „ „ ?	$\frac{100 \cdot 270}{5} = 5400$ Thlr.

2) Ein zu 5 % auf $7\frac{1}{2}$ Jahre ausgeliehenes Capital bringt $2418\frac{3}{4}$ Gulden Zinsen; wie groß ist das Capital?

5 Gld. erfordern in 1 Jahr 100 Gld. $2418\frac{3}{4}$ „ „ „ $7\frac{1}{2}$ „ ?	Je mehr Zinsen, je mehr Capital; je mehr Jahre, je weniger Capital ist erforderlich, um gewisse Zinsen zu bringen.

$$\frac{100 \cdot 2418\frac{3}{4} \cdot 1}{5 \quad 7\frac{1}{2}} = \frac{100 \cdot 9675 \cdot 2}{5 \cdot 4 \quad 15} = 6450 \text{ Gulden Capital.}$$

3) Eine Waarenschuld wurde 1 Monat 18 Tage zu spät gezahlt und der Creditor berechnete die Zinsen zu 6 % mit 4 Thlrn. 25 Sgr. 6 Pf.; wie groß war die Schuld?

6 Thlr. erfordern in 360 Tagen 100 Thlr. $4\frac{17}{20}$ „ „ „ 48 „ ?	Je weniger Zinsen, je weniger Capital; je weniger Tage, je mehr Capital. (Beispiel 2.)

$$\frac{100 \cdot 4\frac{17}{20} \cdot 360}{6 \quad 48} = \frac{100 \cdot 97 \cdot 360}{20 \cdot 6 \cdot 48} = \frac{2425}{4} = 606\frac{1}{4} \text{ Thlr.}$$

4) Ein Capital von 3600 Rubeln bringt in 3 Jahren 504 Rubel Zinsen; welches Capital bringt zu demselben Zinsfuß in $4\frac{1}{4}$ Jahren $1130\frac{1}{2}$ Rubel Zinsen?

3600 Rbl. in 3 Jahren 504 Rbl. Zinsen ? „ „ $4\frac{1}{4}$ „ $1130\frac{1}{2}$ „ „	Je mehr Jahre, je weniger Capital ist nöthig, um gewisse Zinsen zu bringen; je mehr Zinsen, je mehr Capital.

$$\frac{3600 \cdot 3 \cdot 1130\frac{1}{2}}{4\frac{1}{4} \cdot 504} = \frac{3600 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2261}{17 \quad 2 \cdot 504} = \frac{39900}{7} = 5700 \text{ Rubel Capital.}$$

5) Wie groß ist das Capital, welches in $3\frac{1}{4}$ Jahren zu $4\frac{1}{2}$ % ebenso viel Zinsen bringt, wie 6900 Mark in $8\frac{2}{3}$ Jahren zu $2\frac{1}{4}$ %?

$2\frac{1}{4}$ % erfordern in $8\frac{2}{3}$ Jahren 6900 Mrk. $4\frac{1}{2}$ % „ „ $3\frac{1}{4}$ „ ?	Je mehr Procent, je weniger Capital ist nöthig; je weniger Jahre, je mehr Capital.

$$\frac{6900 \text{ Mrk.} \cdot 2\frac{1}{4} \cdot 8\frac{2}{3}}{4\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{4}} = \frac{6900 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 26 \cdot 4}{4 \cdot 9 \cdot 3 \quad 13} = 9200 \text{ Mark Capital.}$$

6) Wenn ein Capital von 4800 Francs zu $3^3/_4$% in einer gewissen Zeit 1080 Francs Zinsen bringt, wie groß ist dasjenige Capital, das in derselben Zeit zu $4^2/_3$% 756 Francs Zinsen bringt?

1080 Frcs. Zins. erfordern bei $3^3/_4$% 4800 Frcs. Cap. 756 „ „ „ „ $4^2/_3$% ?	Je weniger Zinsen, je weniger Capital; je mehr Procent, je weniger Capital.

$$\frac{4800 \text{ Frcs.} \,.\, 756 \,.\, 3^3/_4}{1080 \,.\, 4^2/_3} = \frac{4800 \,.\, 756 \,.\, 15 \,.\, 3}{1080 \,.\, 4 \,.\, 14} = 2700 \text{ Francs.}$$

Andere Aufgaben dieser Art werden am leichtesten durch Gleichungen gelöst; siehe daselbst § 207.

D. Die Zeit wird gesucht.

§ 141.

Diese Art Aufgaben werden gewöhnlich nach der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri gerechnet.

1) Ein Capital von 6450 Thalern bringt zu 5% $2418^3/_4$ Thlr. Zinsen; wie lange hat es ausgestanden?

100 Thlr. geben 5 Thlr. Zinsen in 1 Jahr 6450 „ „ $2418^3/_4$ „ „ „ ? „	Je mehr Capital, je weniger Jahre (§ 140); je mehr Zinsen, je mehr Jahre.

$$\frac{1 \,.\, 100 \,.\, 2418^3/_4}{6450 \quad 5} = \frac{1 \,.\, 100 \,.\, 9675}{6450 \quad 4 \,.\, 5} = \frac{15}{2} = 7^1/_2 \text{ Jahre.}$$

2) Am 1sten August 1862 sind 6000 Gulden zu $4^2/_3$% ausgeliehen und dafür 980 Gulden Zinsen eingenommen; bis zu welchem Tage hat das Capital ausgestanden?

100 Gld. geben $4^2/_3$ Gld. Zinsen in 1 Jahr 6000 „ „ 980 „ „ „ ? „	Je mehr Capital, je weniger Jahre; je mehr Zinsen, je mehr Jahre.

$$\frac{1 \,.\, 100 \,.\, 980 \,.\, 3}{6000 \quad 14} = \frac{7}{2} = 3^1/_2 \text{ Jahre; also bis zum 1sten Februar 1866.}$$

3) Welche Zeit gebraucht ein Capital von 7800 Mark, um $1228^1/_2$ Mark Zinsen zu bringen, wenn 3400 Mark, zu demselben Zinsfuß, in $2^3/_4$ Jahren $420^3/_4$ Mark Zinsen bringen?

3400 Mrk. geben $420^3/_4$ Mrk. Zins. in $2^3/_4$ Jahren 7800 „ „ $1228^1/_2$ „ „ „ ? „	Je mehr Capital, je weniger Jahre; je mehr Zinsen, je mehr Jahre.

$$\frac{2^3/_4 \,.\, 3400 \,.\, 1228^1/_2}{7800 \,.\, 420^3/_4} = \frac{11 \,.\, 3400 \,.\, 2457 \,.\, 4}{4 \,.\, 7800 \,.\, 2 \quad 1683} = \frac{91}{26} = 3^1/_2 \text{ Jahre.}$$

4) In welcher Zeit bringt ein zu 3% ausgeliehenes Capital $1267^1/_2$ Thlr. Zinsen, wenn dasselbe Capital, zu 5% ausgeliehen, in $3^2/_3$ Jahren $1191^2/_3$ Thlr. Zinsen bringt?

5 % bringen $1191\frac{2}{3}$ Thlr. Zins. in $3\frac{2}{3}$ Jahren
3 % „ $1267\frac{1}{2}$ „ „ „ ? „
} Je weniger Procent, je mehr Jahre; je mehr Zinsen, je mehr Jahre.

$$\frac{3\frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 1267\frac{1}{2}}{3 \quad 1191\frac{2}{3}} = \frac{11 \cdot 5 \cdot 2535 \cdot 3}{3 \quad 3 \quad 2 \quad 3575} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

5) In wieviel Zeit bringen 7600 Rubel zu 5 % ebenso viel Zinsen, wie 9500 Rubel zu 3 % in 4 Jahren?

9500 Rbl. zu 3 % erfordern 4 Jahre
7600 „ „ 5 % „ ? „
} Je mehr Capital, je mehr Jahre; je mehr Procent, je weniger Jahre

$$\frac{4 \cdot 9500 \cdot 3}{7600 \cdot 5} = 3 \text{ Jahre.}$$

6) Wie lange gebrauchen 2400 Francs, um den 3ten Theil der Zinsen zu bringen, welche 6300 Francs, zu demselben Zinsfuß, in 4 Jahren bringen?

6300 Frcs. geben 1 Zinsen in 4 Jahren
2400 „ „ $\frac{1}{3}$ „ „ ? „
} Je weniger Capital, je mehr Jahre; je weniger Zinsen, je weniger Jahre.

$$\frac{4 \cdot 6300 \cdot \frac{1}{3}}{2400 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 6300 \cdot 1}{2400 \quad 3 \cdot 1} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

7) In wieviel Zeit bringt ein Capital zu $4\frac{1}{2}$ % $3\frac{1}{2}$ mal so viel Zinsen, als ein gleich großes Capital zu 3 % in $5\frac{1}{2}$ Jahren?

3 % geben 1 Zinsen in $5\frac{1}{2}$ Jahren
$4\frac{1}{2}$ % „ $3\frac{1}{2}$ „ „ ? „
} Je mehr Procent, je weniger Jahre; je mehr Zinsen, je mehr Jahre.

$$\frac{5\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2} \cdot 1} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7}{2 \quad \cdot \quad 9 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{77}{6} = 12\frac{5}{6} \text{ Jahre.}$$

8) Wieviel Zeit gebraucht ein zu $4\frac{2}{5}$ % ausgeliehenes Capital, um ebenso viel Zinsen zu bringen, wie ein $\frac{2}{3}$ mal so großes Capital zu 6 % in $5\frac{1}{2}$ Jahren?

$\frac{2}{3}$ Capital zu 6 % erfordern $5\frac{1}{2}$ Jahre
1 „ „ $4\frac{2}{5}$ % „ ? „
} Je mehr Capital, je weniger Jahre; je weniger Procent, je mehr Jahre.

$$\frac{5\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6}{1 \cdot 4\frac{2}{5}} = \frac{11 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5}{2 \quad 3 \cdot 1 \cdot 22} = 5 \text{ Jahre.}$$

9) In wieviel Zeit ist ein zu $3\frac{1}{2}$ % ausgeliehenes Capital von 8500 Thlrn. durch die Zinsen auf 9243 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. angewachsen?

$9243\frac{3}{4}$ Thlr. Capital und Zinsen — 8500 Thlr. Capital = $743\frac{3}{4}$ Thlr. Zinsen.

100 Thlr. geben $3\frac{1}{2}$ Thlr. Zinsen in 1 Jahr
8500 „ „ $743\frac{3}{4}$ „ „ „ ? „
} Je mehr Capital, je weniger Jahre; je mehr Zinsen, je mehr Jahre.

$$\frac{1 \cdot 100 \cdot 743\frac{3}{4}}{8500 \cdot 3\frac{1}{2}} = \frac{1 \cdot 100 \cdot 2975 \cdot 2}{8500 \cdot 4 \quad 7} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

10) Wann sind die Zinsen eines am 1sten Juli 1866 zu 5 % ausgeliehenen Capitals von 5400 Thlrn. gleich dem Capital; oder, was dasselbe ist, wann hat das Capital durch die Zinsen sich verdoppelt?

Dividirt man durch den Zinsfuß in 100, so erhält man die Jahre, in denen die Zinsen gleich dem Capital sind; also

bei 5 %, 100 : 5 = 20, in 20 Jahren;
bei 4 %, 100 : 4 = 25, in 25 Jahren;
bei 3 %, 100 : 3 = $33^1/_3$, in $33^1/_3$ Jahren u. s. w.

Das am 1sten Juli 1866 zu 5 % ausgeliehene Capital wird also nach 20 Jahren, d. i. am 1sten Juli 1886, sich verdoppelt haben.

11) Wann ist ein Capital von 2000 Gulden zu $2^1/_2$ % ausgeliehen worden, welches am 5ten August 1866 sich durch die Zinsen verdoppelt hat?

In 40 Jahren verdoppelt es sich bei $2^1/_2$ % also ist das Capital am 5ten August 1826 ausgeliehen worden.

VI. Die Rabatt- und Disconto-Rechnung.

§ 142.

Rabatt heißt Abzug, rabattiren abziehen. Kauft Jemand eine Quantität Waaren, so wird ihm von dem Verkäufer gewöhnlich ein nach Procenten festgestellter Abzug bewilligt, welcher Rabatt heißt. Auch die Zugabe, welche besonders Bäcker, Conditoren u. s. w. geben, wird Rabatt genannt, weil der Käufer mehr Waare bekommt, als er bezahlt, und also mittelbar auch ein Abzug stattfindet. Dem Rabatt verwandt ist der Decort, den der Käufer macht, und die Bonification, welche der Verkäufer gewährt; beides wegen Mängel an der gekauften Waare.

Der Rabatt wird auch Disconto oder Sconto genannt, wenn von Zahlungen die Rede ist, bei denen die Zeit in Betracht kommt: so z. B. gewähren Engroshändler oder Fabrikanten den Detailhändlern bei Entnahme von Waaren gewöhnlich einen mehrmonatlichen Credit; will der Käufer diesen nicht benutzen, sondern gleich zahlen, so wird die zu zahlende Summe durch einen Rabatt oder Disconto von mehreren Procenten niedriger gestellt. Dasselbe ist bei Wechseln, Capitalien, Legaten und dergleichen der Fall, die erst nach Monaten oder Jahren fällig sind und deren Zahlung früher geschehen soll.

Diejenige Summe, welche ohne Abzug des Rabatts gezahlt werden müßte, heißt die Werthsumme, Schuldsumme, Schuld, Wechselsumme, Capital u. s. w., und diejenige Summe, welche nach Abzug des Rabatts oder Discontos wirklich gezahlt wird, die Baarzahlung.

§ 143.

Die Rabattrechnung unterscheidet sich von der Zinsrechnung nur dadurch, daß bei der letzteren der Zins dem Capitale, d. h. der Werthsumme zu-, bei der ersteren der Rabatt der Werthsumme ab-gerechnet wird. Nimmt man die Werthsumme gleich 100 an, so ist bei der Zinsrechnung, bei 5% die Baarzahlung 105, beim Rabatt dagegen 95. Da nun beide Rechnungsarten nichts anders als Specialfälle der Procentrechnung sind, so sagt man: bei der Zinsrechnung wird nach Procenten vom oder für 100, bei der Rabattrechnung nach Procenten im 100 gerechnet. Die Zinsen und der Rabatt werden in ganz gleicher Weise gesucht, also ist hierbei das Rechnen mit Procenten vom 100 gleich dem mit Procenten im 100; nur wenn die Baarzahlung direkt gesucht wird, ist bei der ersteren der Ansatz: 100 Thlr. Werthsumme geben 105 Thlr Baarzahlung, bei der letzteren: 100 Thlr. Werthsumme geben 95 Thlr. Baarzahlung.

Kommt beim Rabatt die Zeit in Betracht, so gilt jener, wie der Zinsfuß, auf 1 Jahr, wenn nicht ausdrücklich gesagt ist, daß er für eine andere Zeit gelten soll. Das Jahr wird auch zu 360, der Monat zu 30 Tagen angenommen. In diesem Falle tritt eine andere Art der Procentrechnung ein, nämlich die nach Procenten auf 100, wo bei 5% 105 Thlr. Werthsumme 100 Thlr. Baarzahlung geben.

Kauft z. B. Jemand für 800 Thlr. Waaren auf 6 Monate Credit oder Ziel und mit 8% Disconto, so kann man sich die Sache so denken, als ob der Verkäufer dem Käufer eine Geldsumme leiht, die nach 6 Monaten mit den Zinsen à 8% 800 Thlr. giebt. 100 Thlr. à 8% betragen nach 6 Monaten 104 Thlr., also 104 Thlr. späterer Werth haben den jetzigen Werth von 100 Thlrn. Um nun von 800 Thlr. späteren Werth den jetzigen Werth zu finden, muß man ansetzen:

104 Thlr. geben 100 Thlr. 800 „ „ ?	$\frac{100 \cdot 800}{104} = \frac{10000}{13} = 769^3/_{13}$ Thlr.

= 769 Thlr. 6 Sgr. 11 Pf.

Diese 769 Thlr. 6 Sgr. 11 Pf. würde der Käufer also gleich zahlen müssen, wenn er den Credit nicht benutzen wollte.

Ebenso muß man beim Ein- und Verkauf von Wechseln, bei Legaten, überhaupt bei Zahlungen verfahren, die später erst zu leisten nöthig sind, aber früher geleistet werden sollen.

Wie man sieht, ist jedoch das Rechnen mit Procenten auf 100 viel unbequemer, als das mit Procenten im 100; deshalb haben die Kaufleute die Gewohnheit, den Disconto für Waaren und Wechsel nicht nach Procenten auf 100, wie es sein müßte, sondern nach Procenten im Hundert zu berechnen, obwohl es zu ihrem Nachtheile ist; denn nach Procenten im 100 würde der Käufer im vorstehenden Beispiel nur 768 Thlr. zu bezahlen haben, also der Verkäufer einen Verlust von 1 Thlr. 6 Sgr. 11 Pf. erleiden. (Beim Wechselverkauf trifft dieser Nachtheil den Verkäufer, nicht den Banquier.)

Da diese letztere Rechnungsart nun einmal eingeführt ist, so muß auch jedesmal, wenn nach Procenten auf 100 gerechnet werden soll (was immer bei der Vorauszahlung von Legaten und anderen großen Summen geschieht), dabei bemerkt werden, daß Procente auf 100 gemeint sind. In den folgenden Beispielen ist die Usance bei Zahlungen für Waaren auf Credit und bei Wechseln beibehalten, und wo nach Procenten auf 100 gerechnet werden soll, ist dies besonders angegeben.

Alle Aufgaben der Rabatt- und Disconto-Rechnung werden nach der einfachen und zusammengesetzten Regeldetrie gerechnet, sobald nicht ein bloßer Abzug stattfindet, sondern derselbe in Procenten ausgedrückt ist oder werden soll.

a) Die Baarzahlung wird gesucht.

§ 144.

1) Es sind für 350 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf. Waaren gekauft, wobei ein Rabatt von 10 Thlrn. 7 Sgr. 6 Pf. bewilligt ist; wie groß ist die Baarzahlung?

350 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf. Werthsumme — 10 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf. Rabatt = 340 Thlr. Baarzahlung.

2) 4 Centner Waare kosten auf Credit 154 Thlr., bei gleich baarer Zahlung (per comptant) wird à Ctr. $1^1/_2$ Thlr. Rabatt gut gethan, wieviel beträgt die Baarzahlung?

$1^1/_2$ Thlr. $\times$ 4 = 6 Thlr. Rabatt; 154 Thlr. Werthsumme — 6 Thlr. Rabatt = 148 Thlr. Baarzahlung.

3) Es kauft Jemand für 225 Gulden Waaren, wobei ihm ein Rabatt von 6 % bewilligt wird; wieviel beträgt die Baarzahlung?

100 Gld. geben 6 Gld. Rabatt.
225 „ „ ?

$$\frac{6 \cdot 225}{100} = \frac{27}{2} = 13^1/_2 \text{ Gld. Rabatt.}$$

225 Gld. Werthsumme — $13^1/_2$ Gld. Rabatt = $211^1/_2$ Gld. Baarzahlung.

Oder: 100 Gld. Werthsumme — 6 Gld. Rabatt = 94 Gld. Baarzahlung;

100 Gld. geben 94 Gld. Baarzahlung.
225 „ „ ?

$$\frac{94 \cdot 225}{100} = \frac{423}{2} = 211^1/_2 \text{ Gulden Baarzahlung.}$$

Das erste Verfahren ist insofern vortheilhafter, als man es mit kleineren Zahlen zu thun hat.

4) Ein Buchhändler erhält 180 Exemplare eines Buches, das im Ladenpreise 25 Ngr. kostet, mit $26^2/_3$ % Rabatt; was kostet ihm das Buch und wie groß ist die ganze Baarzahlung?

100 Ngr. geben $26^2/_3$ Ngr. Rabatt.
25 „ „ ?

25 Ngr. ist $^1/_4$ von 100 also $26^2/_3 : 4 = 6^2/_3$ Ngr. Rabatt.

25 Ngr. — $6^2/_3$ Ngr. Rabatt = $18^1/_3$ Ngr. kostet das Buch.

$$18^1/_3 \text{ Ngr.} \times 180 = \frac{55 \cdot 180}{3 \cdot 30} = 110 \text{ Thlr. Baarzahlung.}$$

Die 30 ist in den Nenner gesetzt, um gleich Thaler zu erhalten.

5) Es kauft Jemand für 350 Francs Waaren auf 4 Monate Credit, der Verkäufer will jedoch bei comptanter Zahlung einen Rabatt von 9 % bewilligen; wieviel beträgt die Baarzahlung?

100 Frcs. geben in 12 Monat 9 Frcs. Rabatt.
350 „ „ „ 4 „ ?

Je mehr Francs, je mehr Rabatt; je weniger Monate, je weniger Rabatt.

$$\frac{9 \text{ Frcs.} \cdot 350 \cdot 4}{100 \cdot 12} = \frac{21}{2} = 10^1/_2 \text{ Frcs. Rabatt.}$$

350 Frcs. — $10^1/_2$ Frcs. = $339^1/_2$ Frcs. Baarzahlung.

Oder: 12 Monate geben 9 Frcs., 4 Monate also 3 Frcs. Rabatt.

100 Frcs. Werthsumme — 3 Frcs. Rabatt = 97 Frcs. Baarzahlung.

100 Frcs. geben 97 Frcs.
350 „ „ ? „ $\left\{ \frac{97 \cdot 350}{100} = \frac{679}{2} \right.$ = 339½ Francs Baarzahlung.

6) Am 28sten Juli ist ein Wechsel über 900 Mark fällig; er wird am 8ten Juli mit 6 % Disconto verkauft; wieviel hat der Verkäufer dafür bekommen?

(Vom 8ten bis 28sten Juli sind 20 Tage.)

100 Mrk. geben in 360 Tagen 6 Mrk. Disconto.
900 „ „ „ 20 „ ? „ „ $\left\{ \frac{6 \cdot 900 \cdot 20}{100 \cdot 360} \right.$ = 3 Mrk. Disconto.

900 Mrk. — 3 Mrk. Disconto = 897 Mark Baarzahlung.

Oder: 6 % auf 360 Tage macht auf 20 Tage $\frac{20 \cdot 6}{360} = \frac{1}{3}$ Mrk.;

100 Mrk. geben ⅓ Mrk. Disconto, 900 Mrk. also $\frac{9}{3}$ = 3 Mrk. Disconto.

7) Ein am 16ten November fälliger Wechsel über 2500 österr. Gulden wird am 1sten August mit 6 % discontirt; wieviel ist für denselben gezahlt worden?

(Vom 1. August bis 16ten November sind 3½ Monate.)

6 % auf 12 Monate geben auf 3½ Monate 1¾ %,

100 Gld. geben 1¾ Gld., 2500 Gld. geben also 25 . 1¾ = 43¾ Gld.

2500 Gld. — 43¾ Gld. = 2456¼ östr. Gulden Baarzahlung.

8) Am 7ten Mai wird ein am 17ten August fälliger Wechsel mit 5 % discontirt; der Disconto beträgt 25½ Rubel, wieviel wurde für den Wechsel gezahlt?

Vom 7ten Mai bis 17ten August sind 3 Monate 10 Tage = 3⅓ Monate.

5 % auf 12 Monate macht auf 3⅓ Monate $\frac{5 \cdot 10}{12 \cdot 3} = 1\frac{7}{18}$ %.

100 Rbl. Werthsumme — $1\frac{7}{18}$ Rbl. Rabatt = $98\frac{11}{18}$ Rubel Baarzahlung; also:

$1\frac{7}{18}$ Rbl. Rabatt geben $98\frac{11}{18}$ Rbl. Baarzahlung.
25½ „ „ „ ? „ „ $\left| \frac{1775 \cdot 51 \cdot 18}{18 \quad 2 \quad 25} \right.$

$= \frac{3621}{2}$ = 1810½ Rubel = 1810 Rubel 50 Kopeken Baarzahlung.

Wenn die Baarzahlung direkt gesucht werden muß, wie hier, so kann der Ansatz nicht nach der zusammengesetzten Regeldetri gemacht werden, wenn auch Sätze genug dazu vorhanden sind.

9) Ein Legat von 2450 Dollar soll erst nach 18 Monaten gezahlt werden; der Empfänger will sich einen Abzug von 8 % auf 100 gefallen lassen, wenn er gleich Zahlung erhalten kann; wieviel beträgt die Baarzahlung?

Beim Rabatt auf 100 muß immer die Zeit mit dem Rabatt zusammengezogen werden, weil sonst die Zeit auch das Capital vermehren würde (§ 138, Beispiel 7).

8 Dollar Rabatt in 1 Jahr geben 12 Dollar Rabatt in $1^1/_2$ Jahr; folglich

112 Doll. geben 12 Doll. Rabatt.
2450 „ „ ? „ „ | $\frac{12 . 2450}{112} = \frac{525}{2} = 262^1/_2$ Doll. Rabatt.

2450 Doll. — $262^1/_2$ Doll. = $2187^1/_2$ Doll. Baarzahlung;

oder: 112 Doll. Werthsumme — 12 Doll. Rabatt = 100 Doll. Baarzahlung.

112 Doll. geben 100 Doll. Baarzahlung.
2450 „ „ ? „ „ | $\frac{100 . 2450}{112} = \frac{4375}{2}$

= $2187^1/_2$ Dollar = 2187 Dollar 50 Cents Baarzahlung.

10) 9200 Thlr. sollen nach 3 Jahren gezahlt werden; wie groß ist die Baarzahlung sogleich, wenn der Rabatt 5% auf 100 beträgt? (5% × 3 = 15%.)

115 Thlr. geben 100 Thlr.
9200 „ „ ? „ | $\frac{100 . 9200}{115}$ = 8000 Thlr. Baarzahlung.

11) Eine nach 4 Jahren fällige Schuld wird, bei $3^1/_3$% Rabatt auf 100, mit 240 Gulden Abzug gleich gezahlt; wie groß ist die Baarzahlung? ($3^1/_3$% × 4 = $13^1/_3$%.)

$113^1/_3$ Gld. Werthsumme geben $13^1/_3$ Gld. Rabatt; also geben auch $13^1/_3$ Gld. Rabatt $113^1/_3$ Gld. Werthsumme.

$13^1/_3$ Gld. geben $113^1/_3$ Gld. W.
240 „ „ ? „ „ | $\frac{343 . 240 . 3}{3 \quad 40}$ = 2040 Gulden Werthsumme,
240 „ Rabatt ab,
bleiben 1800 Gulden Baarzahlung.

Oder: $113^1/_3$ Gld. Werthsumme geben 100 Gld. Baarzahlung, also geben auch $13^1/_3$ Gld. Rabatt 100 Gld. Baarzahlung.

$13^1/_3$ Gld. geben 100 Gld.
240 „ „ ? „ | $\frac{100 . 240 . 3}{40}$ = 1800 Gulden Baarzahlung.

12) Am 1sten Juli 1870 ist ein Capital fällig; es wird am 1sten October 1866, bei 6% Rabatt auf 100, mit 900 Mark Abzug gezahlt. Wieviel beträgt die Baarzahlung?

6% × $3^3/_4$ (Jahre) = $22^1/_2$% Rabatt.

$22^1/_2$ Mrk. Rabatt geben 100 Mrk. Baarzahlung.
900 „ „ „ ? „ „ | $\frac{100 . 900 . 2}{45}$ = 4000 Mrk. Baarzahlung.

b) Die Werthsumme, Schuld, Capital u. s. w. wird gesucht.

§ 145.

1) Nach Abzug von 7 Thlr. 15 Sgr. Rabatt zahlt Jemand 130 Thlr. für Waaren; wie groß ist die Werthsumme?

130 Thlr. Baarzahlung + 7 Thlr. 15 Sgr. Rabatt = 137 Thlr. 15 Sgr. Werthsumme.

2) Es zahlt Jemand für gekaufte Waaren, nachdem 8 % Rabatt in Abzug gebracht worden sind, 184 Livres Sterling; wie groß ist die Werthsumme?

100 Livr. Werthsumme — 8 Livr. Rabatt = 92 Livr. Baarzahlung, also:

92 Livr. Baarzahlg. geben 100 Livr. Werthsumme.
184 " " " ? " "

$\frac{100 \cdot 184}{92} = 200$ Livres Werthsumme.

3) Bei einem Ankauf von Waaren wird die Werthsumme mit $7\frac{1}{2}$ % discontirt und der Disconto beträgt 63 Francs; wieviel beträgt die Werthsumme?

$7\frac{1}{2}$ Frcs. Rabatt geben 100 Frcs. Werthsumme.
63 " " " ? " "

$\frac{100 \cdot 63 \cdot 2}{15} = 840$ Francs Werthsumme.

4) Für Waaren, die auf 4 Monate Credit gegeben worden, bezahlt Jemand, nach einem Abzuge von 9 % Rabatt, gleich baar $339\frac{1}{2}$ Gulden; welches ist die Werthsumme?

9 % Rabatt auf 12 Monate geben 3 % Rabatt auf 4 Monate.

100 Gld. Werthsumme — 3 % Rabatt geben 97 Gld. Baarzahlung.

97 Gld. Baarz. geben 100 Gld. Werths.
$339\frac{1}{2}$ " " " ? " "

$\frac{100 \cdot 679}{2 \cdot 97} = 350$ Gulden Werthsumme.

5) Ein am 28sten Juli fälliger Wechsel wird mit 6 % Disconto am 8ten Juli für 897 Dollar verkauft; wie hoch belief sich die Wechselsumme?

6 % auf 360 Tage giebt $\frac{6 \cdot 20}{360} = \frac{1}{3}$ % auf 20 Tage.

100 Doll. Werthsumme — $\frac{1}{3}$ % Disconto = $99\frac{2}{3}$ Doll. Baarzahlung.

$99\frac{2}{3}$ Doll. Baarz. geben 100 Doll. Werths.
897 " " " ? " "

$\frac{100 \cdot 897 \cdot 3}{299} = 900$ Dollar Werthsumme.

6) Ein Wechsel, welcher am 16ten November fällig ist, wird am 1sten August mit 6 % Disconto für 2456 Livres 5 Schillinge Sterling verkauft; wie hoch war der Wechsel ausgestellt? (Vom 1sten August bis 16ten November sind $3\frac{1}{2}$ Monate.)

6 % auf 12 Monate macht $\frac{6 \cdot 7}{12 \cdot 2} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ % auf $3\frac{1}{2}$ Monate.

100 Livr. Werthsumme — $1\frac{3}{4}$ Livr. Disconto = $98\frac{1}{4}$ Livr. Baarzahlung.

$98\frac{1}{4}$ Livr. Baarzahlung geben 100 Livr. Werthsumme.
$2456\frac{1}{4}$ " " " ? " "

$\frac{100 \cdot 9825 \cdot 4}{4 \cdot 393}$ = 2500 Livres Wechselsumme.

7) Der Disconto für einen am 17ten August fälligen und am 7ten Mai verkauften Wechsel betrug bei 5 % $25\frac{1}{2}$ Francs; welches war die Wechselsumme? (Vom 7ten Mai bis 17ten August sind $3\frac{1}{3}$ Monate.)

5 % auf 12 Monate geben $\frac{5 \cdot 10}{12 \cdot 3} = \frac{25}{18} = 1\frac{7}{18}$ % auf $3\frac{1}{3}$ Monate.

100 Frcs. Werthsumme geben $1\frac{7}{18}$ Frcs. Disconto, also auch:

$1\frac{7}{18}$ Frcs. Disc. geben 100 Frcs. Wechsels.
$25\frac{1}{2}$ " " " ? " "

$\frac{100 \cdot 51 \cdot 18}{2 \cdot 25} = 1836$ Frcs. Wechsel- oder Werthsumme.

8) Es wird, bei 8 % Rabatt auf 100 und 18 Monaten Ziel, eine Baarzahlung von $2187\frac{1}{2}$ Thlrn. geleistet; wie groß war das Capital oder die Werthsumme?

8 % auf 12 Monate sind 12 % auf 18 Monate; 112 Thlr. Werthsumme geben 100 Thlr. Baarzahlung, also geben auch 100 Thlr. Baarzahlung 112 Thlr. Werthsumme.

100 Thlr. Baarzahl. geben 112 Thlr. Werths.
$2187\frac{1}{2}$ „ „ „ ? „ „

$$\frac{112 . 4375}{2 . 100} = 2450 \text{ Thlr. Werthsumme.}$$

Da die Baarzahlung bekannt ist (immer 100), so können diese Art Aufgaben auch nach der zusammengesetzten Regeldetri gerechnet werden, ohne daß vorher die Zeit und der Rabatt zusammengezogen wird; doch darf nur der Rabatt, nicht die Werthsumme in Ansatz kommen. Also:

100 Thlr. Baarzahlung geben in 1 Jahr 8 Thlr. Rabatt.
$2187\frac{1}{2}$ „ „ „ „ $1\frac{1}{2}$ „ ? „ „

$$\frac{8 . 4375 . 3}{100 . 2 . 2 . 1} = \frac{525}{2} = 262\tfrac{1}{2} \text{ Thlr. Rabatt.}$$

$2187\frac{1}{2}$ Thlr. Baarzahlung + $262\frac{1}{2}$ Thlr. Rabatt = 2450 Thlr. Werthsumme.

9) Ein Capital, welches nach $7\frac{1}{2}$ Jahren fällig ist, wird, bei 4 % Rabatt auf 100, mit 2000 Rubeln gleich ausgezahlt; wie groß ist das Capital? (4 Rbl. Rabatt $\times$ $7\frac{1}{2}$ = 30 Rubel Rabatt.)

100 Rbl. Baarzahl. geben 130 Rbl. Werths.
2000 „ „ „ ? „ „

$$\frac{130 . 2000}{100} = 2600 \text{ Rubel Capital.}$$

10) Ein nach $8\frac{2}{3}$ Jahren fälliges Capital wird, mit 3 % Rabatt auf 100, sogleich ausgezahlt und 650 Mark Disconto in Abzug gebracht; wie groß ist das Capital gewesen? (3 % $\times$ $8\frac{2}{3}$ = 26 %.)

126 Mark Capital geben 26 Mark Rabatt, also:

26 Mark Rabatt erfordern 126 Mark Capital
650 „ „ „ ? „ „

$$\frac{126 . 650}{26} = 3150 \text{ Mark Capital.}$$

11) Jemand hat 2 Capitalien ohne Zinsen ausstehen, die nach $3\frac{1}{2}$ Jahren fällig sind. Der eine Debitor will ihm das Capital mit $4\frac{2}{3}$ % Rabatt auf 100 gleich zahlen; der andere will ebenfalls gleich zahlen, wenn er 980 Gulden abziehen kann. Da der Creditor beide Gebote ganz gleich findet, so geht er darauf ein; wie groß war jedes Capital?

Wenn die Gebote gleich sind und die Capitalien auch, so können beide Gebote für ein und dasselbe Capital genommen werden.

Es ist $4\frac{2}{3}$ % $\times$ $3\frac{1}{2}$ = $16\frac{1}{3}$ %; also:

$16\frac{1}{3}$ Gld. Rab. geben $116\frac{1}{3}$ Gld. Werthsumme.
980 „ „ „ ? „ „

$$\frac{349 . 980 . 3}{3 \quad 49} = 6980 \text{ Gld. jedes Capital.}$$

e) Der Rabatt wird gesucht.

§ 146.

1) $17\frac{1}{2}$ Centner Zucker à $8\frac{1}{2}$ Thlr. werden nach Abzug des Rabatts mit 140 Thlrn. baar bezahlt; wieviel beträgt der Rabatt?

$8\frac{1}{2}$ Thlr. $\times$ $17\frac{1}{2}$ = 148 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. Werthsumme.

148 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. — 140 Thlr. Baarzahlung = 8 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. Rabatt.

2) Der Betrag für 75 Hekto Getreide à 5 Thlr. wird mit 6 % rabattirt, wieviel beträgt der Rabatt? (5 Thlr. $\times$ 75 = 375 Thlr.)

100 Thlr. Werthsumme geben 6 Thlr. Rabatt
375 „ „ „ ? „ „

$\frac{6 . 375}{100} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$ Thlr. Rabatt.

3) Die Werthsumme für eine Partie Waare wird mit $7\frac{1}{2}$ % rabattirt und die Baarzahlung mit 777 Gulden gemacht; wie groß ist der Rabatt?

100 Gld. Werthsumme — $7\frac{1}{2}$ Gld. Rabatt = $92\frac{1}{2}$ Gld. Baarzahlung.

$92\frac{1}{2}$ Gld. Baarz. geben $7\frac{1}{2}$ Gld. Rab.
777 „ „ „ ? „ „

$\frac{15 . 777 . 2}{2 \quad 185} = \frac{2331}{37} = 63$ Gulden Rabatt.

4) Es kauft Jemand für 350 Francs Waare auf 6 Monate Credit; der Credit wird jedoch nicht benutzt, sondern die Summe mit 9 % Rabatt gleich bezahlt, wieviel betrug der Rabatt?

9 % auf 12 Monate geben $4\frac{1}{2}$ % auf 6 Monate.

100 Frcs. Werths. geben $4\frac{1}{2}$ Frcs. Rabatt
350 „ „ „ ? „ „

$\frac{9 . 350}{2 . 100} = \frac{63}{4} = 15\frac{3}{4}$ Francs = 15 Francs 75 Centimes Rabatt.

5) Jemand kauft eine Partie Waare auf 6 Monate Ziel oder per comptant mit 9 % Disconto; er wählt das letztere und zahlt 334 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf.; wie groß ist der Disconto?

9 % auf 12 Monate geben $4\frac{1}{2}$ % auf 6 Monate.

100 Thlr. Werthsumme — $4\frac{1}{2}$ Thlr. Rabatt = $95\frac{1}{2}$ Thlr. Baarzahlung.

$95\frac{1}{2}$ Thlr. Baarzahl. geben $4\frac{1}{2}$ Thlr. Rab.
$334\frac{1}{4}$ „ „ „ ? „ „

$\frac{9 . 1337 . 2}{2 . 4 . 191} = \frac{63}{4}$ = $15\frac{3}{4}$ Thlr. Disconto.

6) Am 8ten Juli wird ein Wechsel über 900 Rubel, welcher am 28sten Juli fällig ist, mit 6 % discontirt; wieviel beträgt der Disconto?

(Vom 8ten bis 28sten Juli sind 20 Tage.)

6 % auf 360 Tage macht $\frac{1}{3}$ % auf 20 Tage.

100 Rubel Werths. geben $\frac{1}{3}$ Rbl. Disc.
900 „ „ „ ? „ „

$\frac{1 . 900}{3 \quad 100}$ = 3 Rubel Disconto.

Oder: 100 Rbl. geben $\frac{1}{3}$ Rbl. Disc., 900 Rbl. geben $\frac{9}{3}$ = 3 Rubel Disconto.

7) Ein am 16ten November fälliger Wechsel über 2500 holl. Gulden wird am 1sten August mit 6 % discontirt; wie groß ist der Disconto?

6 % auf 12 Monate geben $1^3/_4$ % auf $3^1/_2$ Monate.

100 Gld. Werthſ. geben $1^3/_4$ Gld. Disc.
2500 „ „ „ ? „ „

$$\frac{7 \cdot 2500}{4 \quad 100} = \frac{175}{4} = 43^3/_4 \text{ Guld.}$$

= 43 Gulden 75 Cents Disconto.

8) Ein Wechsel, welcher am 17ten August fällig ist, wird am 7ten Mai bei 5 % Disconto mit $1810^1/_2$ österr. Gulden baar bezahlt; wie hoch belief sich der Disconto?

Vom 7ten Mai bis 17ten August sind $3^1/_3$ Monate.

5 % auf 12 Monate geben $1^7/_{18}$ % auf $3^1/_3$ Monate; $100 - 1^7/_{18} = 98^{11}/_{18}$.

$98^{11}/_{18}$ Gld. Baarzahl. geben $1^7/_{18}$ Gld. Disc.
$1810^1/_2$ „ „ „ ? „ „

$$\frac{25 \cdot 3621 \cdot 18}{18 \quad 2 \quad 1775} = \frac{3621}{142}$$

$= 25^1/_2$ Gld. = 25 Gulden 50 Neukr. Disconto.

9) Ein Capital von $5386^1/_2$ Mark ist nach 6 Jahren 7 Monaten 6 Tagen fällig; es soll mit 5 % Disconto auf 100 gleich gezahlt werden; wie groß ist der Disconto? (6 Jahre 7 Monate 6 Tage sind $6^3/_5$ Jahre.)

5 % in 1 Jahr geben 33 % in $6^3/_5$ Jahren.

133 Mark Werthſ. geben 33 Mark Disc.
$5386^1/_2$ „ „ „ ? „ „

$$\frac{33 \cdot 10773}{2 \cdot 133} = \frac{2673}{2}$$

$= 1336^1/_2$ Mark = 1336 Mark 8 Schilling Disconto.

10) Ein Capital wird 6 Jahre 7 Monate 6 Tage früher, als es fällig ist, bei 5 % Disconto auf 100, mit 4050 Thlrn. baar ausgezahlt; wieviel betrug der Disconto? (6 Jahre 7 Monate 6 Tage sind $6^3/_5$ Jahre.)

5 % in 1 Jahr geben 33 % in $6^3/_5$ Jahren.

133 Thlr. Werthſumme — 33 Thlr. Rabatt = 100 Thlr. Baarzahlung.

100 Thlr. Baarzahlung geben 33 Thlr. Rabatt
4050 „ „ „ ? „ „

$$\frac{33 \cdot 4050}{100} = \frac{2673}{2}$$

$= 1336^1/_2$ Thlr. Disconto

d) Die Procente werden gesucht.

§ 147.

1) Die Werthſumme beträgt $366^2/_3$ Thlr., die Baarzahlung $342^5/_6$ Thlr.; wieviel Procent sind bewilligt?

$366^2/_3$ Thlr. Werthſumme — $342^5/_6$ Thlr. Baarzahlung = $23^5/_6$ Thlr. Rabatt.

$366^2/_3$ Thlr. Werthſ. geben $23^5/_6$ Thlr. Rab.
100 „ „ „ ? „ „

$$\frac{143 \cdot 100 \cdot 3}{6 \qquad 1100} = \frac{143}{22} = 6^1/_2\%.$$

2) Ein am 16ten November fälliger Wechsel über 2500 Francs wird am 1sten August mit $43^3/_4$ Frcs. Disconto verkauft; wieviel Procent betrug der Disconto? (Vom 1sten August bis 16ten November sind $3^1/_2$ Monate.)

2500 Frcs. in $3\frac{1}{2}$ Mon. $43\frac{3}{4}$ Frcs. Disc.
100 " " 12 " ? " " } Je weniger Thaler, je weniger Disconto; je mehr Monate, je mehr Disconto.

$$\frac{43\frac{3}{4} \cdot 100 \cdot 12}{2500 \cdot 3\frac{1}{2}} = \frac{175 \cdot 100 \cdot 12 \cdot 2}{4 \quad 2500 \qquad 7} = 6\%.$$

3) Ein Wechsel, welcher am 17ten August fällig ist, wird am 7ten Mai, nach einem Abzuge von $25\frac{1}{2}$ Florin Disconto, mit $1810\frac{1}{2}$ Florin baar bezahlt; wieviel Procent Disconto waren genommen?

Vom 7ten Mai bis 17ten August sind $3\frac{1}{3}$ Monate.

$1810\frac{1}{2}$ Fl. Baarzahlung + $25\frac{1}{2}$ Fl. Disconto = 1836 Florin Werthsumme.

1836 Fl. in $3\frac{1}{3}$ Mon. $25\frac{1}{2}$ Fl.
100 " " 12 " ? " } Je weniger Florin, je weniger Disconto; je mehr Monate, je mehr Disconto.

$$\frac{25\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 12}{1836 \cdot 3\frac{1}{3}} = \frac{51 \cdot 100 \cdot 12 \cdot 3}{2 \quad 1836 \qquad 10} = 5\%.$$

4) Es sollen nach 6 Jahren 4445 Rubel gezahlt werden; die Zahlung geschieht jedoch gleich mit 945 Rubel Abzug; wieviel Procent auf 100 beträgt der Rabatt?

4445 Rbl. Werthsumme — 945 Rbl. Rabatt = 3500 Rubel Baarzahlung.

3500 Rbl. in 6 Jahren 945 Rbl.
100 " " 1 " ? " } Je weniger Rubel, je weniger Disconto; je weniger Jahre, je weniger Disconto.

$$\frac{945 \cdot 100 \cdot 1}{3500 \cdot 6} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}\%.$$

Da hier Procente auf 100 gesucht werden, so konnte nicht, wie im vorhergehenden Beispiel, von der Werthsumme ausgegangen werden, sondern es mußte die Baarzahlung genommen werden.

5) Ein Capital, welches nach $7\frac{1}{2}$ Jahren fällig ist, wird nach Abzug von 600 Thlrn. Rabatt mit 2000 Thlrn. baar ausgezahlt; wieviel Procent auf 100 beträgt der Rabatt?

2000 Thlr. in $7\frac{1}{2}$ Jahren 600 Thlr.
100 " " 1 " ? " | $\frac{600 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 2}{2000 \cdot 15} = 4\%.$

6) Es kauft Jemand ein Haus für 42000 Thlr. und zahlt gleich die Hälfte, die andere Hälfte soll ohne Zinsen 4 Jahre stehen bleiben. Nach $1\frac{1}{2}$ Jahren wünscht der Gläubiger (Cridar) die Zahlung und will 3000 Thlr. daran verlieren; wieviel Procent Rabatt auf 100 sind dies? (4 Jahre — $1\frac{1}{2}$ Jahr = $2\frac{1}{2}$ Jahre.)

21000 Thlr. Werthsumme — 3000 Thlr. Rabatt = 18000 Thlr. Baarzahlung.

18000 Thlr. in $2\frac{1}{2}$ Jahren 3000 Thlr.
100 " " 1 " ? " | $\frac{3000 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 1}{18000 \cdot 5} = \frac{20}{3} = 6\frac{1}{3}\%.$

c) Die Zeit wird gesucht.

§ 148.

1) Der Disconto für einen am 8ten Juli verkauften Wechsel über 900 Gulden beträgt, bei 6 %, 3 Gulden; wann war der Wechsel fällig?

100 Gld. geben 6 Gld. in 360 Tagen } Je mehr Capital, je weniger Tage; je
900 „ „ 3 „ „ ? „ } weniger Disconto, je weniger Tage.

$$\frac{360 \cdot 100 \cdot 3}{900 \cdot 6} = 20 \text{ Tage.}$$ Am 28sten Juli also war der Wechsel fällig.

2) Ein am 16ten November fälliger Wechsel über 2500 Francs wird mit 6 % discontirt. Der Discont beträgt $43^3/_4$ Francs; wann wurde der Wechsel verkauft?

100 Frcs geben 6 Frcs. in 12 Mon. } Je mehr Capital, je weniger Monate;
2500 „ „ $43^3/_4$ „ „ ? „ } je mehr Disconto, je mehr Monate.

$$\frac{12 \cdot 100 \cdot 43^3/_4}{2500 \cdot 6} = \frac{12 \cdot 100 \cdot 175}{2500 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{7}{2} = 3^1/_2 \text{ Monate.}$$

$3^1/_2$ Monate vor dem 16ten November giebt den 1sten August.

3) Ein Wechsel wird am 17ten Mai mit 5 % Disconto für 1810 Livrs. 10 Schill. verkauft; der Abzug beträgt 25 Livrs. 10 Schill.; wann war der Wechsel fällig?

Da man beim Rabatt im 100 die Zeit nicht mit der Baarzahlung in Verbindung bringen kann, so muß die Werthsumme gesucht werden; nämlich $1810^1/_2$ Livrs. Baarzahlung + $25^1/_2$ Livrs. Rabatt = 1836 Livrs. Werthsumme.

100 Livrs. geben 5 Livrs. in 12 Mon.
1836 „ „ $25^1/_2$ „ „ ?

$$\frac{12 \cdot 100 \cdot 51}{1836 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{10}{3} = 3^1/_3 \text{ Mon.}$$

$3^1/_3$ Monate nach dem 17ten Mai giebt den 27sten August.

4) Es kauft Jemand eine Partie Waare auf Credit; bei comptanter Zahlung werden ihm jedoch 9 % Rabatt bewilligt. Er zahlt hierauf, nach Abzug von $10^1/_2$ Thlrn, $339^1/_2$ Thlr; wie lange war ihm der Credit bewilligt?

$339^1/_2$ Thlr. Baarzahlung + $10^1/_2$ Thlr. Rabatt = 350 Thlr. Werthsumme.

100 Thlr. geben 9 Thlr. in 12 Monaten
350 „ „ $10^1/_2$ „ „ ?

$$\frac{12 \cdot 100 \cdot 21}{350 \cdot 2 \cdot 9} = 4 \text{ Monate.}$$

5) Ein Capital von 2450 Thlrn. ist am 1sten Juni 1866 fällig; es wird früher mit 8 % auf 100 discontirt; der Disconto beträgt $262^1/_2$ Thlr. Wann geschah die Zahlung?

Beim Rabatt auf 100 kann die Zeit nicht mit der Werthsumme in Verbindung kommen, es muß daher die Baarzahlung gesucht und diese in Ansatz gebracht werden.

2450 Thlr. Werthsumme — $262^1/_2$ Thlr. Rabatt = $2187^1/_2$ Thlr. Baarzahlung.

100 Thlr. geben 8 Thlr. in 12 Mon.
$2187^1/_2$ „ „ $262^1/_2$ „ „ ?

$$\frac{12 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 525}{4375 \cdot 2 \cdot 8} = 18 \text{ Mon.}$$

Die Zahlung ist also am 1sten December 1864 geschehen.

6) Am 15ten December 1865 war eine Rechnung von $383\frac{1}{4}$ Thlrn. zahlbar; sie wurde indessen mit $\frac{5}{9}$% Rabatt auf 100 p. m. (pro mese § 130) früher bezahlt und $5\frac{1}{4}$ Thlr. Disconto abgezogen. Wann wurde die Rechnung bezahlt?

$383\frac{1}{4}$ Thlr. Werthsumme — $5\frac{1}{4}$ Thlr. Rabatt = 378 Thlr. Baarzahlung.

100 Thlr. geben $\frac{5}{9}$ Thlr. in 1 Mon.
378 „ „ $5\frac{1}{4}$ „ „ ? „ | $\frac{1 . 100 . 21 . 9}{378 . 4 . 5} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ Monat.

Die Rechnung wurde also am 1sten October 1865 bezahlt.

f) Zugabe als Rabatt.

§ 149.

Die Zugabe ist ein Rabatt, der nicht wie gewöhnlich als Abzug in Rechnung kommt, sondern die Werthsumme dadurch vermindert, daß ein Theil der verkauften Waaren nicht bezahlt wird. Die Aufgaben werden sämmtlich durch die Regeldetri gelöst.

1) Auf 1 Thlr. Waare wird für 8 Sgr. Waare zugegeben; wieviel Procent Rabatt sind dies, und wieviel würden es sein, wenn der Rabatt von der Werthsumme (1 Thlr.) abgezogen worden wäre?

a) 30 Sgr. geben 8 Sgr.
100 „ „ ? „ | $\frac{8 . 100}{30} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$%.

b) 30 Sgr. — 8 Sgr. = 22 Sgr.

22 Sgr. geben 8 Sgr.
100 „ „ ? „ | $\frac{8 . 100}{22} = \frac{400}{11} = 36\frac{4}{11}$%.

2) Ein Kaufmann giebt $23\frac{1}{3}$% Rabatt an Waaren als Zugabe, wieviel Waare giebt er auf den Thaler zu?

100 Sgr. geben $23\frac{1}{3}$ Sgr.
30 „ „ ? „ | $\frac{70 . 30}{3 . 100} = 7$ Sgr.

3) Der Herausgeber eines Buches, das $3\frac{1}{2}$ Thlr. im Ladenpreise kostet, giebt den Colporteuren auf 9 Exemplare das 10te frei; wieviel Procent Rabatt sind dies, und wieviel würden es sein, wenn er ihnen das 10te Exemplar baar bezahlte? ($3\frac{1}{2}$ Thlr. $\times$ 9 = $31\frac{1}{2}$ Thlr.)

a) $31\frac{1}{2}$ Thlr. geben $3\frac{1}{2}$ Thlr.
100 „ „ ? „ | $\frac{7 . 100 . 2}{2 \quad 63} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$%.

b) Wenn er das 10te Exemplar baar bezahlt, so bleiben ihm nur $31\frac{1}{2}$ Thlr. — $3\frac{1}{2}$ Thlr. = 28 Thlr.

28 Thlr. geben $3\frac{1}{2}$ Thlr.
100 „ „ ? | $\frac{7 . 100}{2 . 28} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$%.

4) Ein Kaufmann nimmt von einem Conditor für 30 Thlr. Zuckersachen und erhält $28\frac{2}{3}$% Rabatt an Waare (Zugabe); wieviel verdient er durch den Verkauf der Zugabe, und wieviel würde er verdienen, wenn deren Werth als Rabatt von der Zahlung abgezogen worden wäre?

a) 100 Thlr. geben $28\frac{2}{3}$ Thlr.
30 „ „ ? „ | $\frac{86 . 30}{3 . 100} = \frac{43}{5} = 8\frac{3}{5}$ Thlr. Verdienst.

b) 30 Thlr. — $8^3/_5$ Thlr. = $21^2/_5$ Thlr. Mit $21^2/_5$ Thlrn. hätte er $8^3/_5$ Thlr. verdient; mit den gezahlten 30 Thlrn. würde er also verdienen:

$21^2/_5$ Thlr. geben $8^3/_5$ Thlr.
30 „ „ ?

$$\frac{43 \cdot 30 \cdot 5}{5 \cdot 107} = \frac{1290}{107} = 12^6/_{107} \text{ Thlr. Verdienst.}$$

Oder: 100 Thlr. — $28^2/_3$ Thlr. = $71^1/_3$ Thlr.

$71^1/_3$ Thlr. geben $28^2/_3$ Thlr.
30 „ „ ? „

$$\frac{86 \cdot 30 \cdot 3}{3 \quad 214} = \frac{1290}{107} = 12^6/_{107} \text{ Thlr. Verdienst.}$$

5) Ein Bäcker giebt 7 Brodte à 5 Sgr. für 1 Thlr.; ihm kostet ein Brod $3^1/_4$ Sgr.; wieviel Procent verdient er beim Verkauf und wieviel würde er verdienen, wenn die Zugabe als Rabatt von der Zahlung abgezogen würde?

a) Er erhält für 7 Brodte 30 Sgr., sie kosten ihm 7 × $3^1/_4$ Sgr. = 22 Sgr. 9 Pf.; bleiben 7 Sgr. 3 Pf. Verdienst.

$22^3/_4$ Sgr. geben $7^1/_4$ Sgr.
100 „ „ ? „

$$\frac{29 \cdot 100 \cdot 4}{4 \quad 91} = \frac{2900}{91} = 31^{79}/_{91}\,\% \text{ Gewinn.}$$

b) Wenn die 5 Sgr. als Rabatt von 1 Thlr. abgehen, so bleiben für 6 Brodte 25 Sgr. Einnahme und kosten ihm diese 6 × $3^1/_4$ Sgr. = 19 Sgr. 6 Pf.; bleiben 5 Sgr. 6 Pf. Verdienst.

$19^1/_2$ Sgr. geben $5^1/_2$ Sgr.
100 „ „ ? „

$$\frac{11 \cdot 100 \cdot 2}{2 \quad 39} = \frac{1100}{39} = 28^8/_{39}\,\% \text{ Gewinn.}$$

6) Ein Conditor verkauft seine Waare mit 60 % Gewinn; wieviel Procent Gewinn behält er, wenn er anderen Verkäufern 30 % in Waaren zugiebt, und wieviel würde er nur behalten, wenn er die 30 % Zugabe als Rabatt von der Zahlung abgehen ließe?

a) Wenn er 60 % an der Waare verdient, so kosten ihm 160 Thlr. Waare 100 Thlr.

160 Thlr. geben 100 Thlr.
130 „ „ ? „

$$\frac{100 \cdot 130}{160} = \frac{325}{4} = 81^1/_4 \text{ Thlr.}$$

130 Thlr. Waare kosten $81^1/_4$ Thlr.; Einnahme dafür 100 Thlr., Gewinn $18^3/_4$ Thlr.

$81^1/_4$ Thlr. geben $18^3/_4$ Thlr.
100 „ „ ? „

$$\frac{75 \cdot 100 \cdot 4}{4 \quad 325} = \frac{300}{13} = 23^1/_{13}\,\% \text{ Gewinn.}$$

b) Wenn er die 30 % als Rabatt von 100 Thlrn. abgehen läßt, so erhält er für 100 Thlr. Waare 70 Thlr.; 100 Thlr. Waare kosten ihm:

160 Thlr. geben 100 Thlr.
100 „ „ ? „

$$\frac{100 \cdot 100}{160} = \frac{125}{2} = 62^1/_2 \text{ Thlr.}$$

70 Thlr. Einnahme — $62^1/_2$ Thlr. Kosten = $7^1/_2$ Thlr. Verdienst auf $62^1/_2$ Thlr.

$62^1/_2$ Thlr. geben $7^1/_2$ Thlr.
100 „ „ ? „

$$\frac{15 \cdot 100 \cdot 2}{2 \quad 125} = 12\,\% \text{ Gewinn.}$$

VII. Die Tara-Rechnung.

§ 150.

Die meisten Waaren werden bei ihrer Aufbewahrung und Versendung in Tonnen, Fässern, Kisten, Körben, Flaschen oder in Säcken, Matten u. s. w. eingeschlossen. Das Gewicht dieser Behältnisse oder Umhüllungen (Emballage) wird die Tara, und das Gewicht der Waare selbst das Netto (Nettogewicht) genannt; beide zusammen, Tara und Netto, geben das Brutto (Bruttogewicht) oder Sporco. Hieraus folgt, daß Netto + Tara = Brutto, Brutto — Tara = Netto und Brutto — Netto = Tara ist.

Oft wird noch für Stoffe, die der Waare beigemengt sind, als Stengel, Blätter, Steinchen, Staub u. s. w. (zusammen Fusti genannt), ein Gutgewicht gerechnet, das vom Netto abgezogen wird. Fracht, Zölle, Provisionen u. s. w. vergrößern, entweder allein oder zusammengezogen, unter dem Namen Spesen den Kostenpreis des Netto, indem sie zu diesem addirt werden müssen.

Alle Aufgaben der Tara-Rechnung werden durch die einfache Regeldetri oder nur durch Addiren und Subtrahiren gelöst.

1) Das Bruttogewicht einer Waare beträgt 35 Ctr. 40 Pfd., das Nettogewicht 32 Ctr. $47\frac{1}{2}$ Pfd.; wieviel Procent betrug die Tara?

35 Ctr. 40 Pfd. Bruttogewicht — 32 Ctr. $74\frac{1}{2}$ Pfd. Nettogewicht = 2 Ctr. $65\frac{1}{2}$ Pfd. Tara.

3540 Pfd. Br. geben $265\frac{1}{2}$ Pfd. Tara
100 „ „ „ ? „ „

$$\frac{531 \, . \, 100}{2 \quad 3540} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}\% \text{ Tara.}$$

Die Procente des Taragewichts werden immer nach dem Bruttogewicht, nicht nach dem Nettogewicht bestimmt.

2) Das Nettogewicht einer Waare beträgt 28 Ctr. 60 Pfd., der Abzug für Gutgewicht $2\frac{1}{2}\%$; wieviel Waare muß bezahlt werden?

100 Pfd. Netto geben $2\frac{1}{2}$ Pfd. Gutgewicht
2860 „ „ „ ? „ „

$$\frac{5 \, . \, 2860}{2 \quad 100} = \frac{143}{2} = 71\frac{1}{2} \text{ Pfd. Gutgewicht.}$$

2860 Pfd. Netto — $71\frac{1}{2}$ Pfd. Gutgewicht = 27 Ctr. $88\frac{1}{2}$ Pfd. Waare, welche bezahlt werden muß.

3) Für 27 Ctr. $88\frac{1}{2}$ Pfd. Waare ist eine gewisse Summe gezahlt worden, für Gutgewicht sind $2\frac{1}{2}\%$ gerechnet; wie groß war das Nettogewicht?

Da die Procente des Gutgewichts immer nach dem Nettogewicht bestimmt werden, welches hier fehlt, so muß man setzen:

100 Pfd. Netto — $2\frac{1}{2}$ Pfd. Gutgewicht = $97\frac{1}{2}$ Pfd. zu bezahlendes Gewicht.

$97\frac{1}{2}$ Pfd. geben 100 Pfd. Netto
$2788\frac{1}{2}$ „ „ ? „ „

$$\frac{100 \, . \, 5577 \, . \, 2}{2 \, . \, 195} = \frac{37180}{13} = 2860 \text{ Pfd. Netto.}$$

4) 8 Ballen Kaffee im Gewicht von 24 Ctr. 20 Pfd. Brutto werden mit 581 holl. Gulden bezahlt und das Pfd. zu 25 Cents Einkaufspreis berechnet; für Gutgewicht sind à Ballen 2 Pfd. angenommen; wieviel beträgt die Tara?

581 Fl. : $\frac{1}{4}$ Fl. = 2324 Pfd.; 2324 Pfd. bezahltes Gewicht + 16 Pfd. Gutgewicht = 2340 Pfd. Netto; 2420 Pfd. Brutto — 2340 Pfd. Netto = 80 Pfd. Tara.

5) 4 Fässer Kochzucker, wovon das Pfund zu $4\frac{1}{2}$ Sgr. Einkauf berechnet ist, kosten 105 Thlr.; das Bruttogewicht ist um 5 % größer, als das bezahlte Gewicht, und die Tara beträgt 4 %. Wieviel ist als Gutgewicht gerechnet?

$4\frac{1}{2}$ Sgr. = $\frac{3}{20}$ Thlr.; 105 Thlr. : $\frac{3}{20}$ Thlr. = $\frac{105 \cdot 20}{3}$ = 700 Pfund bezahltes Gew.

100 Pfd. bez. Gew. geben 105 Pfd. Brutto
700 „ „ „ „ ? „ „ | 105 × 7 = 735 Pfd. Brutto.

100 Pfd. Brutto geben 4 Pfd. Tara
735 „ „ „ ? „ „ | $\frac{4 \cdot 735}{100} = \frac{147}{5}$ = $29\frac{2}{5}$ Pfd. Tara.

735 Pfd. Brutto — $29\frac{2}{5}$ Pfd. Tara = $705\frac{3}{5}$ Pfd. Netto.
$705\frac{3}{5}$ Pfd. Netto — 700 Pfd. bezahltes Gewicht = $5\frac{3}{5}$ Pfd. Gutgewicht.

6) 3 Fässer Mandeln wiegen Brutto 3 Ctr. 60 Pfd. und kosten $60\frac{1}{3}$ Thlr. Die Tara beträgt à Faß 9 Pfd., für Gutgewicht sind im Ganzen 3 Pfd. gerechnet; die Spesen belaufen sich auf 10 Thlr. 5 Sgr., und als Vergütigung für Emballage ist 1 Thlr. angesetzt; was kostet das Pfund im Einkauf?

Von 3 Ctrn. 60 Pfd. Brutto ab 27 Pfd. Tara bleiben 3 Ctr. 33 Pfd. Netto; von 3 Ctrn. 33 Pfd. Netto ab 3 Pfd. Gutgewicht bleiben 3 Ctr. 30 Pfd. zu bezahlendes Gewicht.

3 Ctr. 30 Pfd. kosten $60\frac{1}{3}$ Thlr. baar + $10\frac{1}{6}$ Thlr. Spesen + 1 Thlr. Emballage, zusammen $71\frac{1}{2}$ Thlr.

$71\frac{1}{2}$ Thlr. : 330 = $\frac{143}{22}$ Sgr. = $6\frac{1}{2}$ Sgr. das Pfund.

7) Ein Kaufmann erhält 3 Fässer Wachs, welche Brutto $22\frac{1}{2}$ Ctr. wiegen und $512\frac{1}{2}$ Thlr. kosten. Die Tara beträgt 108 Pfd., das Gutgewicht 26 Pfd. und die Spesen incl. Steuer, Transport, Emballage 42 Thlr. 17 Sgr. Wie theuer muß der Kaufmann das Pfund verkaufen, wenn er 11 Thlr. an der Waare verdienen will?

2250 Pfd. Brutto — 108 Pfd. Tara = 2142 Pfd. Netto; 2142 Pfd. Netto — 26 Pfd. Gutgewicht = 2116 zu bezahlendes Gewicht.

2116 Pfd. kosten 512 Thlr. 15 Sgr. + 42 Thlr. 17 Sgr. Spesen = 555 Thlr. 2 Sgr., dazu 115 Thlr. Verdienst = 670 Thlr. 2 Sgr. Verkauf.

670 Thlr. 2 Sgr. : 2116 = $\frac{10051}{1058}$ Sgr. = $9\frac{1}{2}$ Sgr. Verkaufspreis für das Pfund.

8) 6 Tonnen Reis, im Bruttogewicht 37 Ctr. 25 Pfd. kosten 230 Thlr.; die Tara ist 65 Pfd., das Gutgewicht à Tonne 2 Pfd., Spesen $23\frac{1}{3}$ Thlr. Wie theuer muß das Pfund verkauft werden, wenn 44 % verdient werden sollen?

3725 Pfd. Brutto — 65 Pfd. Tara = 3660 Pfd. Netto; 3660 Pfd. Netto — 12 Pfd. Gutgewicht = 3648 Pfd. zu bezahlendes Gewicht.

3648 Pfd. kosten 230 Thlr. + $23^1/_3$ Thlr. Spesen = $253^1/_3$ Thlr.

1 Pfd. kostet $253^1/_3$ Thlr. : 3648 = $2^1/_{12}$ Sgr. (44 % sollen verdient werden.)

100 Sgr. geben 144 Sgr. $2^1/_{12}$ " " ? "	$\frac{144 . 25}{100 . 12} = 3$ Sgr. Verkaufspreis für das Pfund.

9) 6 Fässer Rosinen wiegen Brutto 10 Ctr. 20 Pfd. und kosten 125 Thlr. Die Tara beträgt $8^1/_3$ %, das Gutgewicht $1^1/_2$ % und die Spesen $10^4/_5$ %; was kostet das Pfund Rosinen im Einkauf?

$8^1/_3$ % Tara und $1^1/_2$ % Gutgewicht können nicht zusammengezogen werden, weil die Tara nach dem Brutto und das Gutgewicht nach dem Netto berechnet wird, also:

100 Pfd. Brutto geben $8^1/_3$ Pfd. Tara 1020 " " " ? " "	$\frac{25 . 1020}{3 . 100} = 85$ Pfd. Tara.

1020 Pfd. Brutto — 85 Pfd. Tara = 935 Pfd. Netto.

100 Pfd. Netto geben $1^1/_2$ Pfd. Gutgew. 935 " " " ? " "	$\frac{3 . 935}{2 . 100} = \frac{561}{40} = 14^1/_{40}$ = circa 14 Pfd. Gutgewicht.

935 Pfd. Netto — 14 Pfd. Gutgewicht = 921 Pfd. zu bezahlendes Gewicht.

100 Pfd. geben $10^4/_5$ Thlr. Spesen 125 " " ? " "	$\frac{54}{5} \times \frac{5}{4} = 13^1/_2$ Thlr. Spesen.

125 Thlr. für die Waare + $13^1/_2$ Thlr. Spesen = $138^1/_2$ Thlr. Einkauf.

138 Thlr. 15 Sgr. : 921 = $4^{157}/_{307}$ Sgr. = circa $4^1/_2$ Sgr. Einkaufspreis für das Pfund.

VIII. Die Verhältniß- und Proportions-Rechnung.

§ 151.

Wenn man zwei Zahlen mit einander vergleichen, d. h. ausdrücken will, um wieviel mal die eine Zahl größer oder kleiner als die andere ist, so verbindet man beide durch das Divisionszeichen und nennt einen solchen Ausdruck ein **Verhältniß**. Die beiden Zahlen heißen die **Glieder** des Verhältnisses, und die Zahl, welche angiebt, um wieviel mal das eine Glied größer als das andere ist, wird der **Name** oder der **Exponent** des Verhältnisses genannt. Man findet den Exponenten, wenn man mit dem 2ten Gliede in das 1ste dividirt. In dem Verhältniß $\overset{2}{8 : 4}$, ist 8 das 1ste und 4 das 2te Glied; die darüber geschriebene kleine Zahl 2 ist der Exponent. In $\overset{1/4}{3 : 12}$ ist der Exponent $^1/_4$, weil 3 dividirt durch 12 = $^1/_4$ ist.

Zwei Verhältnisse, die einen gleichen Exponenten haben, sind einander gleich; 3 : 9 ist gleich 4 : 12, weil beide den gleichen Exponenten $\frac{1}{3}$ haben.

§ 152.

Die Gleichstellung zweier gleichen Verhältnisse, d. h. die Verbindung zweier gleichen Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen, wird eine Proportion genannt; also $4 : 8 = 6 : 12$. Man liest dies: 4 verhält sich zu 8, wie 6 zu 12.

Die Glieder werden, der Reihefolge nach, das 1ste, 2te, 3te und 4te Glied der Proportion, oder das 1ste und 2te Glied des ersten Verhältnisses und das 1ste und 2te Glied des zweiten Verhältnisses genannt. Ferner nennt man das 1ste und 4te Glied die beiden äußeren Glieder oder Außenglieder, und das 2te und 3te Glied die beiden inneren Glieder oder Mittelglieder der Proportion. Ebenso werden das 1ste und 3te Glied die ersten, und das 2te und 4te Glied die zweiten homologen, gleichstehenden oder correspondirenden Glieder genannt.

§ 153.

Jede Proportion kann man als zwei gleiche Brüche betrachten, indem das erste Verhältniß den ersten, das andere Verhältniß den zweiten Bruch und in jedem Verhältniß das erste Glied den Zähler, das 2te Glied den Nenner bildet. Die Proportion $4 : 12 = 5 : 15$ ist also den beiden Brüchen $\frac{4}{12}$ und $\frac{5}{15}$ gleich.

Da man nun den Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit einer und derselben Zahl multipliciren oder dividiren kann, ohne daß der Werth des Bruches verändert wird, so kann man dies auch mit den beiden Gliedern eines Verhältnisses, mit den homologen Gliedern, und mit allen 4 Gliedern einer Proportion, aber nicht mit den beiden inneren oder äußeren Gliedern.

$12 : 4 = 18 : 6$	$12 : 4 = \frac{18}{3} : \frac{6}{3}$	$12 : \frac{4}{2} = 18 : \frac{6}{2}$
$\frac{12}{2} : \frac{4}{2} = 18 : 6$	$\frac{12}{3} : 4 = \frac{18}{3} : 6$	$\frac{12}{2} : \frac{4}{2} = \frac{18}{2} : \frac{6}{2}$.

§ 154.

Eine wichtige Eigenschaft der Proportionen ist die, daß in jeder richtigen Proportion das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkt der inneren Glieder ist. In der Proportion $3 : 4 = 6 : 8$ ist $3 \times 8 = 24$ das Produkt der äußeren Glieder, und $4 \times 6 = 24$ das Produkt der inneren Glieder. In $5 : 9 = 10 : 18$ ist $5 \times 18 = 90$ und $9 \times 10 = 90$, in $1 : 7 = 3 : 21$ ist $1 \times 21 = 3 \times 7$.

Vermittelst dieses Satzes kann man, wenn zu einer Proportion nur drei Glieder gegeben sind, das fehlende 4te Glied (x) auf eine leichte Weise finden. Fehlt nämlich ein äußeres Glied, so multiplicirt man die beiden inneren Glieder und dividirt das Produkt durch das gegebene äußere Glied; fehlt ein inneres Glied, so multiplicirt man die beiden äußeren Glieder und dividirt das Produkt durch das gegebene innere Glied.

$4 : 7 = 8 : x;$ $x = \frac{7 \times 8}{4} = 14$	$7 : 10 = 21 : x;$ $x = \frac{10 \times 21}{7} = 30$	$9 : 15 = x : 60;$ $x = \frac{9 \times 60}{15} = 36$
$11 : x = 22 : 46;$ $x = \frac{11 . 46}{22} = 23$	$\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = \frac{1}{2} : x;$ $x = \frac{7 . 1 . 4}{8 \; 2 \; 3} = \frac{7}{12}$	$1\frac{3}{4} : 4\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4} : x;$ $x = \frac{9 . 8 . 4}{2 \; 3 \; 7} = 6\frac{6}{7}.$

§ 155.

a) Ist x mit einer anderen Zahl durch die Multiplication verbunden, so dividirt diese Zahl den Bruchsatz, d. h. sie kommt unter den Strich.

$$3 : 9 = 16 : 8x$$
$$8x = \frac{9 \,.\, 16}{3}$$
$$x = \frac{9 \,.\, 16}{3 \,.\, 8} = 6$$
$$(8x = 6 \,.\, 8 = 48)$$

b) Ist x mit einer anderen Zahl durch die Division verbunden, so multiplicirt diese Zahl den Bruchsatz, d. h. sie kommt über den Bruchstrich.

$$4 : 5 = 12 : \frac{x}{3}$$
$$\frac{x}{3} = \frac{5 \,.\, 12}{4}$$
$$x = \frac{5 \,.\, 12 \,.\, 3}{4} = 45$$
$$(\frac{x}{3} = \frac{45}{3} = 15.)$$

c) Ist x mit einem Bruch verbunden, so kehrt man diesen um und setzt ihn so in den Bruchsatz.

$$3 : 9 = 12 : \frac{4x}{3}$$
$$\frac{4x}{3} = \frac{9 \,.\, 12}{3}$$
$$x = \frac{9 \,.\, 12 \,.\, 3}{3 \,.\, 4} = 27.$$
$$(\frac{4x}{3} = \frac{4 \,.\, 27}{3} = 36.)$$

A. Die Verhältniß-Rechnung.

§ 156.

Obwohl fast jeder Rechenaufgabe ein gewisses Verhältniß zum Grunde liegt, so werden doch diejenigen Aufgaben, bei denen ein bestimmtes Verhältniß gegeben ist oder gesucht werden soll, vorzugsweise als zur Verhältnißrechnung gehörig betrachtet. Die Auflösung dieser Aufgaben geschieht fast immer nur durch die Multiplication und Division, wie die folgenden Beispiele zeigen:

1) Ein Berg ist 2400 Meter hoch, ein anderer 24000 Meter; wie verhält sich die Höhe des ersteren zu der Höhe des anderen?

2400 : 24000 = 1 : 10 (beide Glieder durch 2400 dividirt.)

2) Ein Garten ist 50 Meter breit und 125 Meter lang; wie verhält sich die Breite zur Länge?

50 : 125 = 2 : 5 (beide Glieder durch 25 dividirt.)

3) Ein Stück Land ist 40 Meter breit und 100 Meter lang, ein anderes 50 Meter breit und 120 Meter lang; wie verhält sich die Größe beider Stücke Land?

$40 \times 100 = 4000$ | $4000 : 6000 = 2 : 3$
$50 \times 120 = 6000$ |

4) Ein Spiegelglas ist 28 Centi 4 Milli breit und 1 Meter 13 Centi 6 Milli hoch; wie verhält sich die Breite zur Höhe?

$$28{,}4 : 113{,}6 = 284 : 1136 = 71 : 284 = 1 : 4.$$

5) Eine Gußstahlplatte ist 1 Meter 3 Centi breit und 2 Meter 57 Centi 5 Milli lang; wie verhält sich die Breite zur Länge?

$$103 : 257{,}5 = 1030 : 2575 = 206 : 515 = 2 : 5.$$

6) Wie verhält sich 1 Hekto 8 Liter zu 2 Hekto 43 Liter?

1 Hekto 8 Liter = 108 Liter
2 Hekto 43 Liter = 243 Liter.

$$108 : 243 = 36 : 81 = 4 : 9.$$

7) 1 Centner gelber Kochzucker kostet 6 Thlr. 20 Sgr., 1 Centner weißer 8 Thlr. 10 Sgr.; wie verhalten sich die Preise zu einander?

$$6^2/_3 = {}^{20}/_3;\ 8^1/_3 = {}^{25}/_3;\ {}^{20}/_3 : {}^{25}/_3 = 20 : 25 = 4 : 5.$$

8) 20 Pfund Kaffee kosten 8 Thlr. 10 Sgr., und 24 Pfund Zucker 7 Thlr. 10 Sgr.; in welchem Verhältniß stehen die beiden Preise zu einander?

1 Pfund Kaffee = $\frac{8^1/_3}{20}$ Thlr. = $^5/_{12}$ Thlr.

1 Pfund Zucker = $\frac{7^1/_3}{24}$ Thlr. = $^{11}/_{36}$ Thlr.

$^5/_{12} : {}^{11}/_{36} = 15 : 11.$
Beide Brüche mit 36 multiplicirt.

9) In einer Anstalt wird von 20 Männern in 25 Tagen dieselbe Arbeit gefertigt, wie von 25 Frauen in 28 Tagen; wie verhält sich die Arbeitskraft eines Mannes zu der einer Frau?

20 Mann 25 Tage ist = 1 Mann $20 \times 25 = 500$ Tage
25 Frauen 28 „ „ = 1 Frau $25 \times 28 = 700$ „

Die Kraft steht im umgekehrten Verhältniß zur Zeit, d. h. je mehr Kraft, je weniger Zeit ist erforderlich, also:

Die Kraft eines Mannes zu der einer Frau = $700 : 500 = 7 : 5$
oder 5 Männer leisten so viel als 7 Frauen.

10) $^3/_4$ Centner Kaffee kosten so viel wie $1^4/_5$ Centner Zucker; wie verhält sich der Werth oder Preis des Kaffees zu dem des Zuckers?

Der Werth steht mit der Anzahl oder der Quantität im umgekehrten Verhältniß, d. h. je theurer die Waare, je weniger kann man für dasselbe Geld kaufen, mithin verhält sich dem Werthe nach der Kaffee zum Zucker wie:

$$1^4/_5 : {}^3/_4 = {}^9/_5 : {}^3/_4 = 9 : {}^{15}/_4 = 36 : 15 = 12 : 5.$$

11) $2^1/_2$ Ctr. Waare kosten, 32 Meilen durch die Post versandt, $11^2/_3$ Thlr., mittelst der Eisenbahn kosten 8 Ctr., 28 Meilen versandt, $23^1/_3$ Thlr. Wie verhalten sich die Preise zu einander?

per Post 1 Ctr. 1 Meile $\frac{11^2/_3 \text{ Thlr.}}{2^1/_2 \,.\, 32}$

per Eisenb. 1 „ 1 „ $\frac{23^1/_3 \text{ Thlr.}}{8 \,.\, 28}$

Post : Eisenbahn

$$\frac{35 \,.\, 2}{3 \,.\, 5 \,.\, 32} : \frac{70}{3 \,.\, 8 \,.\, 28}$$

$$= {}^7/_{48} : {}^5/_{48} = 7 : 5.$$

B. Proportions-Rechnung.

§ 157.

Früher wurden alle Aufgaben, sowohl der einfachen als auch der zusammengesetzten Regeldetri durch Proportionsansätze gelöst. War nämlich die Aufgabe gegeben: 3 Meter Band kosten 7 Sgr., was kosten 17 Meter? so sagte man: wie sich 3 Meter zu ihrem Preise verhalten, so verhalten sich 17 Meter zu ihrem Preise, also:

$$3 : 7 = 17 : x$$

$$x = \frac{17 \,.\, 7}{3} = \frac{119}{3} = 39^2/_3 \text{ Sgr.} = 1 \text{ Thlr. } 9 \text{ Sgr. } 8 \text{ Pf.};$$

oder: wie sich die Zahlen der Meter zu einander verhalten, so verhalten sich auch die Preise:

$$3 : 17 = 7 : x$$

$$x = \frac{17 \,.\, 7}{3} = \frac{119}{3} = 39^2/_3 \text{ Sgr.} = 1 \text{ Thlr. } 9 \text{ Sgr. } 8 \text{ Pf.}$$

Jetzt wendet man die Proportionsansätze bei der Regeldetri nicht mehr an, denn da im Geschäftsleben die Regeldetri-Aufgaben sehr häufig vorkommen, so ist es nothwendig, sie so kurz als möglich zu lösen, und deshalb so zu verfahren, wie es § 108 u. s. w. gezeigt ist. Nur diejenigen Aufgaben, die zwei oder mehrere bestimmte Verhältnisse enthalten oder solche zu suchen vorschreiben, müssen noch durch Proportionsansätze gelöst werden, und man nennt die Rechnungsart, nach der solche Aufgaben gelöst werden, vorzugsweise die Proportionsrechnung. Die folgenden Beispiele können als Anhalt zur Beurtheilung dienen, welche Aufgabearten nach dieser Rechnungsart zu rechnen sind.

1) Es verhält sich der Preis des Roggens zu dem des Weizens wie 13 : 25; wenn nun der Neuscheffel Roggen 1 Thlr. 9 Sgr. kostet; was kostet dann der Neuscheffel Weizen?

1 Thlr. 9 Sgr. $= 1^9/_{30}$ Thlr. $= 1^3/_{10}$ Thlr. $= {}^{13}/_{10}$ Thlr.

$$13 : 25 = \frac{13}{10} : x \;(\S\, 154)$$

$$x = \frac{13 \,.\, 25}{10 \,.\, 13} = \frac{25}{10}$$

$$= 2^1/_2 \text{ Thlr.}$$

2) Zwei Sorten Reis verhalten sich im Preise wie 4 : 5; 3 Ctr. der ersten Sorte kosten 14 Thlr. 9 Sgr., was kosten 14 Ctr. der zweiten Sorte?

1 Ctr. der 1sten Sorte kostet:

$14^3/_{10}$ Thlr. : 3 $= {}^{143}/_{30}$ Thlr.

1 Ctr. der 2ten Sorte kostet:

x Thlr. : 14 $= \frac{x}{14}$ Thlr.

$$4 : 5 = {}^{143}/_{30} : \frac{x}{14}$$

$$\frac{x}{14} = \frac{143 \,.\, 5}{30 \,.\, 4} \;(\S\, 155 \text{ b.})$$

$$x = \frac{143 \,.\, 5 \,.\, 14}{30 \,.\, 4} = \frac{1001}{12}$$

$$= 83^5/_{12} \text{ Thlr.}$$

3) Die monatliche Ausgabe zweier Beamten verhält sich wie $4^1/_2 : 7^1/_2$, der erste giebt in 9 Monaten $271^1/_2$ Thlr. aus; wieviel gebraucht der zweite in einem Jahre?

In 1 Monat gebraucht der erste, $^{543}/_2$ Thlr. : $9 = {}^{181}/_6$;	$^9/_2 : {}^{15}/_2 = {}^{181}/_6 : \frac{x}{12}$
der zweite, x Thlr. : $12 = \frac{x}{12}$	$\frac{x}{12} = \frac{181 \cdot 15 \cdot 2}{6 \cdot 2 \cdot 9}$ (§ 155 b.)
	$x = \frac{181 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 12}{6 \cdot 2 \cdot 9} = \frac{1810}{3}$
	$= 603^1/_3$ Thlr.

4) 14 Männer verdienen so viel wie 18 Frauen, das Wochenlohn für 30 Männer beträgt $173^1/_3$ Thlr.; wieviel werden 27 Frauen verdienen?

Wenn 14 Männer soviel wie 18 Frauen verdienen, so verhält sich der Verdienst der Männer zu dem der Frauen wie 18 : 14 oder wie 9 : 7.

1 Mann verdient:	$9 : 7 = {}^{52}/_9 : \frac{x}{27}$
$^{520}/_3 : 30 = {}^{52}/_9$	
1 Frau verdient:	$\frac{x}{27} = \frac{52 \cdot 7}{9 \cdot 9}$ (§ 155 b.)
$x : 27 = \frac{x}{27}$	$x = \frac{52 \cdot 7 \cdot 27}{9 \cdot 9} = \frac{364}{3}$
	$= 121^1/_3$ Thlr.

5) 9 Männer vollenden eine Arbeit in 15 Tagen; wieviel Tage werden 12 Frauen zu derselben Arbeit gebrauchen, wenn sich die Arbeitskraft der Männer zu der der Frauen wie 5 : 3 verhält?

Wenn 9 Männer 15 Tage gebrauchen, gebraucht 1 Mann 9×15 Tage
„ 12 Frauen x „ „ „ 1 Frau $12 \times x$ Tage.

Wenn sich die Arbeitskraft der Männer zu der der Frauen wie 5 : 3 verhält, so arbeitet 1 Mann in 3 Tagen so viel wie eine Frau in 5 Tagen. Es müssen sich also die Tage der Männer zu denen der Frauen wie 3 : 5 verhalten, und dies giebt den Ansatz:

$3 : 5 = 9 \cdot 15 : 12\,x$	Man bildet aus den Factoren im Zähler und Nenner des Bruchsatzes keine Producte, um besser sehen zu können, ob sich etwas heben läßt.
$12\,x = \frac{9 \cdot 15 \cdot 5}{3}$ (§ 155 a.)	
$x = \frac{9 \cdot 15 \cdot 5}{3 \cdot 12} = \frac{75}{4} = 18^3/_4$ Tage	
arbeiten die Frauen.	

6) In einer Anstalt verhält sich das wöchentliche Arbeitslohn der Männer zu dem der Frauen wie 7 : 5. Es arbeiten 49 Männer à $2^1/_2$ Thlr. die Woche; wie viele Frauen sind beschäftigt, wenn jede $1^3/_4$ Thlr. erhält?

49 Männer à $2\frac{1}{2}$ Thlr. $= \frac{5}{2} \times 49$

x Frauen à $1\frac{3}{4}$ Thlr. $= \frac{7x}{4}$

$$7 : 5 = \frac{5 . 49}{2} : \frac{7x}{4}$$

$$\frac{7x}{4} = \frac{5 . 5 . 49}{2 . 7} \quad (\S\ 155\ c.)$$

$$x = \frac{5 . 5 . 49 . 4}{2 . 7 . 7} = 50 \text{ Frauen.}$$

7) Wenn sich dem Werthe nach der Gulden zum Franc wie 5 : 2 verhält, wie viele Francs sind dann $136\frac{1}{2}$ Gulden?

Werth und Anzahl stehen im umgekehrten Verhältniß; wenn also der Gulden zum Franc sich wie 5 : 2 verhält, so sind 2 Gulden = 5 Francs. Es verhalten sich also Gulden zu Francs der Zahl nach wie 2 : 5, folglich:

$$2 : 5 = 136\frac{1}{2} : x$$

$$x = \frac{273 . 5}{2 . 2} = \frac{1365}{4} = 341\frac{1}{4} \text{ Francs.}$$

8) Die Geschwindigkeit eines Rennpferdes verhält sich zur Geschwindigkeit eines Dampfwagens wie 5 : 12; wenn das Pferd $37\frac{1}{2}$ Stunden zur Zurücklegung eines Weges gebraucht, wie lange braucht dazu ein Dampfwagen?

$$12 : 5 = 37\frac{1}{2} : x$$

$$x = \frac{75 . 5}{2 . 12} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8} \text{ Stunden.}$$

} Geschwindigkeit und Zeit stehen im umgekehrten Verhältniß.

9) Die Entfernung zweier Lasten vom Unterstützungspunkt eines doppelarmigen Hebels verhält sich wie 7 : 6, die Last des längeren Hebelarmes beträgt 84 Pfd.; wie schwer muß der kürzere Hebelarm belastet werden, wenn sich beide Lasten das Gleichgewicht halten sollen?

Je kleiner die Entfernung vom Unterstützungspunkt, je größer die Last, und umgekehrt. Also: 6 : 7 = 84 Pfd. : x

$$x = \frac{84 . 7}{6} = 98 \text{ Pfund.}$$

10) Die Frachtpreise zweier Kisten Waare verhalten sich wie 35 : 26. Die erste Kiste wiegt 12 Ctr., wird 25 Meilen weit versandt und kostet pro Centner und Meile $3\frac{1}{2}$ Sgr.; die andere Kiste wird 36 Meilen versandt und kostet pro Centner und Meile $2\frac{1}{2}$ Sgr.; wie schwer ist die zweite Kiste?

1ste Kiste 12 Ctr. $\times 25 \times 3\frac{1}{2} = \frac{12 . 25 . 7}{2} = 6 . 25 . 7.$

2te Kiste x Ctr. $\times 36 \times 2\frac{1}{2} = \frac{x . 36 . 5}{2} = 90x$

$$35 : 26 = 6 . 25 . 7 : 90x.$$

$$x = \frac{6 . 25 . 7 . 26}{35 . 90} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3} \text{ Ctr.}$$

11) $1\frac{1}{2}$ Hekto Weizen wiegen so viel wie $2\frac{1}{4}$ Hekto Hafer; 1 Hekto Weizen wird für einen gewissen Preis 21 Meilen fortgeschafft, wie weit kann 1 Hekto Hafer zu demselben Preise versandt werden?

Wenn $1\frac{1}{2}$ Hekto Weizen so schwer ist, wie $2\frac{1}{4}$ Hekto Hafer, so verhält sich dem Gewichte nach der Weizen zum Hafer wie $2\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2}$. Da aber Gewicht und Entfernung im umgekehrten Verhältniß stehen, d. h. je weniger schwer die Last, je weiter kann sie zu gleichem Preise versandt werden, so ist der Ansatz:

$$1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4} = 21 : x$$

$$x = \frac{9 \cdot 21 \cdot 2}{4 \quad 3} = \frac{63}{2} = 31\frac{1}{2} \text{ Meilen.}$$

12) $1\frac{1}{2}$ Hekto Weizen ist so schwer, wie $2\frac{1}{4}$ Hekto Hafer; 78 Hekto Weizen, 25 Meilen versandt, kosten $6\frac{2}{3}$ Thlr., wie weit können 91 Hekto Hafer für $9\frac{1}{3}$ Thlr. versandt werden?

Aufgaben, bei denen mehrere verschiedene Verhältnisse vorkommen, rechnet man zuerst für eine Sorte nach der zusammengesetzten Regeldetri; das Resultat wird dann nach dem gegebenen Verhältniß für die andere Sorte umgewandelt.

78 Hekto Weizen für $6\frac{2}{3}$ Thlr. werden 25 Meilen versandt.
91 „ „ „ $9\frac{1}{3}$ „ „ ? „ „

(Je mehr Hekto, je weniger Meilen; je mehr Geld, je mehr Meilen.)

$$\frac{25 \cdot 78 \cdot 28 \cdot 3}{91 \quad 3 \quad 20} = 30$$ Meilen können 91 Hekto Weizen für $9\frac{1}{3}$ Thlr. versandt werden.

$$1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4} = 30 : x$$

$$x = \frac{30 \cdot 9 \cdot 2}{4 \quad 3} = 45$$ Meilen können 91 Hekto Hafer für $9\frac{1}{3}$ Thlr. versandt werden.

IX. Die Gesellschafts-Rechnung.

§ 158.

Die Gesellschaftsrechnung oder Societätsrechnung, auch Theilungsrechnung oder Repartitionsrechnung genannt, lehrt eine gegebene Zahl nach dem Verhältniß mehrerer anderen gegebenen Zahlen theilen. Die zu theilende Zahl heißt die Theilungssumme oder Theilungszahl. Die Zahlen, nach welchen die Theilungssumme getheilt werden soll, heißen die Bestimmungssummen oder Bestimmungszahlen, und die einzelnen Theile der Theilungssumme geben die Antheile oder Theile.

Die Anwendung der Gesellschafts-Rechnung ist sehr verschieden, wie aus folgenden Beispielen hervorgeht:

1) 3 Kaufleute treiben einen gemeinschaftlichen Handel; A. hat 4500 Thlr., B. 5000 Thlr. und C. 5500 Thlr. eingelegt. Beim Jahresabschluß ergiebt sich ein Gewinn von 4200 Thlrn.; wieviel erhält jeder von dem Gewinn?

4500 Thlr. + 5000 Thlr. + 5500 Thlr. = 15000 Thlr.

Die ganze Einlage (15000 Thlr.) verhält sich zum ganzen Gewinn (4200 Thlr.), wie die Einlage jedes Einzelnen zum einzelnen Gewinn.

Also:

$$15000 : 4200 = 4500 : x$$

$$x = \frac{4200 \cdot 4500}{15000} = 1260 \text{ Thlr.}$$ Gewinn für A.

Oder nach der Regeldetri:

15000 Thlr. Einlage geben 4200 Thlr. Gew.
4500 „ „ „ ? „ „

$$\frac{4200 \cdot 4500}{15000} = 1260 \text{ Thlr.}$$ Gewinn für A.

Ebenso findet man, daß auf 5000 Thlr. 1400 Thlr., und auf 5500 Thlr. 1540 Thlr. Gewinn kommen. Die Richtigkeit der Vertheilung ergiebt sich, wenn man die einzelnen Gewinntheile addirt: 1260 Thlr. + 1400 Thlr. + 1540 Thlr. = 4200 Thlr.

Man kürzt dieses Verfahren dadurch bedeutend ab, daß man bei den Bestimmungszahlen nicht allein die gleiche Anzahl Nullen fortläßt, sondern auch aus denselben die gleichen Factoren heraustrennt und solche außer Acht läßt; demnächst sucht man den Antheil für 1, und mit diesem gefundenen Antheil multiplicirt man jede gebliebene Bestimmungszahl.

Statt 4500 Thlr. + 5000 Thlr. + 5500 Thlr. setzt man 45 + 50 + 55, und hieraus den gleichen Factor 5 getrennt, giebt die Bestimmungszahlen:

9 + 10 + 11 = 30.

4200 : 30 = 140 für 1.

Es erhält also:

A.	9 × 140 =	1260 Thlr.
B.	10 × 140 =	1400 „
C.	11 × 140 =	1540 „
		4200 Thlr.

2) 3 Kaufleute führen ein gemeinschaftliches Geschäft aus; A. hat dazu 2000 Thlr. auf 9 Monate, B. 3000 Thlr. auf 7 Monate und C. 5000 Thlr. auf 3 Monate gegeben. Sie gewinnen 1800 Thlr.; wieviel erhält jeder von dem Gewinn?

2000 Thlr. auf 9 Monate ist gleich 18000 Thlr. auf 1 Monat.
3000 „ „ 7 „ „ „ 21000 „ „ 1 „
5000 „ „ 3 „ „ „ 15000 „ „ 1 „

Die gleiche Anzahl Nullen fort, giebt 18 + 21 + 15; daraus den gleichen Factor 3 getrennt, giebt 6 + 7 + 5 = 18.

1800 Thlr. : 18 = 100 Thlr. für 1.

Es erhält also:

A.	6 × 100 =	600 Thlr.
B.	7 × 100 =	700 „
C.	5 × 100 =	500 „
		1800 Thlr.

3) Zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen giebt A. am 1sten Januar 1600 Thlr., B. am 1sten März 2000 Thlr. und C. am 1sten Mai 2400 Thlr. Am Schlusse des Jahres haben sie 1460 Thlr. gewonnen; wieviel erhält jeder von dem Gewinn?

Vom 1sten Januar bis ultimo December sind 12 Monate, vom 1sten März bis ultimo December sind 10 Monate, vom 1sten Mai bis ultimo December sind 8 Monate.

Wenn es angeht, so trennt man, vor der Multiplication der Capitalien mit den Monaten, die gleichen Factoren aus beiden heraus, um kleinere Zahlen zu erhalten.

Die gleiche Anzahl Nullen in den Capitalien gestrichen, giebt 16 + 20 + 24; daraus der gleiche Factor 4 getrennt, bleibt 4 + 5 + 6. Aus den Monaten der gleiche Factor 2 getrennt, giebt 6, 5 und 4, folglich:

A. $4 \times 6 = 24$
B. $5 \times 5 = 25$
C. $6 \times 4 = 24$
73

1460 : 73 = 20 für 1.

Es erhält also:

A. 24 . 20 = 480 Thlr.
B. 25 . 20 = 500 „
C. 24 . 20 = 480 „
1460 Thlr.

4) 4 Bauern pachten eine Wiese für 41 Thlr. A. schickt 14 Kühe 20 Tage, B. 10 Kühe 24 Tage, C. 16 Kühe 16 Tage und D. 26 Kühe 8 Tage auf die Weide; wieviel muß jeder an Pacht zahlen?

14 Kühe 20 Tage ist gleich 280 Kühe 1 Tag,
10 „ 24 „ „ „ 240 „ 1 „ u. s. w.

Wie mit den Capitalien und Monaten im Beispiel 3, so verfährt man auch mit anderen, die Bestimmungszahl bildenden Posten.

Die Zahlen der Kühe haben den gemeinsamen Factor 2, also 7, 5, 8 und 13 Kühe; die Zahlen der Tage haben den gemeinsamen Factor 4, also 5, 6, 4 und 2 Tage. Folglich:

A. $7 \times 5 = 35$
B. $5 \times 6 = 30$
C. $8 \times 4 = 32$
D. $13 \times 2 = 26$
123

41 Thlr. : 123 = $^1/_3$ Thlr. für 1.

Es hat also zu zahlen:

A. $35 \times {}^1/_3 = 11^2/_3$ Thlr.
B. $30 \times {}^1/_3 = 10$ „
C. $32 \times {}^1/_3 = 10^2/_3$ „
D. $26 \times {}^1/_3 = 8^2/_3$ „
41 Thlr.

5) Zum Planiren einer Ebene schicken 4 Schachtmeister: A. 36 Arbeiter 20 Tage, B. 25 Arbeiter 24 Tage, C. 35 Arbeiter 16 Tage und D. 48 Arbeiter 15 Tage. Es werden 1300 Thlr. für das Planiren gezahlt; wieviel erhält davon jeder Schachtmeister?

36 Arbeiter 20 Tage ist = 720 Arbeiter 1 Tag u. s. w.

Da es aber gleichgültig ist, ob 36 Arbeiter 20 Tage oder 20 Arbeiter 36 Tage arbeiten, so kann man die Zahlen umwechseln, wo es zweckmäßig erscheint, und statt oben setzen:

A. 36 Arbeiter 20 Tage, B. 24 Arbeiter 25 Tage, C. 16 Arbeiter 35 Tage, D. 48 Arbeiter 15 Tage.

Nun läßt sich aus den Zahlen der Arbeiter der Factor 4, und aus den Zahlen der Tage der Factor 5 trennen, so daß 9, 6, 4, 12 Arbeiter, und 4, 5, 7 und 3 Tage bleiben; also:

A. $9 \times 4 = 36 = 18$
B. $6 \times 5 = 30 = 15$
C. $4 \times 7 = 28 = 14$
D. $12 \times 3 = 36 = 18$
65

(Factor 2 noch herausgetrennt.)

1300 Thlr. : 65 = 20 Thlr. für 1.

Es erhält demnach:

A. $18 \times 20 = 360$ Thlr.
B. $15 \times 20 = 300$ „
C. $14 \times 20 = 280$ „
D. $18 \times 20 = 360$ „
1300 Thlr.

6) 3 Maurermeister erhalten $470\frac{2}{3}$ Thlr. zur Auszahlung an ihre Leute. A. hat 13 Gesellen 7 Tage, B. 14 Gesellen 9 Tage, C. 17 Gesellen 8 Tage beschäftigt; wieviel erhält jeder Maurermeister zur Auszahlung?

Da sich hier, auch bei der Umwechselung der Posten, nichts heben läßt, so muß man die ganzen Zahlen multipliciren. Also:

A. $13 \times 7 = 91$	Es erhält mithin:
B. $14 \times 9 = 126$	A. $91 \times 1\frac{1}{3} = 121\frac{1}{3}$ Thlr.
C. $17 \times 8 = 136$	B. $126 \times 1\frac{1}{3} = 168$ "
353	C. $136 \times 1\frac{1}{3} = 181\frac{1}{3}$ "
$470\frac{2}{3}$ Thlr. : $353 = 1\frac{1}{3}$ Thlr. für 1.	$470\frac{2}{3}$ Thlr.

Entsteht bei der Division der Theilungssumme ($470\frac{2}{3}$) durch die Summe der Bestimmungszahlen (353) ein großer Bruch, so berechnet man für jede einzelne Bestimmungssumme den Antheil nach der Regeldetri, wie es im Beispiel 1 gezeigt ist. Also:

353 Thlr. geben $470\frac{2}{3}$ Thlr.	$\frac{1412 \cdot 91}{3 \cdot 353} = 121\frac{1}{3}$ Thlr. für A.
91 " " ? "	

Ebenso verfährt man, um den Antheil von B. und C. zu erhalten.

Läßt sich bei diesem Verfahren in dem Bruchsatz nichts heben, so wird oft die Rechnung sehr langwierig, und man löst dann den Bruchsatz leicht durch Logarithmen auf. (Siehe daselbst § 226.)

7) 4 Kaufleute kaufen gemeinschaftlich 80 Ctr. Kaffee für 2400 Thlr. Bei der Zahlung giebt A. 300 Thlr., B. 400 Thlr., C. 500 Thlr. mehr als D.; wieviel erhält jeder?

Bei Aufgaben dieser Art werden die Mehrbeträge zusammenaddirt, von der Theilungssumme abgezogen und der Rest derselben durch die Anzahl Theilnehmer dividirt; demnächst wird zu dem erhaltenen Quotienten jeder einzelne Mehrbetrag addirt.

300 Thlr. + 400 Thlr. + 500 Thlr. = 1200 Thlr. Mehrbetrag.

2400 Thlr. — 1200 Thlr. = 1200 Thlr.; 1200 Thlr. : 4 = 300 Thlr.

Es hat also gezahlt:	80 Ctr. : 24 = $3\frac{1}{3}$ Ctr.
A. 300 Thlr. + 300 Thlr. = 600 Thlr.	Es erhält demnach:
B. 300 " + 400 " = 700 "	A. $6 \times 3\frac{1}{3} = 20$ Ctr.
C. 300 " + 500 " = 800 "	B. $7 \times 3\frac{1}{3} = 23\frac{1}{3}$ "
D. 300 "	C. $8 \times 3\frac{1}{3} = 26\frac{2}{3}$ "
2400 Thlr.	D. $3 \times 3\frac{1}{3} = 10$ "
2 Nullen fort, giebt $6 + 7 + 8 + 3 = 24$.	80 Ctr.

8) Drei Erben sollen sich in 3700 Thlr. so theilen, daß B. 250 Thlr. weniger als A., und C. 150 Thlr. weniger als B. erhält; wieviel beträgt der Antheil eines jeden?

Wie die Mehrbeträge von der Theilungssumme subtrahirt werden (Beispiel 7), so werden die Wenigerbeträge zu derselben addirt; dann wird die Theilungssumme durch die Anzahl Theilnehmer dividirt und demnächst die einzelnen Wenigerbeträge von dem Quotienten subtrahirt.

B. erhält 250 Thlr. weniger als A., C. 400 Thlr. (250 Thlr. + 150 Thlr.) weniger als A., beide zusammen 650 Thlr. weniger.

3700 Thlr. + 650 Thlr. = 4350 Thlr.	A. 1450 Thlr.
4350 Thlr. : 3 = 1450 Thlr.	B. 1200 „ (1450 Thlr. — 250 Thlr.)
Also erhält:	C. 1050 „ (1200 Thlr. — 150 Thlr.)
	3700 Thlr.

9) 4 Geschwister: A. B. C. und D. sollen 5800 Thlr. so unter sich theilen, daß A. 300 Thlr. mehr als B., B. 150 Thlr. weniger als C., C. 200 Thlr. mehr als D. erhält; wieviel bekommt jeder?

In Aufgaben, bei denen einige Antheile mehr, andere weniger betragen, muß die Differenz dieser Mehr- und Wenigerbeträge vor der Vertheilung ausgeglichen werden; dann wird weiter wie in den Beispielen 7 und 8 verfahren.

Erhält D. x Thlr., so erhält C. x Thlr. + 200 Thlr.; B. x Thlr. + 200 Thlr. — 150 Thlr.; A. x Thlr. + 200 Thlr. — 150 Thlr. + 300 Thlr.

Die 3 letzten erhalten also	Es erhält demnach:
zusammen 900 Thlr. mehr	D. 1300 Thlr.
300 „ weniger	C. 1500 „ (1300 Thlr. + 200 Thlr.)
600 Thlr. mehr.	B. 1350 „ (1500 „ — 150 „)
5800 Thlr. — 600 Thlr. = 5200 Thlr.	A. 1650 „ (1350 „ + 300 „)
5200 Thlr. : 4 = 1300 Thlr.	5800 Thlr.

10) 4 Brüder A. B. C. und D. sollen eine Erbschaft von 6700 Thlrn. so unter sich theilen, daß A. $^1/_3$ und 100 Thlr., B. $^1/_6$ und 800 Thlr., C. $^1/_4$ weniger 200 Thlr. und D. den Rest erhalten soll; wieviel erhält jeder?

100 Thlr. + 800 Thlr. — 200 Thlr. = 700 Thlr. mehr; 6700 Thlr. — 700 Thlr. = 6000 Thlr.

$^1/_3 + {}^1/_6 + {}^1/_4 = {}^4/_{12} + {}^2/_{12} + {}^3/_{12} = {}^9/_{12}$, also Rest $^3/_{12}$.

Die gleichen Nenner fort, giebt 4 + 2 + 3 + 3 = 12; 6000 Thlr. : 12 = 500 Thlr.

Also erhält:	A. 4 × 500 Thlr.	= 2000 Thlr.	+ 100 Thlr.	=	2100 Thlr.
	B. 2 × 500 „	= 1000 „	+ 800 „	=	1800 „
	C. 3 × 500 „	= 1500 „	— 200 „	=	1300 „
	D. 3 × 500 „	=			1500 „
					6700 Thlr.

11) Ein Kaufmann glaubt mit einer gewissen Summe seine 3 Gläubiger befriedigen zu können, allein A. liquidirt $^5/_{11}$, B. $^7/_{22}$, C. $^{12}/_{33}$ der Summe, so daß diese nicht reicht und der Kaufmann noch 30 Thlr. zulegen muß; wie groß war die als Zahlung bestimmte Summe und wieviel hatte jeder Gläubiger zu fordern?

$^5/_{11} + {}^7/_{22} + {}^{12}/_{33} = {}^{75}/_{66}$, also $^9/_{66}$ mehr als ein Ganzes.

Diese $^9/_{66}$ wurden mit 30 Thlrn. ausgeglichen. Wenn $^9/_{66}$ = 30 Thlr. sind, dann sind $^{66}/_{66}$ = 220 Thlr. (9 geben 30, was geben 66?) Die zur Befriedigung der Gläubiger bestimmte Summe war also 220 Thlr., und die Forderungen betrugen 250 Thlr., und zwar:

A. $^{30}/_{66}$, B. $^{21}/_{66}$, C. $^{24}/_{66}$; oder die gleichen Nenner fort,

A. 30, B. 21, C. 24, und den Factor 3 herausgetrennt,

A. 10, B. 7, C. 8, zusammen 25.

250 Thlr. : 25 = 10.

Also hat zu fordern:

A. $10 \times 10 = 100$ Thlr.
B. $7 \times 10 = 70$ „
C. $8 \times 10 = 80$ „
250 Thlr.

12) A. kauft ein halbes Lotterieloos und überläßt B. $^3/_4$ seines Antheils; dieser überträgt an C. $^1/_2$ seines Antheils und dieser an D. $^1/_4$ seines Antheils. Sie gewinnen nach Abzug der üblichen Procente 512 Thlr.; wieviel erhält jeder?

$^3/_4 \times {}^1/_2$ sind $^3/_8$, also behält A. $^1/_8$ und B. erhält $^3/_8$.
$^1/_2 \times {}^3/_8$ sind $^3/_{16}$, also behält B. $^3/_{16}$ und C. erhält $^3/_{16}$.
$^1/_4 \times {}^3/_{16}$ sind $^3/_{64}$, also behält C. $^9/_{64}$ und D. erhält $^3/_{64}$.

Es hat demnach:

A. $^8/_{64}$, B. $^{12}/_{64}$, C. $^9/_{64}$, D. $^3/_{64}$, oder die Nenner fort,

A. 8, B. 12, C. 9, D. 3, zusammen 32.

512 : 32 = 16.

Es erhält also:

A. $8 \times 16 = 128$ Thlr.
B. $12 \times 16 = 192$ „
C. $9 \times 16 = 144$ „
D. $3 \times 16 = 48$ „
512 Thlr.

13) 4 Personen sollen sich in 6550 Thlr. so theilen, daß sich der Antheil von A. zu B. wie 4 : 5, der von B. zu C. wie 6 : 7 und der von C. zu D. wie 5 : 6 verhalte; wieviel erhält jeder?

Wenn A. 4 erhält, so erhält B. 5.

B. : C. = 6 : 7; B. = 5, also:

$$\left.\begin{aligned} 5 : C. &= 6 : 7 \\ C. &= \frac{5 \,.\, 7}{6} = \frac{35}{6} \end{aligned}\right\} \text{§ 154.}$$

C. : D. = 5 : 6; C. = $^{35}/_6$, also:

$$\left.\begin{aligned} {}^{35}/_6 : D. &= 5 : 6 \\ D. &= \frac{35 \,.\, 6}{6 \,.\, 5} = 7 \end{aligned}\right\} \text{§ 154.}$$

Also hat:

A. 4, B. 5, C. $^{35}/_6$, D. 7, oder
A. $^{24}/_6$, B. $^{30}/_6$, C. $^{35}/_6$, D. $^{42}/_6$, oder
A. 24, B. 30, C. 35, D. 42 = 131.

6550 Thlr. : 131 = 50 Thlr.

Folglich erhält:

A. $24 \times 50 = 1200$ Thlr.
B. $30 \times 50 = 1500$ „
C. $35 \times 50 = 1750$ „
D. $42 \times 50 = 2100$ „
6550 Thlr.

14) Ein Kaufmann kauft 4 verschiedene Sorten Kaffee, von jeder Sorte 270 Pfd., und zahlt dafür im Ganzen 315 Thlr. Dem Preise nach sind 72 Pfd. der 1sten Sorte gleich 54 Pfd. der 2ten, gleich 48 Pfd. der 3ten, gleich 36 Pfd. der 4ten Sorte; wieviel bezahlte er für jede Sorte, und was kostet 1 Pfd. jeder Sorte?

Wenn 72 Pfd. der 1sten Sorte so viel kosten, wie 54 Pfd. der 2ten Sorte, so verhält sich der Werth der 1sten zur 2ten Sorte wie $54 : 72 = 1 : {}^{72}/_{54} = 1 : 1^1/_3$,
1sten zur 3ten „ „ $48 : 72 = 1 : {}^{72}/_{48} = 1 : 1^1/_2$,
1sten zur 4ten „ „ $36 : 72 = 1 : {}^{72}/_{36} = 1 : 2$.

Kostet also die erste Sorte 1, dann kostet die 2te Sorte $1^1/_3$, die 3te Sorte $1^1/_2$ und die 4te Sorte 2, zusammen $5^5/_6$. 315 Thlr. : $5^5/_6$ = 54 Thlr. Also kostet:

die 1ste	Sorte	54 Thlr.	und das Pfund	$^{54}/_{270}$ Thlr.	= 6 Sgr.
die 2te	"	72 "	($54 \times 1^1/_3$) "	$^{72}/_{270}$ "	= 8 "
die 3te	"	81 "	($54 \times 1^1/_2$) "	$^{81}/_{270}$ "	= 9 "
die 4te	"	108 "	(54×2) "	$^{108}/_{270}$ "	= 12 "

15) Ein Feuerwerkssatz besteht aus 2 Theilen Salpeter, $^1/_3$ Theil Schwefel, 1 Theil Kohlen und 5 Theilen Mehlpulver. Wenn nun 35 Pfd. Satz angesetzt werden sollen, wieviel muß von jeder dieser Ingredienzien genommen werden?

$2 + {}^1/_3 + 1 + 5 =$
$^6/_3 + {}^1/_3 + {}^3/_3 + {}^{15}/_3 =$
$6 + 1 + 3 + 15 = 25.$
$35 : 25 = 1^2/_5.$

$6 \times 1^2/_5 = 8^2/_5$ Pfd. Salpeter,
$1 \times 1^2/_5 = 1^2/_5$ Pfd. Schwefel,
$3 \times 1^2/_5 = 4^1/_5$ Pfd. Kohlen,
$15 \times 1^2/_5 = 21$ Pfd. Mehlpulver.
35 Pfd. Satz.

16) 3 Schriftsetzer sollen 69 Bogen setzen und à Bogen $3^5/_6$ Thlr. Setzerlohn erhalten. A. setzt in 15 Stunden $^1/_2$ Bogen, B. in 12 Stunden $^3/_5$ Bogen und C. in 18 Stunden $^4/_5$ Bogen; wie lange setzen sie an den 69 Bogen, und wieviel erhält jeder seiner Leistung angemessen?

A. in 15 Stunden $^1/_2$ Bogen, also in 1 Stunde $^1/_{30} = {}^6/_{180}$ Bogen.
B. in 12 " $^3/_5$ " " in 1 " $^3/_{60} = {}^9/_{180}$ "
C. in 18 " $^4/_5$ " " in 1 " $^4/_{90} = {}^8/_{180}$ "
zusammen in 1 Stunde $^{23}/_{180}$ Bogen.

69 Bogen : $^{23}/_{180} = \frac{69 \,.\, 180}{23} = 540$ Stunden setzen alle 3 an den 69 Bogen.

Die Leistungsfähigkeit ist:
A. $^6/_{180}$, B. $^9/_{180}$, C. $^8/_{180}$, oder
A. 6, B. 9, C. 8, zusammen 23,
69 Bogen à $3^5/_6$ Thlr. = $264^1/_2$ Thlr.
$264^1/_2$ Thlr. : 23 = $11^1/_2$ Thlr.

Also erhält:
A. $6 \times 11^1/_2$ Thlr. = 69 Thlr.
B. $9 \times 11^1/_2$ " = $103^1/_2$ "
C. $8 \times 11^1/_2$ " = 92 "
$264^1/_2$ Thlr.

Andere Aufgaben der Gesellschaftsrechnung siehe Gleichungen, § 208.

X. Die Durchschnitts-Rechnung.

§ 159.

Durchschnitt, Durchschnittspreis, Durchschnittswerth ist derjenige Werth, der durch die Ausgleichung zweier oder mehrerer gegebenen höheren und niederen Werthe eines Gegenstandes oder Stoffes entsteht und dann als alleiniger Werth statt jener verschiedenen Werthe gesetzt werden kann. Kauft z. B. Jemand 2 Cntr. Waare zu 38 und 34 Thlrn., so hat er im Durchschnitt 36 Thlr. für den Cntr. gegeben, weil 2 Thlr. mehr für den einen Cntr. mit 2 Thlr. weniger für den anderen Cntr. sich ausgleichen. Die Durchschnittsrechnung lehrt, wie diese Ausgleichung auch bei zusammengesetzteren Fragen geschehen muß, und unterscheidet dabei folgende 3 Hauptfälle:

a) Die Werthzahlen beziehen sich auf die Einheit der Quantitätszahlen, und diese letzteren sind gleich.

b) Die Werthzahlen beziehen sich auf die Einheit der Quantitätszahlen, und diese letzteren sind nicht gleich.

c) Die Werthzahlen beziehen sich nicht auf die Einheit der Quantitätszahlen.

A. Die Werthzahlen beziehen sich auf die Einheit der Quantitätszahlen, und diese letzteren sind gleich.

§ 160.

Man addirt die Werthzahlen und dividirt die Summe durch die Anzahl der Posten, von denen der Durchschnitt gesucht wird; die Quantitätszahlen bleiben unbeachtet, weil sie gleich sind.

1) Es kauft Jemand 12 Centner Kaffee: 4 Centner à 8 Sgr. das Pfund, 4 Ctr. à 10 Sgr. das Pfund und 4 Ctr. à 12 Sgr. das Pfund; was kostet 1 Pfd. im Durchschnitt.

Die Werthzahlen 8 Sgr., 10 Sgr. und 12 Sgr. beziehen sich auf 1 Pfd.

Die Quantitätszahlen 4 Ctr. oder 400 Pfd. sind bei den 3 Posten gleich, kommen also nicht in Betracht.

8 Sgr. + 10 Sgr. + 12 Sgr. = 30 Sgr.; 30 Sgr. : 3 = 10 Sgr. kostet das Pfund im Durchschnitt.

2) Es werden 3 Fässer Wein à 2 Hekto gekauft. Von dem 1sten Faß wird das Liter mit 25 Sgr. 6 Pf., von dem 2ten mit 24 Sgr. 9 Pf., von dem 3ten mit 27 Sgr. 3 Pf. bezahlt; was kostet das Liter im Durchschnitt?

Die Quantitätszahlen sind gleich, jede 2 Hekto; Anzahl Posten 3. 25 Sgr. 6 Pf. + 24 Sgr. 9 Pf. + 27 Sgr. 3 Pf. = 2 Thlr. 17 Sgr. 6 Pf.

2 Thlr. 17 Sgr. 6 Pf. : 3 = 25 Sgr. 10 Pf. im Durchschnitt für das Liter.

3) Es reiset Jemand 4 Tage und macht am 1sten Tage $4\frac{1}{2}$ Meilen, am 2ten Tage $4\frac{3}{4}$ Meilen, am 3ten Tage $5\frac{1}{2}$ Meilen und am 4ten Tage $6\frac{1}{4}$ Meilen; wie viele Meilen hat er täglich im Durchschnitt gemacht?

$4\frac{1}{2} + 4\frac{3}{4} + 5\frac{1}{2} + 6\frac{1}{4} = 21$ Meilen; 21 Meilen : 4 = $5\frac{1}{4}$ Meilen täglich im Durchschnitt.

4) Jemand hat 18000 Thlr. in 3 Capitalien à 6000 Thlr. zu 5 %, $4\frac{1}{2}$ % und $3\frac{1}{2}$ % ausgeliehen; wie hoch ist das ganze Capital im Durchschnitt verzinset?

(Die Quantitätszahlen sind gleich; jede 60 Hundert.)

$5 + 4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 13$; 13 : 3 = $4\frac{1}{3}$ % im Durchschnitt.

5) Die Preise des Roggens waren in einem Monat: am 1sten 1 Thlr. 20 Sgr., am 8ten 1 Thlr. 24 Sgr., am 15ten 1 Thlr. 28 Sgr., am 22sten 2 Thlr. 2 Sgr., am 29sten 1 Thlr. 26 Sgr. pro Neuscheffel; welches ist der Durchschnittspreis des Roggens in diesem Monat? (Anzahl Posten 5.)

1 Thlr. 20 Sgr. + 1 Thlr. 24 Sgr. + 1 Thlr. 28 Sgr. + 2 Thlr. 2 Sgr. + 1 Thlr. 26 Sgr. = 9 Thlr. 10 Sgr.

9 Thlr. 10 Sgr. : 5 = 1 Thlr. 26 Sgr. Durchschnitt pro Neuscheffel.

6) Eine Actiengesellschaft zahlte im Jahre 1862 12 %, im Jahre 1863 10 %, im Jahre 1866 18 %, im Jahre 1867 11 % Dividende; wieviel Procent zahlte sie jährlich im Durchschnitt?

12 % + 10 % + 18 % + 11 % = 51 %; 51 % : 6 = $8\frac{1}{2}$ % im Durchschnitt.

(Anzahl der Posten mußten 6 genommen werden, weil die Jahre 1864 und 1865 mitzählen.)

7) Der höchste Wasserstand eines Flusses war in 5 hinter einander folgenden Jahren 6,8 Meter, 6,92 Meter, 6,10 Meter, 8,38 Meter und 7,8 Meter; welches ist durchschnittlich der höchste Wasserstand des Flusses in dieser Zeit gewesen?

6,80 + 6,92 + 6,10 + 8,38 + 7,80 Meter = 36 Meter.

36 Meter : 5 = 7,20 Meter = 7 Meter 20 Centi.

B. Die Werthzahlen beziehen sich auf die Einheit der Quantitätszahlen, und diese sind nicht gleich.

§ 161.

Man multiplicirt jede Werthzahl mit der zugehörigen Quantitätszahl, addirt das Produkt und dividirt es durch die Summe der Quantitätszahlen.

1) Es kauft Jemand Kaffee: 8 Pfd. à 8 Sgr., 12 Pfd. à 8 Sgr. 10 Pfenn. und 10 Pfd. à 10 Sgr.; was kostet 1 Pfd. im Durchschnitt?

8	×	8 Sgr.	=	64 Sgr.
12	×	8 „ 10 Pf.	=	106 „
10	×	10 „	=	100 „
30		—		270 Sgr.

270 : 30 = 9 Sgr.

2) Ein Kaufmann mengt 4 Sorten Taback, nämlich: 8 Pfd. à 10 Sgr., 12 Pfd. à 12 Sgr., 6 Pfd. à 15 Sgr. und 4 Pfd. à 19 Sgr.; was kostet 1 Pfd. der Mengung oder, was dasselbe ist, was kostet 1 Pfd. im Durchschnitt?

$$\begin{array}{rcrcrl} 8 & \times & 10 & = & 80 & \text{Sgr.} \\ 12 & \times & 12 & = & 144 & " \\ 6 & \times & 15 & = & 90 & " \\ 4 & \times & 19 & = & 76 & " \\ \hline 30 & & & & 390 & \text{Sgr.} \end{array}$$

390 : 30 = 13 Sgr.

3) Es kauft Jemand 16 Centner Waare: 3 Ctr. à 24 Thlr., 5 Ctr. à 25 Thlr., 6 Ctr. à $24^2/_3$ Thlr., 2 Ctr. à $26^1/_2$ Thlr.; was kostet ihm der Centner im Durchschnitt?

$$\begin{array}{rcrcrl} 3 & \times & 24 & = & 72 & \text{Thlr.} \\ 5 & \times & 25 & = & 125 & " \\ 6 & \times & 24^2/_3 & = & 148 & " \\ 2 & \times & 26^1/_2 & = & 53 & " \\ \hline 16 & & & & 398 & \text{Thlr.} \end{array}$$

398 : 16 = $24^7/_8$ Thlr.

4) Jemand macht 3 Reisen von 8, 12 und 16 Tagen; bei der 1sten macht er 6, bei der 2ten $5^1/_2$ und bei der 3ten $4^1/_2$ Meilen täglich. Wie viele Meilen hat er täglich im Durchschnitt gemacht?

$$\begin{array}{rcrcrl} 8 & \times & 6 & = & 48 & \text{Meilen} \\ 12 & \times & 5^1/_2 & = & 66 & " \\ 16 & \times & 4^1/_2 & = & 72 & " \\ \hline 36 & & & & 186 & \text{Meilen.} \end{array}$$

186 : 36 = $5^1/_6$ Meilen.

5) Es sind 3 Capitalien: 6000 Thlr. à 5%, 5000 Thlr. à 4% und 9000 Thaler à $3^1/_3$% ausgeliehen; wie hoch sind die 20000 Thlr. im Durchschnitt verzinset?

$$\begin{array}{rlrlrl} 60 & \text{Hundert à} & 5 & \text{Thlr.} & = 300 & \text{Thlr.} \\ 50 & \quad " \quad \text{à} & 4 & \quad " & = 200 & " \\ 90 & \quad " \quad \text{à} & 3^1/_3 & \quad " & = 300 & " \\ \hline 200 & & & & 800 & \text{Thlr.} \end{array}$$

800 : 200 = 4%.

6) Bei einem 3-tägigen Scheibenschießen auf gleicher Entfernung waren am 1sten Tage von 300 Schüssen 60%, am 2ten Tage von 400 Schüssen 70%, am 3ten Tage von 500 Schüssen 80% Treffer; wieviel Procent Treffer sind im Durchschnitt gewesen?

$$\begin{array}{rlrlrl} 3 & \text{Hundert à} & 60 & \text{Tr.} & = 180 & \text{Tr.} \\ 4 & \quad " \quad \text{à} & 70 & " & = 280 & " \\ 5 & \quad " \quad \text{à} & 80 & " & = 400 & " \\ \hline 12 & & & & 860 & \text{Tr.} \end{array}$$

860 : 12 = $71^2/_3$% Treffer.

7) 5 Arbeiter haben zu einer Arbeit 6 Tage, 8 Arbeiter zu derselben Arbeit 4 Tage und 4 Arbeiter zu derselben Arbeit $9^1/_4$ Tage gebraucht. Wenn nun hiervon der Durchschnitt als Norm angenommen wird, wie viele Tage werden 12 Arbeiter zu der Arbeit gebrauchen?

$$\begin{array}{rlrlcrlrl} 5 & \text{Arbeiter} & 6 & \text{Tage} & \text{ist} = & 1 & \text{Arbeiter} & 30 & \text{Tage} \\ 8 & \quad " & 4 & \quad " & \quad " = & 1 & \quad " & 32 & \quad " \\ 4 & \quad " & 9^1/_4 & \quad " & \quad " = & 1 & \quad " & 37 & \quad " \\ \cline{6-6}\cline{8-8} & & & & & 3 & \text{Arbeiter} & 99 & \text{Tage} \\ & & & & & 1 & \quad " & 33 & \quad " \quad \text{Durchschnitt.} \end{array}$$

33 : 12 = $2^3/_4$ Tage gebrauchen 12 Arbeiter.

8) Einen Graben von bestimmter Tiefe und Breite haben 4 Arbeiter in 3 Tagen 40 Meter, 6 Arbeiter in 4 Tagen 88 Meter, und 8 Arbeiter in 6 Tagen 168 Meter lang ausgegraben; wie viele Meter hat hiernach durchschnittlich 1 Mann in 1 Tag ausgegraben?

4 Arbeiter	in 3 Tagen	40 Meter	ist 1 Arbeiter	in 1 Tag	$^{40}/_{12}$	=	$^{20}/_{6}$
6 „	„ 4 „	88 „	„ 1 „	„ 1 „	$^{88}/_{24}$	=	$^{22}/_{6}$
8 „	„ 6 „	168 „	„ 1 „	„ 1 „	$^{168}/_{48}$	=	$^{21}/_{6}$
			3				$^{63}/_{6}$

also 1 Arbeiter in 1 Tag $\frac{63}{6} : 3 = \frac{21}{6} = 3^1/_2$ Meter.

C. Die Werthzahlen beziehen sich nicht auf die Einheit der Quantitätszahlen.

§ 162.

Man addirt die Werthzahlen und die Quantitätszahlen und dividirt die Summe der ersteren durch die Summe der letzteren.

1) Jemand kauft 3 Partien Kaffee: 4 Ctr. zu $105^1/_2$ Thlr., 6 Ctr. zu $156^1/_2$ Thlr. und 5 Ctr. zu 131 Thlr; was kostet der Ctr. im Durchschnitt?

4	Centner	$105^1/_2$ Thlr.
6	„	$156^1/_2$ „
5	„	131 „
15		393 Thlr.

393 : 15 = $26^1/_5$ Thlr.

2) Ein Weinhändler gießt zu 4 Hekto Wein à 112, 134, 137 und 145 Frcs. 40 Liter Wasser; was kostet ihm nun das Liter im Durchschnitt?

100	Liter zu	112 Frcs.
100	„ „	134 „
100	„ „	137 „
100	„ „	145 „
40	„ „	0 „
440		528 Frcs.

528 Frcs. : 440 = 1,20 = 1 Frc. 20 Cent.

3) Von 3 ausgeliehenen Capitalien à 6000 Thlr. bringt das eine 210 Thlr., das andere 240 Thlr. und das 3te 300 Thlr. Zinsen; wieviel Procent Zinsen bringen die Capitalien im Durchschnitt?

60	Hundert	210 Thlr.
60	„	240 „
60	„	300 „
180		750 Thlr.

750 : 180 = $4^1/_6$ %.

4) Es kauft Jemand 3 Partien Mauersteine à 20000 Stück für 140, 152 und 155 Thlr.; was kostet das Tausend der Steine im Durchschnitt?

20	Tausend	140 Thlr.
20	„	152 „
20	„	155 „
60		447 Thlr.

447 : 60 = $7^9/_{20}$ Thlr.

5) Jemand kauft 3 Gespanne à 4 Pferde; für das 1ste Gespann zahlt er 386 Thlr., für das 2te 426 Thlr. und für das 3te 436 Thlr. Was kostet ihm 1 Pferd durchschnittlich?

4	Pferde	386 Thlr.
4	„	426 „
4	„	436 „
12		1248 Thlr.

1248 : 12 = 104 Thlr.

6) Wenn Jemand in 8 Tagen 40 Meilen, in 10 Tagen 45 Meilen und in 16 Tagen 68 Meilen macht; wieviel hat er dann täglich im Durchschnitt gemacht?

8 Tage	40 Meilen	
10 „	45 „	
16 „	68 „	
34	153 Meilen.	

$153 : 34 = 4^1/_2$ Meilen.

7) Es macht Jemand 4 Reisen, jede von 8 Tagen: die erste beträgt 32, die 2te 36, die 3te 40 und die 4te 44 Meilen; wie viele Meilen hat er täglich im Durchschnitt gemacht?

$32 + 36 + 40 + 44 = 152$ Meilen in 32 Tagen.

$152 : 32 = 4^3/_4$ Meilen täglich.

8) 38 Brodte wiegen 197 Pfd.
42 „ „ 218 „
40 „ „ 209 „
} Was wiegt 1 Brod im Durchschnitt?

120 — 624 : 120 = $5^1/_5$ Pfund.

9) In 3 Abtheilungen machen:

96 Mann 529 Schüsse
86 „ 391 „
120 „ 590 „
} Wie viele Schüsse kommen im Durchschnitt auf den Mann?

302 — 1510 : 302 = 5 Schüsse.

10) Die erste Steuerklasse einer Stadt besteht aus 12 Personen und zahlt 3456 Thlr. Steuern, die 2te Klasse besteht aus 186 Personen und zahlt 2593 Thlr., die 3te Klasse aus 645 Personen und zahlt 1819 Thlr.; wieviel Steuer kommt durchschnittlich auf den Kopf?

12 Personen	3456 Thlr.
186 „	2593 „
645 „	1819 „
843	7868 : 843 = $9^1/_3$ Thlr.

XI. Die Mischungs- oder Alligations-Rechnung.

§ 163.

Substanzen, Ingredienzien oder Stoffe zusammenthun, wird, wenn sie sich im trockenen Zustande befinden, so daß nur eine mechanische Verbindung der Theile stattfindet, Mengung, wenn sie sich im flüssigen Zustande befinden, so daß eine chemische Verbindung oder Schmelzung stattfindet, Mischung genannt. Mengungen und Mischungen haben einen und denselben Zweck, deshalb wird häufig die Mengung auch Mischung genannt, und es führt die Mengungs- und Mischungsrechnung auch gewöhnlich nur den letzten Namen allein.

Mischungen (Mengungen) kommen schon bei der Gesellschaftsrechnung (§ 158 Beispiel 15) und bei der Durchschnittsrechnung (§ 161 und 162 Beispiel 2) vor; allein die eigentliche Mischungs- und Alligationsrechnung (von alligare, verbinden) hat es mit Aufgaben anderer Art zu thun. Während bei jenen beiden nur eine Theilung vollführt oder der Durchschnitt (Mittelpreis, Mittelwerth) gemengter oder gemischter Substanzen gesucht wird, ist bei der Alligationsrechnung der Mittelpreis und der Werth der Quantitäten gegeben; es soll die Größe der Quantität (Quantitätszahlen), welche der Mittelpreis bedingt, gesucht werden.

Der Rechenweise nach, wird die Mischungsrechnung in 2 Haupttheile getheilt: die Mischung von zwei Stoffen oder Substanzen, und die Mischung von mehr als 2 Stoffen oder Substanzen. Bei 2 Stoffen sind die gefundenen Quantitätszahlen die allein möglichen; bei mehr als 2 Stoffen können dagegen verschiedene Zahlen für jede Quantität angenommen werden, die alle ein richtiges Resultat geben. Jede dieser beiden Rechenweisen wird nach einer bestimmten Regel ausgeführt, die in folgender Art gefunden wird:

Es sollen 2 Sorten Taback, das Pfund zu 28 Sgr. und zu 18 Sgr., in solcher Weise gemengt werden, daß das Pfund 22 Sgr. kostet.

Nimmt man von jeder Sorte 1 Pfd., so verliert man bei der theuren Sorte 6 Sgr. pro Pfund, und an dem Pfunde der billigen Sorte werden 4 Sgr. gewonnen. Es würde also in diesem Falle das Pfund der Mischung mehr als 22 Sgr. werth sein; nur wenn sich der Gewinn mit dem Verlust ausgliche, würde das Pfund 22 Sgr. kosten. Es gleicht sich aber der Gewinn mit dem Verlust aus, wenn man die Differenz der theuren Sorte (6 Sgr.) so oft nimmt, wie die Differenz der billigen Sorte (4) anzeigt (= 24 Sgr. Verlust) und die Differenz der billigen Sorte (4 Sgr.) so oft nimmt, wie die Differenz der theuren Sorte (6) anzeigt (= 24 Sgr. Gewinn). 24 Sgr. Verlust und 24 Sgr. Gewinn heben sich. Da sich demnach bei 10 Pfd., d. h. bei 6 Pfd. billiger und 4 Pfd. theurer Sorte, der Verlust und Gewinn ausgleicht, so wird nach dem Verhältniß von 6 : 4 oder 3 : 2 oder $1\frac{1}{2}$: 1 die Mischung ausgeführt.

In dieser Weise kann bei allen Mischungen zweier Substanzen das Mischungsverhältniß gefunden werden; es ist deshalb der Kürze wegen für 2 Stoffe immer folgende 1ste Alligations-Regel in Anwendung zu bringen:

Man stelle den Preis der theuren Sorte oben, den Preis der billigen Sorte darunter und vor beide den Mittelpreis.

Die Differenz des Mittelpreises und der theuren Sorte giebt die Menge der zu nehmenden **billigen** *Sorte, und die Differenz des Mittelpreises und der billigen Sorte giebt die Menge der zu nehmenden* **theuren** *Sorte.*

	╱ 28 = 6 Pfd. billige Sorte à 18 Sgr.	= 108 Sgr.
22		
	╲ 18 = 4 Pfd. theure Sorte à 28 Sgr.	= 112 Sgr.
	10 Pfd. Mischung à 22 Sgr.	= 220 Sgr.

Oder:

	╱ 28 = 6 = 3 Pfd. billige Sorte à 18 Sgr.	= 54 Sgr.
22		
	╲ 18 = 4 = 2 Pfd. theure Sorte à 28 Sgr.	= 56 Sgr.
	5 Pfd. Mischung à 22 Sgr.	= 110 Sgr.

§ 164.

Nimmt man die Differenz der theuren und der billigen Sorte als Nenner zweier Brüche an und giebt ihnen beliebige, aber gleiche Zähler, die größer als die Nenner sind und möglichst ganze Zahlen geben, wenn sie gehoben werden, so liefern die aus diesen Brüchen entstehenden ganzen Zahlen dasselbe Verhältniß, wie es in § 163 gefunden worden ist.

Bei 12 als Zähler:		Bei 36 als Zähler:	
22 ╱ 28 = 6	$\frac{12}{6} = 2$ theure Sorte	22 ╱ 28 = 6	$\frac{36}{6} = 6 = 2$ theure Sorte
22 ╲ 18 = 4	$\frac{12}{4} = 3$ billige Sorte	22 ╲ 18 = 4	$\frac{36}{4} = 9 = 3$ billige Sorte

Hierauf basirt, läßt sich nun folgende 2te Alligations-Regel für mehr als 2 Substanzen bilden:

Man stelle die Preise der theuren Sorten oben, die Preise der billigen Sorten darunter und vor diese, unter die theuren Preise, den Mittelpreis. Darauf setze man die Differenzen rechts heraus, gebe den theuren Preisen beliebige aber größere Zähler als die Nenner sind, und so, daß möglichst ganze Zahlen beim Aufheben entstehen; hierauf gebe man auch den billigen Preisen beliebige Zähler, die größer als die Nenner sind, so daß beim Aufheben ganze Zahlen entstehen; beobachte dabei aber, daß die Summe dieser letzten Zähler (also dieselben addirt) **gleich** ist der Summe der addirten Zähler der theuren Sorte. Alle hierdurch entstehenden unechten Brüche zu Ganzen gemacht, geben dann die Zahlen, der von jeder Sorte zu nehmenden Menge.

Man kann natürlich auch zuerst den billigen Sorten die Zähler geben und dann die Zähler der theuren Sorten danach bestimmen.

Soll aus 5 Sorten Wein à Liter 28 Sgr., 20 Sgr., 14 Sgr., 12 Sgr. und 6 Sgr. eine Sorte Wein zu 18 Sgr. das Liter gemischt werden, so ist die Rechnung nach der vorstehenden Regel folgende:

18 —	28 = $10^{\,30}$	= $^{30}/_{10}$	= 3 Liter	à 28 Sgr.	= 84 Sgr.
	20 = $2^{\,10}$	= $^{10}/_{2}$	= 5 „	à 20 „	= 100 „
	14 = $4^{\,4}$	= $^{4}/_{4}$	= 1 „	à 14 „	= 14 „
	12 = $6^{\,12}$	= $^{12}/_{6}$	= 2 „	à 12 „	= 24 „
	6 = $12^{\,24}$	= $^{24}/_{12}$	= 2 „	à 6 „	= 12 „
			13 Liter Mischung		= 234 Sgr.
			1 Liter Mischung		= $^{234}/_{13}$ = 18 Sgr.

Um ganze und nicht zu hohe Zahlen zu erhalten, sind den Differenzen der drei billigen Sorten die Zähler 4, 12 und 24, zusammen 40 gegeben; nun mußten auch die Zähler der beiden theuren Sorten zusammen 40 ausmachen, und da ist beliebig 30 und 10 genommen, obgleich auch 20 und 20 u. s. w. genommen werden konnte.

Eine andere Mischung derselben Weinsorten zu demselben Mittelpreise ist

	$28 = 10$	$\overline{15}$	$= {}^{15}/_{10}$	$= 1^1/_2$ Liter	à 28 Sgr.	$= 42$ Sgr.
	$20 = 2$	$\overline{5}$	$= {}^{5}/_{2}$	$= 2^1/_2$ „	à 20 „	$= 50$ „
18 —	$14 = 4$	$\overline{4}$	$= {}^{4}/_{4}$	$= 1$ „	à 14 „	$= 14$ „
	$12 = 6$	$\overline{4}$	$= {}^{4}/_{6}$	$= {}^{2}/_{3}$ „	à 12 „	$= 8$ „
	$6 = 12$	$\overline{12}$	$= {}^{12}/_{12}$	$= 1$ „	à 6 „	$= 6$ „
				$6^2/_3$ Liter Mischung		$= 120$ Sgr.

$$1 \text{ Liter Mischung} = \frac{120 \,.\, 3}{20} = 18 \text{ Sgr.}$$

Die Zähler der billigen Sorten sind zu 12, 4, 4 = 20, die der theuren Sorten zu 15 und 5 = 20 angenommen. Man sieht, daß noch sehr viel beliebige Mischungen derselben Stoffe zu dem gleichen Mittelpreise stattfinden können. Da aber in der Praxis nur eine Mischung gebraucht werden kann, so muß man gleich darauf sehen, das man derjenigen Sorte, welche am meisten zur Mischung verwandt werden soll, den größten Zähler giebt.

§ 165.

Die beiden in § 163 und 164 entwickelten Regeln bilden die Grundlage der ganzen Mischungsrechnung. Es wäre deshalb auch nur nöthig, Aufgaben zur Anwendung dieser beiden Regeln folgen zu lassen; allein, da bei der Gesellschafts- und Durchschnittsrechnung nur wenige Beispiele von Mischungen vorkommen, so sind hier noch einige besondere Fälle der Art mit aufgenommen.

Der großen Verschiedenheit der Stoffe wegen sind die folgenden Aufgaben noch eingetheilt in:

Mengung oder Mischung trockener und flüssiger (liquider) Substanzen;

Mischung oder Legirung der Metalle;

Procentveränderungen des Spiritus durch Wasserbeimischungen.

A. Mengung oder Mischung trockener und liquider Substanzen.

a) Nach der Gesellschafts- und Durchschnittsrechnung.

§ 166.

1) Von 2 Sorten Taback soll ein Centner so gemengt werden, daß auf 10 Pfd. à 12 Sgr., 5 Pfd. à 9 Sgr. kommen; wieviel Pfund von jeder Sorte sind zu nehmen, und was kostet 1 Pfd. der Mengung?

10 Pfd. + 5 Pfd. = 15 Pfd.; 100 Pfd. : 15 = $6^2/_3$ Pfd.

$6^2/_3 \times 10 =$	$66^2/_3$ Pfd.	à 12 Sgr.	$=$	800 Sgr.
$6^2/_3 \times 5 =$	$33^1/_3$ „	à 9 „	$=$	300 „
	100 Pfund Mengung		$=$	1100 Sgr.
	1 „ „		$=$	11 „

2) Ein Kaufmann hat 3 Sorten Kochzucker zu 4, $5^1/_2$ und $5^3/_4$ Sgr. das Pfund; er mengt 80 Pfd. der 1sten Sorte mit 70 Pfd. der 2ten und 60 Pfund der 3ten Sorte. Wie theuer ist das Pfund der Mengung?

80 Pfd.	à 4	Sgr.	=	320 Sgr.
70 „	à $5^1/_2$	„	=	385 „
60 „	à $5^3/_4$	„	=	345 „
210 Pfd.	Mengung		=	1050 Sgr.
1 „	„		=	5 „

3) Ein Weinhändler hat 2 Sorten Wein zu theuer eingekauft; er will deshalb 2 Hekto à 70 Thlr. und 4 Hekto à $52^1/_2$ Thlr. mischen und mit 10 % Verlust verkaufen. Wie theuer wird das Liter im Verkauf sein?

2 Hekto à 70 Thlr. = 140 Thlr., 4 Hekto à $52^1/_2$ Thlr. = 210 Thlr. zusammen 350 Thlr.

10 Thlr. Verlust an 100 Thlr. giebt 90 Thlr., an 350 Thlr. also 315 Thlr.

315 Thlr. sind 9450 Silbergroschen und 6 Hekto sind 600 Liter.

9450 Sgr. : 600 = $15^3/_4$ Sgr. = 15 Sgr. 9 Pf. das Liter.

4) Ein Tabackshändler mengt $2^1/_2$ Centner Taback und nimmt dazu 120 Pfd. à 9 Sgr. 11 Pf.; was hat das Pfund der anderen Sorte gekostet, wenn er, mit 20 % Gewinn, 10 Pfd. für 4 Thlr. 12 Sgr. verkauft?

Wenn 10 Pfd. 4 Thlr. 12 Sgr. kosten, dann kostet 1 Pfd. $^{132}/_{10}$ Sgr. = $13^1/_5$ Sgr.

120 Sgr. geben 20 Sgr. Gewinn
$13^1/_5$ „ „ ? „ „

$$\frac{20 \cdot 66}{120 \cdot 5} = \frac{11}{5} = 2^1/_5 \text{ Sgr. Gewinn von } 13^1/_5 \text{ Sgr.}$$

$13^1/_5$ — $2^1/_5$ = 11 Sgr. ist der Durchschnittspreis für 1 Pfd. der Mengung.

Es kosten demnach	250 Pfd.	à 11 Sgr.		2750 Sgr.
davon ab	120 „	à 9 „	11 Pf.	1190 „
die andere Sorte	130 Pfd.	kostet		1560 Sgr.

1560 Sgr. : 130 = 12 Sgr. das Pfund der 2ten Sorte.

5) Ein Kaufmann hat 2 Sorten Wein gemischt: die eine enthält 6 %, die andere 8 % Wasser; er macht hiervon eine neue Mischung und nimmt von der ersten Sorte $70^2/_3$ Liter, von der zweiten Sorte 90 Liter. Wieviel Procent Wasser sind in der neuen Mischung?

106 Liter Mischung geben 6 Liter Wasser
$70^2/_3$ „ „ „ ? „ „

$$\frac{6 \cdot 212}{3 \cdot 106} = 4 \text{ Liter Wasser.}$$

108 Liter Mischung geben 8 Liter Wasser
90 „ „ „ ? „ „

$$\frac{8 \cdot 90}{108} = \frac{20}{3} = 6^2/_3 \text{ Liter Wasser.}$$

4 + $6^2/_3$ = $10^2/_3$ Liter Wasser sind also in $160^2/_3$ Liter Wein.

$160^2/_3$ Liter Wein geben $10^2/_3$ Liter Wasser
100 „ „ „ ? „ „

$$\frac{32 \cdot 100 \cdot 3}{482} = \frac{1600}{241} = 6{,}67$$

= $6^2/_3$ % Wasser sind in der neuen Mischung.

6) Ein Kornhändler mengt aus 3 verschiedenen Sorten Weizen 60 Neuscheffel, so daß ihm der Neuscheffel auf 2 Thlr. $9^1/_2$ Sgr. zu stehen kommt. Die 1ste Sorte

betrug $33\frac{1}{3}$ %, die 2te Sorte 40 % der Mengung; von der 2ten Sorte kostete der Neuscheffel 2 Thlr., von der 3ten Sorte $2\frac{7}{8}$ Thlr. Was kostete der Neuscheffel von der 1sten Sorte?

$33\frac{1}{3}$ % ist $\frac{1}{3}$ von 100; $\frac{60}{3} = 20$ Neuscheffel die 1ste Sorte.

40 % ist $\frac{2}{5}$ von 100; $\frac{60 \cdot 2}{5} = 24$ Neuscheffel die 2te Sorte.

20 Neuschffl. + 24 Neuschffl. = 44 Neuschffl.; 60 — 44 = 16 Neuschffl. die 3te Sorte.

	60 Neuschffl.	à 2 Thlr. $9\frac{1}{2}$ Sgr.	= 139 Thlr.
davon ab: 2te Sorte,	24 Neuschffl.	à 2 Thlr. = 48 Thlr.	
3te „	16 „	à $2\frac{7}{8}$ „ = 46 „	94
		bleiben für die 1ste Sorte	45 Thlr.

45 Thlr. : 20 Nschffl. = $\frac{45}{20} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ Thlr. kostet 1 Nschffl. der 1sten Sorte.

Andere Aufgaben dieser Art siehe Gleichungen.

b) Nach der ersten Alligationsregel.

§ 167.

1) Zwei Sorten Weizen, zu 2 Thlr. 6 Sgr. und 1 Thlr. 20 Sgr. der Neuscheffel, sollen so gemengt werden, daß der Neuscheffel 2 Thlr. kostet; wie viele Neuscheffel von jeder Sorte sind zu der Mengung zu nehmen?

66 = 6 = 3 billige Sorte
60 —
50 = 10 = 5 theure Sorte.

3 Nschffl. à 1 Thlr. 20 Sgr. = 5 Thlr.
5 „ à 2 „ 6 „ = 11 „
8 Nschffl. Mengung = 16 Thlr.
1 „ „ 2 „

2) Zwei Sorten Wein, à 16 und 10 Sgr. die Flasche, sollen so gemischt werden, daß die Flasche 12 Sgr. kostet; wie viele Flaschen jeder Sorte sind zu nehmen?

16 = 4 = 2 billige Sorte
12 —
10 = 2 = 1 theure Sorte.

2 Flaschen à 10 Sgr. = 20 Sgr.
1 „ à 16 „ = 16 „
3 Flaschen Mischung 36 Sgr.
1 „ „ 12 „

3) Ein Kaufmann hat 2 Sorten Kaffee: von der 1sten Sorte kostet der Centner $41\frac{2}{3}$ Thlr., von der 2ten Sorte 25 Thlr.; wieviel Pfund der 1sten Sorte muß er mit 77 Pfd. der 2ten Sorte mengen, wenn 5 Pfd. der Mengung $1\frac{1}{2}$ Thlr. kosten sollen?

1 Ctr. $41\frac{2}{3}$ Thlr. ist 1 Pfd. $12\frac{1}{2}$ Sgr.
1 „ 25 „ „ 1 „ $7\frac{1}{2}$ „
5 Pfd. $1\frac{1}{2}$ Thlr. „ 1 „ 9 „

$12\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} = 7$ billige Sorte
9 —
$7\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = 3$ theure Sorte.

Die Mengung muß also in ganzen Zahlen aus 7 Pfd. billiger und 3 Pfd. theurer Sorte bestehen; da aber 77 Pfd. der billigen Sorte genommen werden sollen, so müssen auch 11 × 3 = 33 Pfund der theuren Sorte genommen werden.

77 Pfd. à $^1/_4$ Thlr. = $19^1/_4$ Thlr.
33 „ à $^5/_{12}$ „ = $13^3/_4$ „
110 Pfd. Mengung 33 Thlr.
5 „ „ = $^{33}/_{22}$ „
= $1^1/_2$ Thlr.

4) Ein Weinhändler mischt 84 Liter Wein à 20 Sgr. mit einer anderen Sorte à Liter $16^1/_4$ Sgr., so daß ihm das Liter im Durchschnitt auf 18 Sgr. zu stehen kommt; wie viele Liter der billigen Sorte hat er zu der Mischung genommen?

20 = 2 = 8 billige Sorte
18 —
$16^1/_4$ = $1^3/_4$ = 7 theure Sorte
84 : 7 = 12
12 × 8 = 96 Quart der billigen Sorte hat er genommen.

84 Qrt. à $^2/_3$ Thlr. = 56 Thlr.
96 „ à $^{13}/_{24}$ „ = 52 „
180 Qrt. Mischung 108 Thlr.
1 „ „ $^{18}/_{30}$ „
= 18 Sgr.

6) Ein Weinhändler mischt 2 Sorten Wein à Liter 18 und 12 Sgr. und erhält eine Mischung von 72 Liter à 16 Sgr.; wie viele Theile von jeder Sorte sind in 1 Liter Mischung enthalten?

18 = 2 billige Sorte
16 —
12 = 4 theure Sorte.

In jedem Liter sind also 2 Theile billiger und 4 Theile theurer, oder 1 Theil billiger und 2 Theile theurer Sorte; das Liter besteht mithin aus $^1/_3$ billiger und $^2/_3$ theurer Sorte.

6) Ein Getreidehändler will 120 Neuscheffel Roggen, à 1 Thlr. 28 Sgr. den Nschffl., mengen, und er nimmt dazu 2 Sorten à 2 Thlr. 10 Sgr. und 1 Thlr. 20 Sgr. den Nschffl.; wie viele Nschffl. muß er von jeder Sorte nehmen?

70 = 12 = 3 billige Sorte
58 —
50 = 8 = 2 theure Sorte.

Die Mengung besteht also aus 3 Nschffl. billiger und 2 Nschffl. theurer Sorte, zusammen 5 Neuscheffel.

5 Neuscheffel sind in 120 Neuscheffel 24 mal enthalten, also:

24 × 3 = 72 Nschffl. billiger Sorte
24 × 2 = 48 Nschffl. theurer Sorte
muß er nehmen.

72 Nschffl. à $1^2/_3$ Thlr. = 120 Thlr.
48 „ à $2^1/_3$ „ = 112 „
120 Nschffl. Mengung 232 Thlr.
1 „ „ $^{232}/_{120}$ „
= $^{58}/_{30}$ = 1 Thlr. 28 Sgr.

7) Ein Weinhändler mischt 3 Sorten Wein: 28 Liter à 16 Sgr., 48 Liter à 8 Sgr. 1 Pf. und eine 3te Sorte das Liter zu 14 Sgr.; wie viele Liter hat er von der 3ten Sorte genommen, wenn ihm das Liter 12 Sgr. kostet?

Man sucht zuerst den Durchschnittspreis derjenigen beiden Sorten, deren Mengen gegeben sind; dann aus diesem und dem Preise der 3ten Sorte den Mittelpreis der Mengung.

28 Liter à 16 Sgr. = 448 Sgr.
48 „ à 8 „ 1 Pf. = 388 „
76 Liter kosten 836 Sgr.
1 „ „ $^{836}/_{76}$ = 11 „

$$\begin{array}{l} \quad 14 = 2 \text{ billige Sorte} \\ 12 - \\ \quad 11 = 1 \text{ theure Sorte.} \end{array}$$

Die billige Sorte besteht aus:

28 + 48 = 76 Liter.

die theure Sorte

$^1/_2$ so viel = 38 Liter.

Es sind also gemischt:

28 Liter	à 16 Sgr.	= 448 Sgr.
48 „	à 8 „ 1 Pf.	= 388 „
38 „	à 14 „	= 532 „
114 Liter Mischung		1368 Sgr.
1 „ „		$^{1368}/_{114}$ „ = 12 Sgr.

8) Ein Kaufmann mengt aus drei Sorten Kochzucker à $8^1/_2$ Sgr., $7^1/_2$ Sgr. und 5 Sgr. einen Centner, das Pfund zu 6 Sgr., und nimmt von den beiden ersten Sorten gleichviel; wieviel hat er von jeder Sorte genommen?

Wenn 2 Sorten in gleicher Quantität gemengt werden, so ist der Durchschnittspreis von beiden gleich der Summe der beiden Preise, dividirt durch 2 (§ 160),

also $8^1/_2$ Sgr. + $7^1/_2$ Sgr. = 16 Sgr.

16 Sgr. : 2 = 8 Sgr. Durchschnitt.

$$\begin{array}{l} \quad 8 = 2 \text{ billige Sorte} \\ 6 - \\ \quad 5 = 1 \text{ theure Sorte} \\ \qquad \underline{} \\ \qquad 3 \text{ Pfd. Mengung.} \end{array}$$

1 Ctr. = 100 Pfd. : 3 = $33^1/_3$ Pfd.

also $33^1/_3$ Pfd. theurer Sorte
$66^2/_3$ Pfd. billiger Sorte

Die theure Sorte besteht aus 2 Sorten, jede $16^2/_3$ Pfd.

Also ist gemengt:

$16^2/_3$ Pfd.	à $8^1/_2$ Sgr.	= $141^2/_3$ Sgr.
$16^2/_3$ „	à $7^1/_2$ „	= 125 „
$66^2/_3$ „	à 5 „	= $333^1/_3$ „
100 Pfd. Mengung		600 Sgr.
1 „ „		6 Sgr.

9) Ein Weinhändler macht aus 3 Sorten Wein à Liter $28^1/_2$, 18 und 7 Sgr. eine Mischung von 1 Hekto 90 Liter, das Liter zu 15 Sgr.; dabei nimmt er von der 2ten Sorte $1^1/_2$ mal so viel als von der 1sten Sorte; wieviel hat er von jeder Sorte genommen?

Hat er von der 1sten Sorte 1 Liter, so hat er von der 2ten Sorte $1^1/_2$ Liter genommen. Dies giebt den Ansatz:

1 Liter	à $28^1/_2$ Sgr.	= $28^1/_2$ Sgr.
$1^1/_2$ „	à 18 „	= 27 „
$2^1/_2$ Liter kosten		$55^1/_2$ Sgr.

1 Liter kostet $55^1/_2 : 2^1/_2 = {}^{111}/_5 = 22^1/_5$ Sgr.

$$\begin{array}{l} \quad 22^1/_5 = 7^1/_5 \text{ billige Sorte} \\ 15 - \\ \quad 7 \quad = 8 \quad \text{theure Sorte.} \\ \qquad \underline{} \\ \qquad 15^1/_5 \text{ Liter.} \end{array}$$

1 Hekto 90 Liter sind 190 Liter.

190 Liter : $15^1/_5$ = $12^1/_2$ Liter.

$12^1/_2 \times 8$ = 100 Ltr. theurer Sorte
$12^1/_2 \times 7^1/_5$ = 90 Ltr. billiger Sorte.

Die 100 Liter theurer Sorte bestehen aus 2 Sorten, von denen die eine $1^1/_2$ mal größer als die andere ist.

$1 + 1^1/_2 = 2^1/_2$

$100 : 2^1/_2 = 40$ Liter.

Also ist gemischt:

40 Liter	à $28^1/_2$ Sgr.	= 1140 Sgr.
60 „	à 18 „	= 1080 „
90 „	à 7 „	= 630 „
190 Liter Mischung		= 2850 Sgr.

1 Liter = $^{2850}/_{190}$ = 15 Sgr.

10) Ein Kaufmann will aus vier Sorten Cacao, das Pfd. zu 21 Sgr., $16^1/_2$ Sgr., 12 Sgr. und 11 Sgr., eine Mengung von $1^1/_5$ Ctr. machen, das Pfund zu 15 Sgr.; wieviel von jeder Sorte wird er nehmen müssen, wenn auf je 2 Pfd. à $16^1/_2$ Sgr. immer 1 Pfd. à 12 Sgr. und 3 Pfd. à 11 Sgr. kommen sollen?

2 Pfd.	à $16^1/_2$ Sgr.	=	33 Sgr.
1 „	à 12 „	=	12 „
3 „	à 11 „	=	33 „
6 Pfd. kosten			78 Sgr.
1 Pfd. kostet also			13 Sgr.

21 = 6 = 3 billige Sorte
15 —
13 = 2 = 1 theure Sorte
4 Pfd. Mischung.

$1^1/_5$ Ctr. = 120 Pfd.
120 Pfd. : 4 = 30, also:
30 × 3 = 90 Pfd. billiger Sorte
30 × 1 = 30 Pfd. theurer Sorte.

Die billige Sorte ist aber nach dem Verhältniß von 2, 1, 3 = 6 in 90 enthalten und 90 : 6 = 15; also bestehen die 90 Pfd. aus 30 Pfd. à $16^1/_2$ Sgr., 15 Pfd. à 12 Sgr. und 45 Pfd. à 11 Sgr.

Die Mengung ist demnach:

30 Pfd.	à $16^1/_2$ Sgr.	=	495 Sgr.
15 „	à 12 „	=	180 „
45 „	à 11 „	=	495 „
30 „	à 21 „	=	630 „
120 Pfd. Mengung		=	1800 Sgr.
1 „ „		=	15 Sgr.

c) Nach der zweiten Alligationsregel (§ 164).

§ 168.

1) Aus 4 Sorten Wein, das Liter zu 27, 21, 12 und 9 Sgr., soll eine Mischung so gemacht werden, daß das Liter 15 Sgr. kostet; wieviel ist von jeder Sorte zu nehmen?

	27 = 12 (12)	= $^{12}/_{12}$	= 1 Liter	à 27 Sgr.	=	27 Sgr.
	21 = 6 (6)	= $^{6}/_{6}$	= 1 „	à 21 „	=	21 „
15 —						
	12 = 3 (6)	= $^{6}/_{3}$	= 2 „	à 12 „	=	24 „
	9 = 6 (12)	= $^{12}/_{6}$	= 2 „	à 9 „	=	18 „
			6 Liter Mischung		=	90 Sgr.
			1 Liter „		=	15 Sgr.

2) Ein Kaufmann will aus 5 Sorten einer Waare, à Pfd. 24, 20, 16, 10 und 6 Sgr., eine Mengung zu 18 Sgr. das Pfund machen; wieviel hat er von jeder Sorte zu nehmen?

	24 = 6 (36)	= $^{36}/_{6}$	= 6 Pfd.	à 24 Sgr.	=	144 Sgr.
	20 = 2 (6)	= $^{6}/_{2}$	= 3 „	à 20 „	=	60 „
18 —						
	16 = 2 (2)	= $^{2}/_{2}$	= 1 „	à 16 „	=	16 „
	10 = 8 (16)	= $^{16}/_{8}$	= 2 „	à 10 „	=	20 „
	6 = 12 (24)	= $^{24}/_{12}$	= 2 „	à 6 „	=	12 „
			14 Pfd. Mengung		=	252 Sgr.
			1 Pfd. „		=	18 Sgr.

3) Sechs Sorten Taback, à Pfd. $1^1/_6$ Thlr., 1 Thlr., $^7/_8$ Thlr., $^3/_4$ Thlr., $^1/_2$ Thlr. und $^1/_3$ Thlr., sollen so gemengt werden, daß das Pfund $^2/_3$ Thlr. kostet; wieviel ist von jeder Sorte zu nehmen?

	$1^1/_6$ Thlr. = $^{28}/_{24}$	also	28 =	$12\,\overline{}^{12}$	= 1 Pfd.	= 28	24stel.
	1 „ = $^{24}/_{24}$		24 =	$8\,\overline{}^{8}$	= 1 „	= 24	
	$^7/_8$ „ = $^{21}/_{24}$		21 =	$5\,\overline{}^{10}$	= 2 „	= 42	
$^2/_3$ —	$^3/_4$ „ = $^{18}/_{24}$	16 —	18 =	$2\,\overline{}^{2}$	= 1 „	= 18	
	$^1/_2$ „ = $^{12}/_{24}$		12 =	$4\,\overline{}^{8}$	= 2 „	= 24	
	$^1/_3$ „ = $^8/_{24}$		8 =	$8\,\overline{}^{24}$	= 3 „	= 24	
					10 Pfd.	= 160	

1 Pfd. = $\frac{160}{24}$ = $^{16}/_{24}$ = $^2/_3$ Thlr.

4) Ein Getreidehändler will aus sechs Sorten Weizen, à Neuscheffel 2 Thlr. 12 Sgr., 2 Thlr. 10 Sgr., 2 Thlr. 8 Sgr., 1 Thlr. 28 Sgr., 1 Thlr. 26 Sgr. und 1 Thlr. 22 Sgr., 48 Neuscheffel den Neuscheffel zu 2 Thlr., mengen; wieviel muß er von jeder Sorte nehmen?

2 Thlr. 12 Sgr.	= 72 Sgr.	= $12\,\overline{}^{12}$	= $^{12}/_{12}$	= 1 Nschffl.	à 72 Sgr.	= 72 Sgr.
2 „ 10 „	= 70 „	= $10\,\overline{}^{10}$	= $^{10}/_{10}$	= 1 „	à 70 „	= 70 „
2 „ 8 „	= 68 „	= $8\,\overline{}^{16}$	= $^{16}/_8$	= 2 „	à 68 „	= 136 „
60 — (= 2 Thlr.)						
1 „ 28 „	= 58 „	= $2\,\overline{}^{6}$	= $^6/_2$	= 3 „	à 58 „	= 174 „
1 „ 26 „	= 56 „	= $4\,\overline{}^{8}$	= $^8/_4$	= 2 „	à 56 „	= 112 „
1 „ 22 „	= 52 „	= $8\,\overline{}^{24}$	= $^{24}/_8$	= 3 „	à 52 „	= 156 „
				12 Nschffl. Mengung		= 720 Sgr.
				1 Nschffl.	= 60 Sgr.	= 2 Thlr.

(Um 48 Nschffl. zu mengen, ist von jeder Sorte viermal mehr zu nehmen.)

5) Ein Weinhändler hat 60 Liter Wein à Liter 9 Sgr. und 30 Liter à Liter 1 Thlr. 5 Sgr.; er will diese mischen und von seinen andern vier Weinsorten, à Liter 1 Thlr., 20 Sgr., 12 Sgr. und 10 Sgr., so viel zusetzen, daß eine Sorte zu 15 Sgr. das Liter entsteht. Wie muß er die Mischung machen?

	35 Sgr. =	$20\,\overline{}^{600}$	= $^{600}/_{20}$	= 30 Liter	à $1^1/_6$ Thlr.	= 35 Thlr.
	30 „ =	$15\,\overline{}^{150}$	= $^{150}/_{15}$	= 10 „	à 1 „	= 10 „
	20 „ =	$5\,\overline{}^{50}$	= $^{50}/_5$	= 10 „	à $^2/_3$ „	= $6^2/_3$ „
15 —	12 „ =	$3\,\overline{}^{150}$	= $^{150}/_3$	= 50 „	à $^2/_5$ „	= 20 „
	10 „ =	$5\,\overline{}^{290}$	= $^{290}/_5$	= 58 „	à $^1/_3$ „	= $19^1/_3$ „
	9 „ =	$6\,\overline{}^{360}$	= $^{360}/_6$	= 60 „	à $^3/_{10}$ „	= 18 „
				218 Liter Mischung		= 109 Thlr.
				1 Liter „	= $^1/_2$ Thlr.	= 15 Sgr.

B. Legirung oder Mischung der Metalle.

§ 169.

Legiren heißt mischen der Metalle mittelst Schmelzung. Es ist indeß hier nicht von denjenigen Legirungen die Rede, die ein neues Produkt geben, wie Messing, Bronze und dergleichen, sondern von solchen Legirungen, bei denen das Metall dasselbe bleibt und nur durch den Zusatz eines anderen Metalls eine kleine Verminderung seines Gehalts erleidet, dagegen an Dauerhaftigkeit gewinnt, leichter bearbeitet werden kann und niedriger im Preise wird. Zu diesen Metallen gehören besonders das Zinn, Silber und Gold.

a) Zinnlegirungen.

§ 170.

Die Zinnlegirungen geschehen in der Art, daß in gewissen Quantitäten Zinn 1 Pfund Blei enthalten ist, wonach die Legirungen benannt werden:

4-pfündiges Zinn ist 3 Pfd. Zinn und 1 Pfd. Blei; 8-pfündiges Zinn 7 Pfd. Zinn und 1 Pfd. Blei; 10-pfündiges (Probezinn oder Englischzinn) 9 Pfd. Zinn, 1 Pfd. Blei; 16-pfündiges (Rosenzinn, das beste Zinn) 15 Pfd. Zinn und 1 Pfd. Blei.

Das Zinn wird rein genannt, wenn in demselben kein Blei enthalten ist; sobald es mit Blei gemischt ist, heißt es Pfundzinn.

Das in den Legirungen enthaltene Blei heißt der Zusatz.

1) Wieviel Pfund Zinn und Blei sind in 20 Pfund 8-pfündigem Zinn enthalten?

8 Pfd. geben 7 Pfd. Zinn 20 " " ? " "	$\frac{7 \,.\, 20}{8} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$ Pfd. Zinn und $2\frac{1}{2}$ Pfd. Blei.
Oder: so oft 8 in 20 enthalten ist, so oft ist 1 Pfd. Blei in der Legirung enthalten.	$20 : 8 = 2\frac{1}{2}$ Pfd. Blei und $17\frac{1}{2}$ Pfd. Zinn.

2) Wenn aus 52 Pfd. reinem Zinn 6-pfündiges legirt werden soll, wieviel Blei gehört dazu? (Auf je 5 Pfd. Zinn 1 Pfd. Blei.)

$52 : 5 = 10\frac{2}{5}$ Pfd. Blei.

($62\frac{2}{5}$ Pfd. Legirung : $6 = 10\frac{12}{30}$ Pfd. $= 10\frac{2}{5}$ Pfd. Blei.)

3) 15 Pfd. Blei sollen zu 10-pfündigem Zinn verwandt werden; wieviel Zinn ist erforderlich, und was wiegt die Legirung?

Zu 1 Pfd. Blei gehören 9 Pfd. Zinn, also zu 15 Pfd. Blei $15 \times 9 = 135$ Pfd. Zinn; die Legirung wiegt $135 + 15 = 150$ Pfd.

4) Wieviel Pfund Blei sind erforderlich, wenn zu 16-pfündigem Zinn 180 Pfd. reines Zinn verwandt werden sollen?

Zu 15 Pfd. Zinn gehört 1 Pfd. Blei, also zu 180 Pfd. Zinn $180 : 15 = 12$ Pfd. Blei. (Legirung 192 Pfd. : $16 = 12$ Pfd. Blei.)

5) Wieviel Zinn und Blei müssen zugesetzt werden, wenn zu 80 Pfund 5-pfündigem Zinn 25 Pfd. 10-pfündiges und 20 Pfd. 8-pfündiges verwandt werden sollen?

Zu 80 Pfd. 5-pfündigem Zinn sind erforderlich 80 : 5 = 16 Pfd. Blei und 64 Pfd. Zinn.

25 Pfd. 10-pfündiges Zinn geben	2½	Pfd. Blei	22½	Pfd. Zinn
20 „ 8 „ „ „	2½	„ „	17½	„ „
zusammen	5	Pfd. Blei	40	Pfd. Zinn
dies ab von	16	„ „	64	„ „
giebt	11	Pfd. Blei	24	Pfd. Zinn,

die noch zugesetzt werden müssen.

6) Es sollen 2 große Leuchter aus 10-pfündigem Zinn gefertigt, und 2 alte Leuchter, die aus 4- und 5-pfündigem Zinn bestehen, angegeben werden. Die beiden neuen Leuchter sollen 30 Pfd. das Stück wiegen, und die alten wiegen 26 und 25 Pfd.; wieviel Zinn und Blei wird zu den neuen Leuchtern mehr oder weniger verwandt werden müssen?

Erforderlich	60 : 10 =	6 Pfd. Blei	und	54 Pfd. Zinn,
angegeben	26 : 4 =	6½ „ „	„	19½ „ „
	25 : 5 =	5 „ „	„	20 „ „
		11½ Pfd. Blei		39½ Pfd. Zinn.

Es sind mithin zuzusetzen 54 — 39½ = 14½ Pfd. Zinn
zu viel 11½ — 6 = 5½ „ Blei.

b) Gold- und Silberlegirungen.

§ 171.

Gold und Silber werden gewöhnlich mit Kupfer legirt, und nur selten kommt es vor, daß Gold auch mit Kupfer und Silber zugleich legirt wird. Die Legirung von Gold und Kupfer wird eine Goldlegirung, die von Silber und Kupfer eine Silberlegirung und die von Gold, Kupfer und Silber eine güldische Legirung genannt. Das in der Legirung enthaltene Gold oder Silber heißt das Feingewicht; das Kupfer, und bei der güldischen Legirung das Silber mit Kupfer, heißt der Zusatz. Beides, Feingewicht und Zusatz, geben zusammen das Brutto oder Bruttogewicht.

Früher wurde das Feingewicht bei dem Golde nach Karaten und bei dem Silber nach Lothen bestimmt. Man theilte nämlich das alte halbe Pfund, welches Mark genannt wurde, bei dem Golde in 24 gleiche Theile und bei dem Silber in 16 gleiche Theile ein und nannte jeden ersteren Theil einen Karat, den anderen ein Loth. 18-karätiges Gold bestand also aus 18 Theilen Gold und 6 Theilen Kupfer, 12-löthiges Silber aus 12 Theilen Silber und 4 Theilen Kupfer.

In Folge des Münzvertrages vom 12ten Januar 1857 ist indeß das Zollpfund (½ Kilogramm) als Normal-Gold-, Silber- und Münzgewicht eingeführt; es wird in 1000 gleiche Theile getheilt, so daß das Feingewicht und der Zusatz zusammen 1000 geben und also das Brutto immer 1000 ist. Man sagt daher jetzt statt karätiges Gold und löthiges Silber, theiliges Gold und Silber, d. h. besteht die Legirung aus 900 Tausendtheilen Gold oder Silber und aus 100 Tausendtheilen Kupfer, so hat man 900theiliges Gold oder Silber; sind in der

Legirung 800 oder 750 oder 635 Theile Gold oder Silber, so sind beziehlich 200, 250 und 365 Theile Kupfer darin, und man hat 800theiliges, 750theiliges und 635theiliges Gold oder Silber. Um dieses Verhältniß des Feingewichts zum Zusatz bei 1 Pfd. oder 1000 Tausendtheilen Brutto in der Legirung jeder großen und kleinen Quantität auszudrücken, nennt man das Feingewicht, welches nach jenem Verhältniß auf 1 Pfd. oder auf 1000 Tausendtheile kommt, den Feingehalt. Wiegt z. B. ein silberner Pokal 5 Pfd. Brutto, und es ist $^1/_2$ Pfd. Kupfer darin enthalten, so beträgt sein Feingewicht $4^1/_2$ Pfd. und der Zusatz $^1/_2$ Pfd.; sein Feingehalt aber ist 900, denn:

5 Pfd. Brutto geben $4^1/_2$ Pfd. Feingewicht | $\frac{9 \cdot 1000}{2 \cdot 5} = 900$ Tausendth.
1000 Tausendth. Br. „ ? „ „ | Feingehalt.

Fast immer wird auch das Brutto, das Feingewicht und der Zusatz jeder Legirung nach Tausendtheilen eines Pfundes ausgedrückt, und man fügt dann den Zahlen das Wort „Tausendtheile" hinzu, wogegen man es bei dem Feingehalt fortläßt. Wiegt ein silberner Becher $^1/_2$ Pfd. = 0,500 Pfd. = 500 Tausendtheile Brutto, und er hat ein Feingewicht von 0,420 Pfd. = 420 Tausendtheile, also einen Zusatz von 500 — 420 = 80 Tausendtheile, so ist sein Feingehalt = 840; denn 500 Tausendtheile Brutto geben 420 Tausendtheile Feingewicht, 1000 Tausendtheile Brutto geben 2 × 420 = 840 Feingehalt. Der Becher besteht also aus 840theiligem Silber.

Bei der Krone (Goldmünze) und den Zwei- und Einthalerstücken, so wie bei dem österreichischen Gulden und seinen Theilen bis zum $^1/_4$ Gulden hinab, beträgt der Feingehalt 900; es enthalten diese Münzen also 900theiliges Gold oder Silber. Die kleineren Stücke und der östr. $^1/_4$ Gulden bestehen aus 520theiligem Silber. Die Krone hat 20 Tausendtheile Feingewicht, also gehen 50 Kronen auf 1 Pfd. fein Gold, und wird das Pfund Gold zu $462^1/_2$ Thlr. gerechnet, so ist der Werth der Krone $9^1/_4$ Thlr. Dieser Werth steht jedoch nicht fest, weil der Goldwerth nach dem Geldcours sich ändert. Die Vereins-Zweithalerstücke haben ein Feingewicht von 0,066 Pfd. oder $3^1/_3$ Neuloth, die Einthalerstücke von 0,033 Pfd. oder $1^2/_3$ Neuloth; daher enthalten 30 Einthalerstücke oder 15 Zweithalerstücke genau 1 Pfd. fein Silber.

Die Aufgaben über die Gold- und Silberlegirungen werden eingetheilt in Ermittelungs-, Umwandlungs- und Mischungs-Aufgaben.

aa) Ermittelungs-Aufgaben.

§ 172.

1) Das Feingewicht soll gesucht werden.

Brutto und Zusatz sind gegeben:

Brutto 0,650 Pfd. oder 650 Tausendth.
Zusatz 0,125 „ „ 125 „
0,525 Pfd. oder 525 Tausendth. Feingewicht.

Zusatz und Feingehalt sind gegeben:

Zusatz 140 Tausendtheile
Feingehalt 800 „

800 Feingehalt erfordern 200 Zusatz, also geben 140 Zusatz 4 × 140 = 560 Tausendth. Feingewicht.

Brutto und Feingehalt sind gegeben:

Brutto 460 Tausendtheile
Feingehalt 700 „

Wie sich das Brutto des Feingehalts, d. i. immer 1000, zu dem Feingehalt verhält, so verhält sich das gegebene Brutto zu seinem Feingewicht.

also: 1000 geben 700
460 „ ?

$\frac{460 \cdot 700}{1000} = 322$ Tausendtheile Feingewicht.

2) Der Feingehalt soll gesucht werden.

Brutto und Zusatz sind gegeben:
Brutto 500 Tausendtheile
Zusatz 110 "
500 — 110 = 390 Tausendtheile Feingewicht.
500 geben 390, also geben 1000:
2 × 390 = 780 Feingehalt.

Brutto- und Feingewicht sind gegeben:
Brutto 800 Tausendtheile
Feingewicht 680 "
800 geben 680
1000 " ?
$\frac{680 \,.\, 1000}{800} = 850$ Feingehalt.

Zusatz und Feingewicht sind gegeben:
Zusatz 80 Tausendtheile
Feingewicht 420 "
Brutto 500

500 geben 420
1000 geben 2 × 420 = 840 Feingehalt.

3) Der Zusatz soll gesucht werden.

Brutto und Feingewicht sind gegeben:
Brutto 768 Tausendtheile
Feingewicht 695 "

768 — 695 = 73 Tausendtheile Zusatz.

Brutto und Feingehalt sind gegeben:
Brutto 340 Tausendtheile
Feingehalt 850 "
1000 Brutto — 850 Feingehalt = 150 Tausendth. Zusatz.
850 geben 150
340 " ?
$\frac{150 \,.\, 340}{850} = 60$ Tausendth. Zusatz.

Feingehalt und Feingewicht sind gegeben:
Feingehalt 750
Feingewicht 246 Tausendtheile.
1000 Brutto — 750 Feingehalt = 250 Tausendth. Zusatz.
750 geben 250
246 " ?
$\frac{250 \,.\, 246}{750} = 82$ Tausendth. Zusatz.

4) Das Brutto soll gesucht werden.

Zusatz und Feingewicht sind gegeben:
Zusatz 95 Tausendtheile
Feingewicht 545 "

95 + 545 = 640 Tausendtheile Brutto.

Zusatz und Feingehalt sind gegeben:
Zusatz 135 Tausendtheile
Feingehalt 750 "
1000 — 750 = 250 Zusatz, also
250 geben 1000
135 geben 4 × 135 = 540 Tausendtheile Brutto.

Feingewicht und Feingehalt sind gegeben:
Feingewicht 578 Tausendtheile
Feingehalt 850 "
850 geben 1000
578 " ?
$\frac{1000 \,.\, 578}{850} = 680$ Tausendtheile Brutto.

bb) Umwandlungs-Aufgaben.

§ 173.

1) Wieviel beträgt der Feingehalt des 18-karätigen, 14-karätigen und 12-karätigen Goldes nach theiligem Golde?

24 Brutto geben 18 Feingewicht
1000 „ „ ? „

$$\frac{18 \cdot 1000}{24} = 750 \text{ Feingehalt.}$$

Ebenso findet man, daß der Feingehalt von 14-karätigem Golde $583^1/_3$ und von 12-karätigem 500 ist.

2) Wieviel beträgt der Feingehalt des 14-löthigen, 12-löthigen und 10-löthigen Silbers nach theiligem Silber?

16 Brutto geben 14 Feingewicht
1000 „ „ ? „

$$\frac{14 \cdot 1000}{16} = 875 \text{ Feingehalt.}$$

In gleicher Weise findet man, daß der Feingehalt von 12-löthigem Silber 750 und von 10-löthigem 625 ist.

3) Wieviel karätiges Gold sind 625-theiliges, 500-theiliges und 250-theiliges Gold?

1000 Brutto geben 625 Feingehalt
24 „ „ ? „

$$\frac{625 \cdot 24}{1000} = 15\text{-karätiges.}$$

In derselben Weise findet man, daß 500-theiliges Gold 12-karätig und 250-theiliges 6-karätig ist.

4) Wieviel löthiges Silber sind 900-theiliges, 700-theiliges und 500-theiliges Silber?

1000 Brutto geben 900 Feingehalt
16 „ „ ? „

$$\frac{900 \cdot 16}{1000} = \frac{72}{5} = 14^2/_5\text{-löthig.}$$

Ebenso findet man, daß 700-theiliges Silber $11^1/_5$-löthig und 500-theiliges 8-löthig ist.

cc) Mischungs-Aufgaben.

§ 174.

1) Wenn zu $6^1/_2$ Pfd. 850-theiligem Golde 2 Pfd. Kupfer legirt werden, wie groß ist der Feingehalt der Mischung?

$6^1/_2$ Pfd. 850-theiliges Gold geben $6^1/_2 \times 850 = 5525$ Tausendtheile fein Gold; $6^1/_2$ Pfd. Gold + 2 Pfd. Kupfer = $8^1/_2$ Pfd. Legirung.

$$5525 : 8^1/_2 = \frac{5525 \cdot 2}{17} = 650 \text{ Feingehalt.}$$

2) 6 Pfd. 800-theiliges und 8 Pfd. 625-theiliges Silber sollen legirt werden, wie groß ist der Feingehalt der Legirung?

6 Pfd.	800-theiliges Silber	geben	4800	Tausendtheile fein Silber
8 „	625 „	„ „	5000	„ „ „
14 Pfd.		geben	9800	
1 „		also	$^{9800}/_{14}$ = 700	Feingehalt.

3) Es will Jemand 5 Pfd. 600-theiliges und 6 Pfd. 750-theiliges Silber legiren und 4 Pfd. Kupfer zusetzen; welchen Feingehalt wird die Mischung erhalten?

5 Pfd.	600-theiliges Silber	geben	3000	Tausendtheile fein Silber
6 „	750 „	„ „	4500	„ „ „
4 „	Kupfer			
15 Pfd.	Legirung	enthalten	7500	„ „ „
1 „	„	enthält	$^{7500}/_{15}$ = 500	Feingehalt.

4) Wenn aus 6 Pfd. 700-theiligem Golde 600-theiliges legirt werden soll, wieviel Kupfer muß zugesetzt werden, und wieviel beträgt das Brutto der neuen Legirung?

6 Pfd. 700-theiliges Gold geben 4200 Tausendtheile fein Gold.

So oft nun 600 in 4200 enthalten ist, so viel Pfund Brutto muß die neue Legirung betragen, also 7 Pfd.; es muß demnach 1 Pfd. Kupfer zugesetzt werden.

5) Es will Jemand von 2 Pfund 805-theiligem und 3 Pfd. 630-theiligem Golde eine Legirung machen, die 500-theilig sein soll; wieviel Kupfer muß er zusetzen?

2 Pfd.	805-theiliges Gold	geben	1610	Tausendtheile fein Gold
3 „	630 „	„ „	1890	„ „ „
5 Pfd.	enthalten also		3500	„ „ „

3500 : 500 = 7 Pfd. Legirung.

Es müssen also 2 Pfd. Kupfer zugesetzt werden.

6) Wenn durch den Zusatz von 1 Pfund Kupfer zu einer Silberlegirung von 6 Pfd. eine Legirung von 600 Feingehalt entsteht, wieviel theilig waren die 6 Pfund Silber?

Wird zu den 6 Pfd. 1 Pfd. Kupfer zugesetzt, so entstehen 7 Pfd. Legirung, und ist diese 600-theilig, so ist der Zusatz à Pfund 400 Tausendtheile = 2800 Tausendtheile Kupfer. 1 Pfd. Kupfer = 1000 Tausendtheile ist zugesetzt; es müssen also 2800 — 1000 = 1800 Tausendtheile Kupfer in der ersten Legirung gewesen sein.

1800 : 6 = 300; 300 Kupfer ist der Zusatz von 700-theiligem Silber, also waren die 6 Pfd. Silber 700-theilig.

7) Ein Goldarbeiter will aus 8 Pfund 850-theiligem Silber 700-theiliges legiren und dazu 500-theiliges Silber, welches er noch besitzt, verwenden; wieviel von diesem Silber muß er den 8 Pfd. zusetzen?

Nach der 1sten Alligationsregel § 163 ist:

850 = 150 = 15 = 3 Pfd. billiger Sorte
700 —
500 = 200 = 20 = 4 Pfd. theurer Sorte.

Es sollen aber 8 Pfund theurer Sorte (850-theilig) genommen werden; es müssen also auch 6 Pfd. billiger Sorte (500-theilig) genommen werden.

Probe: 8 Pfd. 850-theilig = 6800 Tausendtheile fein Silber
6 „ 500 „ = 3000 „ „ „
14 Pfd. enthalten 9800 „ „ „
1 Pfd. enthält 9800 : 14 = 700 Tausendtheile fein Silber.

8) Ein Goldarbeiter will 6 Pfd. 700-theiliges, 5 Pfd. 560-theiliges und 4 Pfd. 500-theiliges Silber zusammen schmelzen und 650-theiliges Silber legiren; wieviel 900-theiliges Silber muß er zusetzen?

6 Pfd. 700thl. geben 4200 Tsdth. Silb.
5 „ 560 „ „ 2800 „ „
4 „ 500 „ „ 2000 „ „
15 Pfd. enthalten 9000
1 Pfd. enthält 9000 : 15 = 600 Tausendtheile.

Es sind also 15 Pfund 600-theiliges Silber entstanden. Nach der 1sten Mischungsregel § 163 ist:

900 = 250 = 5 billiger Sorte
650 —
600 = 50 = 1 theurer Sorte.

Es sollen aber 15 Pfd. billiger Sorte (600-theilig) genommen werden; es müssen also auch 3 Pfd. theurer Sorte (900-theilig) genommen werden; folglich sind 3 Pfd. 900-theiliges Silber zuzusetzen. Probe:

3 Pfd. 900-thlg. = 2700 Tausendth.
15 „ 600 „ = 9000 „
18 Pfd. enthalten 11700 Tausendth.

1 Pfd. enthält $\frac{11700}{18}$ = 650-theilig.

9) Ein Münzmeister hat 900- und 600-theiliges Gold, er gebraucht 6 Pfd. 700-theiliges; wieviel von jeder Sorte muß er zur Mischung nehmen?

Nach der 1sten Mischungsregel ist:

900 = 200 = 4 bill. S. (600-thl.)
700 —
600 = 100 = 2 thr. S. (900-thl.)
6 Pfd.

Probe:

2 Pfd. 900-theilig = 1800 Tausendth.
4 „ 600 „ = 2400 „
6 Pfd. enthalten 4200 Tausendth.
1 Pfd. enthält 700 Tausendtheile.

10) Ein Juwelier hat $^2/_5$ Pfd. 700-theiliges, $^9/_{10}$ Pfd. 600-theiliges und $^7/_{10}$ Pfd. 400-theiliges Gold; er will daraus 750-theiliges legiren; wieviel fein Gold muß er zusetzen?

$^2/_5$ Pfd. 700-thlg. = 280 Tsndth. Gold
$^9/_{10}$ „ 600 „ = 540 „ „
$^7/_{10}$ „ 400 „ = 280 „ „
2 Pfd. enthalten 1100 „ „
1 Pfd. enthält 550 Tausendth. Gold.

Fein Gold ist 1000-theilig, mithin ist nach der 1sten Mischungsregel:

1000 = 250 = 5 bill. S. (550-thl.)
750 —
550 = 200 = 4 theure S. (1000-thl.)

Es sollen aber nur 2 Pfund billiger Sorte genommen werden. Also:

5 Pfd. geben 2 Pfd.
4 „ „ ? „

$\frac{2 \,.\, 4}{5} = \frac{8}{5} = 1^3/_5$ Pfund fein Gold muß zugesetzt werden.

Probe:

2 Pfd. 550-theilig = 1100 Tausendth.
$1^3/_5$ „ 1000 „ = 1600 „
$3^3/_5$ Pfd. enthalten 2700 „

1 Pfund enthält $\frac{2700 \,.\, 5}{18}$ = 750 Tausendtheile.

11) Ein Münzmeister hat 900-theiliges, 800-theiliges und 600-theiliges Silber; er will 60 Pfd. 700-theiliges legiren. Wieviel von jeder Sorte muß er nehmen, wenn er von der ersten und zweiten Sorte gleich viel nimmt?

1ste Sorte 900-thl.
2te „ 800-thl.
1700 : 2 = 850-theilig.

Nach der 1sten Mischungsregel ist nun:

850 = 150 = 3 bill. S. (600-thl.)
700 —
600 = 100 = 2 thr. S. (850-thl.)
5 Mischung.

60 Pfd. : 5 = 12
12 × 3 = 36 Pfd. billiger Sorte
12 × 2 = 24 Pfd. theurer „
36 Pfd. 600-thl. = 21600 Tausendth.
24 „ 850 „ = 20400 „
60 Pfd. enthalten 42000 Tausendth.
1 Pfd. enthält $^{42000}/_{60}$ = 700 Tausendtheile.

12) Ein Silberwaaren-Fabrikant hat 900-, 800-, 500-, 400- und 300-theiliges Silber; er gebraucht 48 Pfd. 550-theiliges, wie kann er die Legirung machen?

Nach der 2ten Mischungsregel § 164 ist:

900 = 350 = $\frac{7}{7}$ = 1 Pfund.
800 = 250 = $\frac{10}{5}$ = 2 „
550 —
500 = 50 = $\frac{1}{1}$ = 1 „
400 = 150 = $\frac{6}{3}$ = 2 „
300 = 250 = $\frac{10}{5}$ = 2 „
8 Pfund Legirung.

48 Pfund sollen legirt werden, also jede Sorte 6 mal.

6 Pfd. 900-theilig = 5400
12 „ 800 „ = 9600
6 „ 500 „ = 3000
12 „ 400 „ = 4800
12 „ 300 „ = 3600
48 Pfd. enthalten 26400
1 Pfd. enthält $^{26400}/_{48}$ = 550 Tausendtheile.

C. Spiritus-Mischungen.

§ 175.

Der Gehalt des Spiritus wird nach Procenten bestimmt, die mittelst eines Alkoholometers gemessen werden. Der gebräuchlichste Alkoholometer ist der von dem Physiker Tralles, daher man auch die Procente gewöhnlich nach Tralles angiebt.

Ganz wasserfreier Spiritus heißt Alkohol, und erst dann, wenn dieser durch Zusatz von Wasser bis zu 80, höchstens 85 % herabgesetzt ist, erhält er den Namen Spiritus. Aus den Brennereien wird der beste Spiritus gewöhnlich zu 80 % geliefert. Nach diesem Procentgehalt wird auch in der Regel der Preis des Spiritus in den großen Handelsstädten bestimmt; so ist z. B. zur Zeit in Berlin der Preis für 8000 % (100 Liter à 80 %) mit 14 Thlr. im Handelsbericht notirt. Derjenige, der mit anderen Städten in dieser Beziehung zu thun hat, muß sich von der Art, wie der Spirituspreis daselbst festgestellt wird, genau unterrichten, weil häufig Abweichungen vorkommen.

Die Vermischungen mit Wasser werden ähnlich wie die Metallmischungen, andere Mischungen nach den beiden Mischungsregeln gerechnet.

1) Zu 120 Liter Spiritus à 80% Tralles werden 40 Liter Wasser gemischt; wieviel Procent enthält die Mischung?

120 × 80 = 9600%
40 Wasser
160 enthalten 9600%
1 Liter enthält 9600 : 160 = 60%.

2) 20 Liter Spiritus zu 70% und 30 Liter zu 40% werden gemischt; wie stark ist der Spiritus der Mischung?

20 Liter × 70 = 1400%
30 „ × 40 = 1200%
50 Liter enthalten 2600%
1 Liter enthält $^{2600}/_{50}$ = 52%.

3) 80 Liter Spiritus à 60% werden durch Zusatz von Wasser in Spiritus zu 50% verwandelt; wieviel Wasser ist zugesetzt?

80 Liter × 60 = 4800%
4800% : 50 = 96 Liter.
Zu den 80 Liter Spiritus sind also 16 Liter Wasser zugesetzt worden.

4) Ein Destillateur hat 3 Sorten Spiritus à 80, 75 und 55%. Er nimmt von jeder Sorte 50 Liter und mischt sie; wieviel Procent enthält die Mischung?

80 + 75 + 55 = 210%; 210% : 3 = 70% (§ 160.)

Er hat also 150 Liter Spiritus à 70%.

5) Ein Kaufmann will aus 80- und 40-procentigem Spiritus 100 Liter zu 65% mischen; wieviel muß er von jeder Sorte nehmen?

Nach der 1sten Mischungsregel § 163 ist:

80 = 15 = 3 billige Sorte
65 —
40 = 25 = 5 theure Sorte
8 Liter Mischung.
100 Liter sollen gemischt werden:
100 : 8 = $12^1/_2$ Liter.

3 × $12^1/_2$ Liter = $37^1/_2$ Liter
5 × $12^1/_2$ „ = $62^1/_2$ „
Also muß er nehmen:
$37^1/_2$ Liter 40-procentigen und
$62^1/_2$ „ 80-proc. Spiritus.

6) Ein Destillateur hat Spiritus à 80, 70, 60, 40 und 30%. Er will daraus eine Mischung von 60 Liter zu 50% machen; wieviel wird er von jeder Sorte nehmen müssen?

Nach der 2ten Mischungsregel § 164 ist:

80 = 30 = (30) = $^{30}/_{30}$ = 1 Liter
70 = 20 = (40) = $^{40}/_{20}$ = 2 „
60 = 10 = (20) = $^{20}/_{10}$ = 2 „
50 —
40 = 10 = (10) = $^{10}/_{10}$ = 1 „
30 = 20 = (80) = $^{80}/_{20}$ = 4 „
10 Liter.
60 : 10 = 6 mal mehr von jeder Sorte.

6 Liter à 80% = 480%
12 „ à 70% = 840%
12 „ à 60% = 720%
6 „ à 40% = 240%
24 „ à 30% = 720%
60 Liter enthalten 3000%
1 Liter enthält 50%.

7) Wenn für den Spiritus in Berlin 16 Thlr. notirt sind, was kostet dann 1 Liter 50-procentiger Spiritus?

8000 % kosten 16 Thlr. | $\frac{16 \cdot 50 \cdot 30}{8000} = 3$ Sgr.
50 % „ ? „

(Die 30 sind in den Zähler gesetzt, um gleich Silbergroschen zu erhalten.)

8) Der Spiritus ist zu 15 Thlr. in Berlin notirt. Von diesem Spiritus hat Jemand eine Mischung gemacht, von der ihm das Liter $3^1/_2$ Sgr. kostet; wieviel Procent müssen darin, jenem Preise gemäß, enthalten sein?

450 Sgr. geben 8000 % | $\frac{8000 \cdot 7}{450 \quad 2} = 62^2/_9$ %.
$3^1/_2$ „ „ ?

9) Es kauft Jemand 600 Liter Spiritus à 70 % und setzt so viel Wasser zu, daß der Gehalt 60 % wird. Das Liter der Mischung kostet ihm nun $3^1/_2$ Sgr.; wie hoch müßte hiernach der Spiritus notirt sein?

Wieviel Spiritus gekauft und wieviel Wasser zugesetzt ist, kommt gar nicht in Betracht, sondern da 60 % $3^1/_2$ Sgr. kosten, so ist nur die Frage, was 8000 % kosten?

60 % geben $3^1/_2$ Sgr. | $\frac{7 \cdot 8000}{2 \quad 60} = \frac{1400}{3}$ Sgr. = 15 Thlr. $16^2/_3$ Sgr.
8000 % „ ? „ | = $15^5/_9$ Thlr.

10) Es kauft Jemand 900 Liter Spiritus à 70 %; der notirte Preis ist 20 Thlr. Wieviel Wasser muß er zusetzen, wenn ihm das Liter $4^1/_2$ Sgr. kosten soll?

600 Sgr. geben 8000 % | $\frac{8000 \cdot 9}{600 \quad 2} = 60$ %.
$4^1/_2$ „ „ ? „

900 Liter à 70 % = 63000 %; 63000 : 60 = 1050 Liter.

1050 Liter — 900 Liter = 150 Liter Wasser muß er zusetzen.

11) Ein Kaufmann verkauft 3000 Liter Spiritus mit 50 % Gewinn, à Liter $6^3/_4$ Sgr.; der Spiritus ist mit 20 Thlrn. notirt. Wieviel-procentig ist der verkaufte Spiritus, und wieviel Liter à 75 % hätten daraus gemischt werden können.

150 Sgr. geben 100 Sgr. | $\frac{100 \cdot 27}{150 \quad 4} = \frac{9}{2} = 4^1/_2$ Sgr. kostet das Liter im Einkauf.
$6^3/_4$ „ „ ? „

(20 Thlr. = 600 Sgr.) 600 Sgr. geben 8000 % | $\frac{8000 \cdot 9}{600 \quad 2} = 60$ % enthält der verkaufte Spiritus.
$4^1/_2$ „ „ ?

3000 Liter à 60 % = 180000 %.

180000 % : 75 % = 2400 Liter à 75 % hätten aus den 3000 Litern gemischt werden können.

12) Ein Destillateur kauft 1200 Liter Spiritus zu 75 %; der notirte Preis ist $13^1/_3$ Thlr. Er will so viel Wasser zumischen, daß er das Liter für 4 Sgr. verkaufen kann und dabei 60 % verdient; wieviel Wasser muß er zusetzen, und wieviel Procent wird die Mischung enthalten?

160 Sgr. geben 100 Sgr. | $\frac{100 \cdot 4}{160} = 2^1/_2$ Sgr. Einkauf.
4 „ „ ? „

400 Sgr. geben 8000 % | $\frac{8000\,.\,5}{400\quad 2} = 50\%$ für $2^1/_2$ Sgr.
$2^1/_2$ „ „ ? |

75 % geben 1200 Liter | $\frac{1200\,.\,75}{50} = 1800$ Liter.
50 % „ ? |

Je weniger Procent, je mehr Liter.

Es müssen also den 1200 Litern Spiritus 600 Liter Wasser zugesetzt werden, und die Mischung enthält 50 %.

Probe: 100 Liter à 80 % kosten $13^1/_3$ Thlr.
1200 „ à 75 % „ ? „

$$\frac{40\,.\,1200\,.\,75}{3\quad 100\quad 80} = 150 \text{ Thlr.}$$

1800 Liter à $2^1/_2$ Sgr. = 150 Thlr.

XII. Die Kettenrechnung.

§ 176.

Die Kettenrechnung lehrt zwei oder mehrere Regeldetri-Aufgaben vereinigen und durch einen Ansatz, den Kettensatz, lösen. Ist z. B. die Aufgabe gegeben: wie viele Friedrichsd'or sind 255 südd. Gulden, wenn 6 Gulden gleich 4 Thlr. und $5^2/_3$ Thlr. gleich einem Friedrichsd'or sind, so entstehen daraus nach der Regeldetri die beiden Ansätze:

6 Guld. geben 4 Thlr.	$5^2/_3$ Thlr. geben 1 Frd'or.
255 „ „ ? „	170 „ „ ? „
$\frac{4\,.\,255}{6} = 170$ Thlr.	$\frac{1\,.\,170\,.\,3}{17} = 30$ Frd'or.

Durch den Kettensatz werden diese beiden Ansätze vereinigt, indem je zwei gleiche Größen der Aufgabe herausgesucht und durch das Gleichheitszeichen gleichgestellt werden. Man fängt mit der Frage an: wie viele Friedrichsd'or sind 255 Gulden? welches den Ansatz giebt: x Frd'or = 255 Guld. Darauf sucht man die übrigen gleichen Größen aus der Aufgabe und stellt sie wie die ersten zusammen, doch so, daß die gleichen Benennungen auf beiden Seiten abwechseln, damit sie gehoben werden können. Am besten wird dies dadurch erreicht, daß jede Stelle links mit der vorhergehenden Stelle rechts, und die erste mit x verbundene Stelle links mit der letzten Stelle rechts eine gleiche Benennung erhält. Die Benennungen müssen sich gegenseitig heben, weil nur unbenannte Zahlen mit einander multiplicirt werden können.

Hat man so 2 Säulen gleicher Werthe erhalten, so müssen, da die gegenüberstehenden einzelnen Factoren der Säulen gleich sind, auch die Produkte derselben gleich sein; also ist das mit x verbundene Produkt gleich dem Produkt der anderen Seite.

x Frd'or	=	255	Guld.
6 Guld.	=	4	Thlr.
$5^2/_3$ Thlr.	=	1	Frd'or.

Streicht man auf beiden Seiten die gleichen Benennungen, so erhält man:

$$\begin{aligned} x &= 255 \\ 6 &= 4 \\ 5^2/_3 &= 1 \\ \hline 6 \,.\, 5^2/_3 \,.\, x &= 255 \,.\, 4 \,.\, 1 \\ 34\,x &= 1020. \end{aligned}$$

$$x = \frac{1020}{34} = 30 \text{ Frd'or.}$$

Die vorstehende Verfahrungsweise zeigt das Wesen der Kettenrechnung. Beim wirklichen Rechnen macht man diese beiden Ansätze jedoch nicht, sondern wenn man überzeugt ist, daß man genau, gleich einer Kette, die Benennungen auf beiden Seiten gewechselt hat, so nimmt man weiter keine Notiz von ihnen und entwickelt x gleich aus dem ersten Ansatz. Um aber auch nicht zu große Zahlen in den beiden Produkten zu erhalten, streicht man die in beiden Säulen enthaltenen gleichen Factoren aus, d. h. man dividirt durch ein gleiches Maß das Vielfache desselben in jeder Säule, gleichviel ob die beiden Vielfachen sich gegenüberstehen oder nicht. Um ferner keinen Bruch in den Produkten zu erhalten, schafft man die vorhandenen Brüche in den Säulen dadurch fort, daß man sie zuerst zu unechten Brüchen macht und dann den Nenner jedes unechten Bruchs streicht und auf die andere Seite (in die andere Säule) setzt; beide Seiten sind dadurch mit einer und derselben Zahl multiplicirt, also ist die Gleichheit nicht gestört worden. Die vorstehende Aufgabe wird demnach in folgender Art zu rechnen sein.

x Frd'or.	=	255	Gulden
3		2	
6 Guld.	=	4	Thlr.
17		3	
$5^2/_3$ Thlr.	=	1	Frd'or.
17 x	=	510	

$$x = \frac{510}{17} = 30 \text{ Friedrichsd'or.}$$

Es hätte auch die 17 noch gegen 255 gehoben werden können, und es wäre dann x = 30 gewesen. Daß diese 30 30 Frd'or. sein müssen, geht daraus hervor, daß x mit Frd'or. verbunden ist.

In der Praxis kann man auch statt des x ein Fragezeichen setzen und die Gleichheitszeichen, welche sich von selbst verstehen, so wie auch die Benennungen der linken Säule, die sich aus der rechten Säule ergeben, fortlassen. Am Schluß dividirt man das Produkt der rechten Säule durch das Produkt der linken Säule. Ist das Produkt der linken Säule 1 (die man nicht hinschreibt), so ist das Produkt der rechten Säule das Ergebniß.

1) Wie viele preußische Thaler kosten 300 Meter Zeug in Wien, wenn 100 Meter gleich 128 österreichische Ellen sind, 9 östr. Ellen $10^1/_2$ östr. Gulden kosten und 3 östr. Gulden gleich 2 Thlr. preußisch sind.

? Thlr. preuß.	—	300 Meter
100	—	128 östr. Ellen
9	—	$10^1/_2$ Gld. östr.
3	—	2 Thlr. preuß.
3		896

896 : 3 = $298^2/_3$ Thlr.
= 298 Thlr. 20 Sgr.

2) Wie viele preußische Thaler sind 1500 Dollars, wenn 16 Dollars gleich 71 Schillinge, 20 Schill. gleich 1 Livr. Sterling, 1 Livr. Sterling gleich 13 Mark Banco und 300 Mark Banco gleich 152 Thlr. preuß. sind?

? Thlr. preuß. — 1500 Dollars
16 — 71 Schilling
20 — 13 Mrk. Bco.
300 — 152 Thlr. pr.
8 17537

17537 : 8 = $2192\frac{1}{8}$ Thlr.

3) Ein Gutsbesitzer hat von einem Weinhändler für 28 Neuscheffel Roggen 80 Liter Wein erhalten; er nimmt darauf 120 Liter von derselben Sorte und giebt dem Weinhändler Weizen statt Roggen. Was kostet ihm der Wein und wieviel Weizen hat er für denselben gegeben, wenn der Preis des Roggens zum Weizen sich wie 5 : 7 verhält und der Neuscheffel Weizen zu $2\frac{1}{3}$ Thlr. verkauft wird?

? Thlr. — 120 Liter
80 — 28 Nschffl. Roggen
7 — 5 Nschffl. Weizen
1 — $2\frac{1}{3}$ Thlr.
70 Thlr. kostet der Wein

70 : $2\frac{1}{3}$ = 30 Neuscheffel Weizen sind dafür gegeben.

4) Es kauft Jemand in Frankfurt a. M. für 245 Gulden Waare und erhält, da er gleich baar bezahlt, 5 % Rabatt; wieviel Thaler preußisch muß er zahlen, wenn 105 südd. Gulden = 60 Thlr. preußisch sind?

Wenn Rabatt gewährt wird, so wird die Waare dadurch billiger, also die linke Säule muß größer werden. 5 % Rabatt heißt: statt 100 Gulden werden 95 Gulden gezahlt; es kommt demnach die 100 in die linke Säule.

? Thlr. preuß. — 245 Guld.
105 — 60 Thlr. preuß.
100 — 95 Thlr. (Rabatt)
133 Thlr.

5) 120 östr. Ellen Seidenzeug kosten einem Berliner Kaufmanne in Wien 270 Gulden. Zu welchem Preise kann er das Meter in Berlin verkaufen, wenn er 15 % verdienen will?

Wenn 15 % verdient werden sollen, so wird die Waare theurer, also die rechte Säule muß größer werden. 15 % Gewinn heißt: 100 Thlr. Einkauf geben 115 Thlr. Verkauf; es kommt die 115 folglich in die rechte Säule.

? Thlr. preuß. — 1 Meter
100 — 128 Ellen östr.
120 — 270 Guld. östr.
3 — 2 Thlr. preuß.
100 — 115 Thlr. (Gew.)
1000 2208

2208 : 1000 = 2,208 Thlr.
= 2 Thlr. 6 Sgr. 3 Pf.

6) Ein Berliner Weinhändler kauft in Hamburg für 400 Mrk. Bco. 540 Flaschen sogenannten Madeira und zahlt für 300 Mrk. Bco. 155 Thlr. Bei dem Verkauf hat er 10 % Verlust; wie theuer hat er die Flasche verkauft?

Bei dem Verlust wird die Waare billiger verkauft, als sie eingekauft ist; die linke Säule muß also größer werden. 10 % Verlust heißt: 100 Thlr. Einkauf geben 90 Thlr. Verkauf; die 100 kommt folglich in die linke, die 90 in die rechte Säule.

? Sgr. — 1 Flasche
540 — 400 Mrk. Bco.
300 — 155 Thlr.
100 — 90 Thlr. (Verlust)
1 — 30 Sgr.
3 31

31 : 3 = $10\frac{1}{3}$ Sgr. die Flasche.

7) In Bordeaux werden für 2500 Francs 3000 Kilogramm Rosinen gekauft und für 375 Francs 100 Thlr. gezahlt, die Spesen betragen 4 %; was kosten 5 Pfd. Rosinen im Verkauf?

Die 4 % Spesen vertheuern die Waare; sie kommen also in die rechte Säule.

? Sgr.	— 5 Pfd.
2	— 1 Kilogr.
3000	— 2500 Frcs.
375	— 100 Thlr.
100	— 104 Thlr. (Spesen)
1	— 30 Sgr.
3	52

52 : 3 = $17^1/_3$ Sgr. für 5 Pfd.

8) 21 Centner Kaffee werden für 700 Thlr. gekauft, und da die Zahlung gleich erfolgt, 5 % Rabatt gewährt; die Spesen betragen ebenfalls 5 %. Wie theuer ist 1 Pfd. im Einkauf?

Obgleich der Rabatt die Waare billiger und die Spesen dieselbe theurer macht, so heben sich beide doch nicht, wenn sie auch gleich sind; denn der Rabatt wird von dem bedungenen Preise und die Spesen werden von der wirklichen Zahlung gerechnet, müssen also beide in Ansatz kommen.

? Sgr.	— 1 Pfd.
100	— 1 Ctr.
21	— 700 Thlr.
100	— 95 Thlr. (Rabatt)
100	— 105 Thlr. (Spesen)
1	— 30 Sgr.
40	399

399 : 40 = $9^{39}/_{40}$ Sgr.
= 9 Sgr. $11^7/_{10}$ Pf.

9) Ein Leinwandhändler kauft in Breslau 13 Stück Leinwand für 120 Thlr. Gold oder für eben so viel Courant mit 10 % Agio. Die 13 Stücke enthalten zusammen 440 Meter; die Unkosten (Spesen) betragen $9^3/_8$ %. Wie theuer muß das Meter verkauft werden, wenn 20 % daran verdient werden sollen?

Wenn auch durch die 10 % Agio, $9^3/_8$ % Unkosten und 20 % Verdienst die Waare theurer wird und daher alle drei in die rechte Säule gesetzt werden müssen, so können sie doch nicht zusammengezogen werden, weil das Agio vom Goldwerth, die Unkosten vom Courantwerth und der Verdienst vom Courantwerth plus den Unkosten berechnet werden muß. Sie sind deshalb einzeln in Ansatz zu bringen; doch ist die Reihenfolge in der Stellung gleichgiltig.

? Sgr.	— 1 Meter
440	— 120 Thlr.
100	— 110 Thlr. (Agio)
100	— $109^3/_8$ Thlr. (Spesen)
100	— 120 Thlr. (Verdienst)
1	— 30 Sgr.
16	189

189 : 16 = $13^{13}/_{16}$ Sgr.
= 13 Sgr. $9^3/_4$ Pf.

11 13/16

10) Ein Kaufmann bezieht aus Italien 24000 Apfelsinen und zahlt dafür 350 Thlr. Gold in Louisd'or, die er zu 12 % eingewechselt hat; die Fracht beträgt 7 %, die Steuer 8 % und andere Unkosten 5 %. Wie theuer kann er eine Apfelsine verkaufen, wenn er 50 % verdienen will?

Die 12 % müssen allein in Ansatz kommen, weil sie sich auf den Goldwerth beziehen; die 7 % Fracht, 8 % Steuer und 5 % Unkosten können zusammengezogen werden, weil sie sich alle drei auf den Einkaufspreis in Courant beziehen. Die 50 % Gewinn müssen wieder allein in Ansatz kommen, weil sie sich auf den Einkauf plus den Kosten beziehen.

? Pf.	— 1 Apfelsine
24000	— 350 Thlr. Gold
100	— 112 Thlr. (Agio)
100	— 120 Thlr. (Spesen)
100	— 150 Thlr. (Gewinn)
1	— 360 Pf.
125	1323

1323 : 125 = $10^{73}/_{125}$ Pf.

XIII. Die Münz-, Maß- und Gewichts-Rechnung.

§ 177.

So viele Staaten es giebt, so viele verschiedene Münzen, Maße und Gewichte sind fast im Verkehr. Will man daher wissen, welchen Werth diese oder jene fremde Münze im Vergleich zu den heimischen oder zu denen eines anderen Staates hat, oder wie groß dieses oder jenes Maß ist, so muß man ein Buch zu Rathe ziehen, in dem die Werthe der Münzen, Maße und Gewichte aller Länder angegeben und mit einer vermittelnden Zahl, nach welcher man ihren Werth berechnen kann, versehen sind. Das Taschenbuch der Münz-, Maß- und Gewichtskunde von Nelkenbrecher darf hierzu vorzugsweise empfohlen werden; die am Schlusse dieses Buches angehängten Tabellen sind Auszüge aus demselben.

Mit Hilfe der in diesen Tabellen enthaltenen vermittelnden Zahlen werden dann die Aufgaben in der Art gelöst, wie es in den weiterhin vorkommenden Beispielen gezeigt ist.

a) Münzen.

§ 178.

In Deutschland sind 3 Silberwährungen: die Zollvereins- oder preußische Währung, die süddeutsche und die österreichische Währung gebräuchlich. Bei der ersten werden 30 Vereinsthaler oder preuß. Thaler, bei der anderen $52\frac{1}{2}$ Gulden und bei der letzten 45 Gulden aus 1 Pfd. fein Silber geprägt. Die preuß. Währung oder der 30-Thalerfuß gilt in Preußen, Weimar, Anhalt, Gotha, Sondershausen, Waldeck und Lippe und wird dort der Thaler in 30 Sgr. à 12 Pf. getheilt; ferner gilt der 30-Thalerfuß in Sachsen, Oldenburg, Braunschweig und Altenburg, wo der Thaler aber in 30 Neugroschen à 10 Pfennige getheilt wird. Der $52\frac{1}{2}$ Guldenfuß gilt in Bayern, Würtemberg, Baden, Hessen (Großherzogthum), Koburg, Meiningen und Rudolstadt. Der Gulden wird in 60 Kreuzer à 4 Pfennige getheilt. Der 45 Guldenfuß gilt in Oesterreich und Liechtenstein, wo der Gulden in 100 Neukreuzer getheilt wird.

Stellt man diese Währungen neben einander, so sind:

30 preuß. Thaler	=	$52\frac{1}{2}$ südd. Gulden	=	45 östr. Gulden	
1 „ „	=	$1\frac{3}{4}$ „ „	=	$1\frac{1}{2}$ „ „	
30 Silbergroschen	=	105 Kreuzer	=	150 Neukreuzer	
10 „	=	35 „	=	50 „	
1 „	=	$3\frac{1}{2}$ „	=	5 „	

1 östr. Gulden = $\frac{2}{3}$ Thlr. = 20 Sgr. = 70 Kreuzer südd.
1 südd. „ = $\frac{4}{7}$ Thlr. = $17\frac{1}{7}$ „ = $85\frac{5}{7}$ Neukreuzer.

In den am Schlusse angehängten Reductionstabellen sind die bemerkenswerthesten fremden Münzsorten in Werthen der vorgenannten 3 Silberwährungen genau angegeben und die folgenden Beispiele eben so genau danach gerechnet.

Wenn nun auch die Resultate in diesen Beispielen sehr häufig mit den Resultaten in der Wirklichkeit, wo noch die Kurse in Betracht kommen (deren Anwendung bei der Wechselrechnung gezeigt wird), nicht stimmen, so können sie doch zur Beurtheilung dienen, wieviel gegen den in diesen Beispielen berechneten reellen Werth durch die Kurse gewonnen oder verloren wird.

1) Wie viele südd. Kreuzer sind 40 östr. Kreuzer (Neukreuzer)?

50 Neukreuzer geben 35 Kreuzer, oder:

10 Neukreuzer geben 7 Kreuzer, also 40 Neukreuzer geben 28 Kreuzer.

2) Wie viele östr. Neukreuzer sind 42 südd. Kreuzer?

7 südd. Kreuzer geben 10 Neukreuzer, also 42 südd. Kreuzer geben 60 Neukreuzer.

3) Wie viele Silbergroschen sind 65 Neukreuzer?

5 Neukreuzer geben 1 Silbergroschen, also 65 Neukreuzer geben 13 Silbergroschen.

4) Wie viele Silbergroschen sind 80 Centimes?

1 Franc = 100 Centimes = 8 Silbergroschen.

100 Centimes geben 8 Silbergroschen 80 " " ? "	$\frac{8 \cdot 80}{100} = 6\,{}^{2}/_{5}$ Silbergroschen.

5) Wie viele Francs zahlt man in Paris für 2000 spanische Duros?

Nach der Tabelle II ist: 1 Duros = $1\,{}^{2}/_{5}$ Thlr. = ${}^{7}/_{5}$ Thlr. 1 Franc = 8 Sgr. = ${}^{4}/_{15}$ Thlr.	? Francs — 2000 Duros 1 — ${}^{7}/_{5}$ Thlr. ${}^{4}/_{15}$ — 1 Franc 10500 Francs.

6) Wie viele schwedische Reichsthaler kann man in Kopenhagen für 685 Speciesthaler einwechseln?

Nach der Tabelle II ist: 1 Spec.-Thlr. = 1 Thlr. 15 Sgr. 4,8 Pf. = $45\,{}^{2}/_{5}$ Sgr. = ${}^{227}/_{5}$ " 1 schwed. Reichsthlr. = 11 Sgr. 5 Pf. = $11\,{}^{5}/_{12}$ Sgr. = ${}^{137}/_{12}$ Sgr.	? schwed. Rthlr. — 685 Spec.-Thlr. 1 — ${}^{227}/_{5}$ Sgr. ${}^{137}/_{12}$ — 1 schwed. Rthlr. 2724 schwed. Rthlr.

7) Wie viele Pfund Sterling zahlt man in London für 1400 amerikanische Dollars? Nach der Tabelle II ist: 1 Dollar = 43 Sgr. 1 Schilling = 9 Sgr. 4,7 Pf. = $9\,{}^{47}/_{120}$ Sgr. = ${}^{1127}/_{120}$ Sgr. 20 Schilling = 1 Pfd. Sterling.	? Pfd. Sterl. — 1400 Dollars 1 — 43 Sgr. ${}^{1127}/_{120}$ — 1 Schilling 20 — 1 Pfd. Sterl. 161 51600 51600 : 161 = $320\,{}^{80}/_{161}$ Pfd. Sterl.

8) Für wie viele Mark Bco. werden in Hamburg 800 Silberrubel verkauft?

Nach der Tabelle II ist:

1 Rubel = 1 Thlr. 2 Sgr. 3,7 Pf. = $32^{37}/_{120}$ Sgr. = $^{3877}/_{120}$ Sgr.

1 Mark Banco = 12 Sgr. 4 Pf. = $12^{1}/_{3}$ Sgr. = $^{37}/_{3}$ Sgr.

? Mrk. Bco.	—	800 Rubel
1	—	$^{3877}/_{120}$ Sgr.
$^{37}/_{3}$	—	1 Mrk. Bco.
37		77540

77540 : 37 = $2095^{25}/_{37}$ Mark Bco.

b) Maße.

§ 179.

Durch das Gesetz vom 17ten August 1868 ist in den Ländern des Norddeutschen Bundes das Meter als die Grundlage der neuen Längen-, Quadrat- und Kubik-Maße in der Weise eingeführt worden, daß es vom 1sten Januar 1870 neben den alten Maßen, vom 1sten Januar 1872 aber nur allein in Anwendung kommen darf.

Dadurch ist nicht allein eine Uebereinstimmung der Maße in den Ländern des Norddeutschen Bundes, sondern, da das Meter auch die Südstaaten angenommen haben, in ganz Deutschland herbeigeführt worden. Ueberdies ist dieses metrische Maßsystem außer in Frankreich, auch in der Schweiz, in Belgien, Holland, Italien, Spanien, Portugal, Griechenland und in mehreren amerikanischen Staaten eingeführt, so wie es jedenfalls in nicht langer Zeit in Oesterreich, England und Rußland eingeführt werden wird.

Obgleich das Meter seinen Ursprung in Frankreich hat, so ist der Name doch kein französischer, sondern ein griechischer. Die Franzosen glaubten in demselben ein Urmaß gefunden zu haben, indem sie es als den zehnmillionsten Theil eines Meridian-Quadranten annahmen, dessen Messung die französische Akademie im Jahre 1792 hatte ausführen lassen. Da aber später der deutsche Astronom Bessel und einige Andere bewiesen, daß die Gradmessung eine unrichtige und das Meter kein Urmaß sei, auch ein solches nicht gefunden werden könne, so wurde ein Maß, das Mètre des Archives, genau auf 443,296 Pariser Linien-Länge festgestellt, und diese Länge hat nun auch das bei uns eingeführte Meter, welches mit dem preußischen (rheinischen) Duodecimalfuß verglichen = 3,1862 Fuß ist.

Ein mit dem französischen Mètre des Archives genau übereinstimmendes Meter von Platin befindet sich im Besitz der Königlich Preußischen Regierung und wird dasselbe von Zeit zu Zeit mit dem im Reichsarchiv zu Paris und auf der Pariser Sternwarte aufbewahrten Meter verglichen, um einer immerwährenden Uebereinstimmung versichert zu sein.

Die Eintheilungen des Meters sind hinten in der Tabelle I bei den übrigen Maßen angegeben; nur mag hier noch bemerkt werden, daß die Benennungen

Deci der 10te Theil der Einheit,
Centi der 100ste „ „ „
Milli der 1000ste „ „ „ } aus dem Lateinischen,

Deka das 10fache der Einheit,
Hekto das 100fache „ „
Kilo das 1000fache „ „ } aus dem Griechischen hergeleitete

Wörter sind.

Das Verhältniß der Maße fast aller Länder ist nach dem Meter festgestellt, daher dasselbe auch als vermittelnde Zahl für die Maße zweier Länder dient,

wenn das eine nach dem andern bestimmt werden soll. Je nachdem man das Resultat genau haben will, nimmt man mehr oder weniger Decimalen der in den Tabellen angegebenen Verhältnißzahl. Z. B.

1) Wie viele frühere preuß. Ellen sind 170 Meter?

Nach Tabelle IV ist:
1 früh. preuß. Elle = 0,6669 Meter.
(1 Meter = 1,499 früh. preuß. Elle.)

0,6669 Meter geben 1 fr. Elle preuß.
170 „ „ ? „ „ „

$$\frac{1 . 170}{0,6669} = \frac{1700000}{6669} = 254^{6074}/_{6669} \text{ Ell.}$$
= circa 255 fr. pr. Ellen.

2) Wie viele frühere preuß. Zolle sind 180 Millimeter?

Nach Tabelle IV ist 1 fr. pr. Fuß = 0,31385 Meter, also 100000 preuß. Fuß = 31385 Meter.

? fr. pr. Zoll — 180 Millimeter
1000 — 1 Meter
31385 — 100000 fr. pr. Fuß
1 — 12 Zoll
6277 43200

43200 : 6277 = 6,88 fr. pr. Zoll.

3) 270 österr. Ellen sind wie viele früh. preuß. Ellen?

Nach Tabelle IV ist:
1 österr. Elle = 0,77894 Meter
1 fr. pr. Elle = 0,6669 „

? fr. pr. Ell. — 270 österr. Ell.
1 — 0,77894 Meter
0,6669 — 1 fr. pr. Elle
247 77894

77894 : 247 = 315,36
= $315^1/_3$ früh. pr. Ellen.

4) 175 Yards sind wie viele russ. Arschinen?

Nach Tabelle IV ist:
1 Yard = 0,9144 Meter
1 Arschine = 0,7112 Meter.

? Arschinen — 175 Yards
1 — 0,9144 Meter
0,7112 — 1 Arschine
127 28575

28575 : 127 = 225 Arschinen.

5) Wie viele preuß. alte Meilen sind 2000 russ. Werst?

Nach Tabelle IV ist:
1 pr. alte Meile = 7532,485 Meter
1 russ. Werst = 1066,78 Meter.

? pr. alte Meil. — 2000 russ. Werst
1 — 1066,78 Meter
7532,485 — 1 pr. alte Meile
1506497 426712000

42671200 : 1506497 = 283,247
= $283^1/_4$ pr. alte Meilen.

6) Wie viele österreich. Meilen sind 126 schweizer Stunden?

Nach Tabelle IV ist:
1 österr. Meile = 7586,663 Meter
1 schw. Stunde = 4800 Meter.

? östr. Meil. — 126 schweiz. Std.
1 — 4800 Meter
7586,663 — 1 östr. Meile
7586663 6048000

6048000 : 758663 = 79,72 östr. Meil.
= circa $79^3/_4$ östr. Meilen.

7) 78 engl. Quarters sind wie viele dänische Korntonnen?

Nach Tabelle V sind:
100 Hekto = 34,390 engl. Quarter
100 Hekto = 71,880 dän. Korntonnen.

34,390 engl. Qrt. geb. 71,880 dän. Krnt.
78 „ „ „ ? „ „

$$\frac{71,880 . 78}{34,390} = 163,03$$
= circa 163 dän. Kornt.

8) 138 Wiener Wein-Eimer sind wie viele schwedische Ahm?

Nach Tabelle V sind:

100 Hekto = 172,353 Wien. Wein-Eim.
100 Hekto = 63,682 schwed. Ahm.

172,353 W. W.-E. geb. 63,682 schw. Ahm
138 „ „ ? „

$$\frac{63,682 \cdot 138}{172,353} = \frac{2929372}{57451} = 50,99$$

= 51 schwed. Ahm.

c) Gewichte.

§ 180.

Auch die Gewichte haben nach dem Gesetz vom 17ten August 1868 eine andere Eintheilung als die frühere erhalten, was aus der Tabelle I zu ersehen ist. Die Basis zu den Gewichten ist wieder das Meter, indem 1000 Kubik-Centimeter oder 1 Liter destillirten Wassers bei + 4° des hunderttheiligen Thermometers als das Gewicht eines Kilogramms angenommen wird. Als Urgewicht gilt das im Besitz der Königlich Preußischen Regierung befindliche Platin-Kilogramm, welches mit Nr. 1 bezeichnet und mit dem in Paris aufbewahrten Kilogramm prototype genau übereinstimmend ist.

Das Verhältniß der Gewichte fast aller Länder ist in dem Nelkenbrecher'schen Handbuch und in der am Schlusse dieses Buches angehängten Tabelle III nach Grammen festgestellt, wodurch ein gesuchtes Gewicht aus einem andern gegebenen leicht gefunden werden kann.

1) Wie viele österreich. Pfund sind 561 holländische Pond?

Nach Tabelle III ist:

1 östr. Pfd. = 560,01 Gramm
1 holl. Pond = 1000 „

? östr. Pfd. — 561 holl. Pond
1 — 1000 Gramm
560,01 — 1 östr. Pfd.
18667 18700000

18700000 : 18667 = 1001,768
= $1001\frac{3}{4}$ östr. Pfund.

2) 846 schwed. Skalpund sind wie viele spanische Libra?

Nach Tabelle III ist:

1 schwed. Sklpd. = 425,08 Gramm
1 span. Libra = 460,14 „

? span. Libra — 846 schwed. Sklpnd.
1 — 425,08 Gramm
460,14 — 1 span. Libra
7669 5993628

5993628 : 7669 = 781,539
= $781\frac{1}{2}$ span. Libra.

3) 800 englische Pfund sind wie viele türkische Oka?

Nach Tabelle III ist:

1 engl. Pfd. = 453,59 Gramm
1 türk. Oka = 1278,48 „

? türk. Oka — 800 engl. Pfd.
1 — 453,59 Gramm
1278,48 — 1 türk. Oka
15981 45359

45359 : 15981 = 283,83
= $283\frac{4}{5}$ türk. Oka.

4) Wie viele dänische Pfund sind 600 schwed. Skalpund?

Nach Tabelle III ist:

1 dän. Pfd. = 500 Gramm
1 schwed. Sklpd. = 425,08 Gramm.

? dän. Pfd. — 600 schwed. Sklpd.
1 — 425,08 Gramm
500 — 1 dän. Pfd.
500 255048

255048 : 500 = 510,09
= 510 Pfd. 3 Lth. dän.

5) Wie viele russische Pud sind 7000 amerikanische Pfund?

Nach Tabelle III. ist
1 amerik. Pfund = 453,59 Gramm
1 russ. Pfund = 409,51 „
40 russ. Pfund = 1 Pud.

? Pud — 7000 amerik. Pfund.
1 — 453,59 Gramm
409,51 — 1 russ. Pfund
40 — 1 Pud
40951 7937825

7937825 : 40951 = 193,837 Pud
= 193 Pud 33 Pfund 46 Solotnick.

Ist die Aufgabe so beschaffen, daß eine Multiplication und Division mit großen Zahlen stattfinden muß, z. B. wenn in der letzten Aufgabe 7847 Pfd. statt 7000 Pfd. gegeben wären, so löst man dieselbe durch Logarithmen auf. (§ 227.)

XIV. Die Agio- oder Goldrechnung.

§ 181.

Das Silber hat fast in allen Staaten einen bestimmten Werth in den Silberwährungen (§ 178); das Gold hingegen, je nachdem es mehr oder weniger verlangt wird, steigt oder fällt wie jede andere Waare im Preise. Der ursprüngliche Werth des Goldstücks heißt der Nominalwerth oder Nennwerth; er ist von der Krone 9 Thlr., vom Friedrichsd'or, Louisd'or, Augustd'or 5 Thlr., vom Dukaten $2\frac{3}{4}$ Thlr. (in Sachsen 3 Thlr.) Gold. Was für ein solches Goldstück über den Nennwerth gezahlt wird, heißt das Agio oder Aufgeld, welches bei der Krone nach dem Werth eines Pfund Goldes, nach Groschen, bei allen übrigen Goldmünzen nach Procenten bestimmt wird.

1) Wieviel beträgt das Agio eines Friedrichsd'ors, wenn er $13\frac{1}{3}$% steht?

100 geben $13\frac{1}{3} = \frac{40}{3}$ Thlr.; 5 Thlr. geben also $\frac{40}{3} : 20 = \frac{2}{3}$ Thlr.

Für den Friedrichsd'or, überhaupt für alle Goldmünzen, deren Nennwerth 5 Thlr. ist, ist das Agio leicht im Kopfe zu rechnen; nämlich:

5 Thlr. ist $\frac{1}{20}$ von 100, also ist:

$14\% = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$ Thlr. = 21 Sgr.
$13\frac{1}{3}\% = \frac{40}{60} = \frac{20}{30}$ „ = 20 „
$12\% = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ „ = 18 „
$10\% = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ „ = 15 „

Oder: man addirt die Hälfte der Procente zu sich selbst.

$14\% = 14 + 7 = 21$ Sgr.
$13\frac{1}{3}\% = \frac{40}{3} + \frac{20}{3} = 20$ „
$12\% = 12 + 6 = 18$ „
$10\% = 10 + 5 = 15$ Sgr. ꝛc.

2) Wieviel gilt der Friedrichsd'or, wenn er $13\frac{2}{3}$% steht?

Man berechnet das Agio nach Beispiel 1; also $13\frac{2}{3}\% = \frac{41}{60}$ Thlr., und da $\frac{1}{60}$ Thlr. = $\frac{1}{2}$ Sgr. ist, so sind 41 halbe Silbergroschen = $20\frac{1}{2}$ Sgr., dazu 5 Thlr., giebt 5 Thlr. $20\frac{1}{2}$ Sgr.

3) Wieviel gilt der Dukaten zu $15^5/_{11}$ %?

100 Thlr. geben $15^5/_{11}$ Thlr.
$2^3/_4$ " " ? "

$$\frac{170 \,.\, 11}{11 \,.\, 4 \,.\, 100} = \frac{17}{40} \text{ Thlr.}$$
$$= \frac{17 \,.\, 30}{40} \text{ Sgr.} = {}^{51}/_4 \text{ Sgr.}$$
$$= 12 \text{ Sgr. } 9 \text{ Pf.}$$

2 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. + 12 Sgr. 9 Pf. = 3 Thlr. 5 Sgr. 3 Pf.

4) Wie viele Friedrichsd'or à $13^1/_3$ % sind 5100 Thlr.?

$113^1/_3$ Thlr. geben 20 Friedrichsd'or
5100 " " ? "

$$\frac{20 \,.\, 5100 \,.\, 3}{340} = 900 \text{ Friedrichsd'or.}$$

5) Wie viele Louisd'or à $12^1/_2$ % sind 675 östr. Gulden?

1 Guld. = 20 Sgr. = $^2/_3$ Thlr; 675 Guld. × $^2/_3$ Thlr. = 450 Thlr.

$112^1/_2$ Thlr. geben 20 Louisd'or
450 " " ? "

$$\frac{20 \,.\, 450 \,.\, 2}{225} = 80 \text{ Louisd'or.}$$

Oder: ? Louisd'or — 675 Guld.
1 — $^2/_3$ Thlr.
$112^1/_2$ — 20 Louisd'or

80 Louisd'or.

6) Wie viele Louisd'or à 12 % sind 740 südd. Gulden?

1 Guld. = $^4/_7$ Thlr. (§ 178); 740 Guld. = 740 × $^4/_7$ = $422^6/_7$ Thlr.

112 Thlr. geben 20 Louisd'or
$422^6/_7$ " " ? "

$$\frac{20 \,.\, 2960}{112 \,.\, 7} = \frac{3700}{49} = 75^{25}/_{49} \text{ Louisd'or.}$$

Da $^{25}/_{49}$ Louisd'or jedoch nicht gezahlt werden können, so müssen diese in Gulden übrig bleiben, und zwar: 1 Louisd'or = $^{112}/_{20}$ = $^{28}/_5$ Thlr., also sind $^{25}/_{49}$ Louisd'or = $^{25}/_{49}$ × $^{28}/_5$ = $^{20}/_7$ Thlr; $^4/_7$ Thlr. ist 1 Gld., $^{20}/_7$ Thlr. sind also 5 Guld., welche übrig bleiben.

7) Wieviel Procent steht der Friedrichsd'or, wenn das Agio 21 Sgr. beträgt, oder was dasselbe ist, wenn der Friedrichsd'or 5 Thlr. 21 Sgr. gilt?

21 Sgr. = $^{21}/_{30}$ Thlr. = $^7/_{10}$ Thlr.; 5 Thlr. geben $^7/_{10}$ Thlr., also geben 100 Thlr. 20 × $^7/_{10}$ = 14 %.

Oder man multiplicirt (nach Beispiel 1) das Agio mit $^2/_3$.

21 × $^2/_3$ = 14 %; 20 × $^2/_3$ = $13^1/_3$ %; 18 × $^2/_3$ = 12 %; 15 × $^2/_3$ = 10 % u. s. w.

8) Wieviel Procent beträgt das Agio, wenn 70 Friedrichsd'or und $4^1/_2$ Thaler zusammen 400 Thlr. sind?

400 Thlr. — $4^1/_2$ Thlr. = $395^1/_2$ Thlr.; $395^1/_2$: 70 = $^{113}/_{20}$ = $5^{13}/_{20}$ Thlr.

5 Thlr. geben $^{13}/_{20}$ Thlr.; 100 Thlr. geben 20 × $^{13}/_{20}$ = 13 %.

9) Wieviel gewinnt Jemand, wenn er 250 Friedrichsd'or zu $12^2/_3\%$ einwechselt und zu $13^1/_3\%$ ausgiebt?

$$13^1/_3\% - 12^2/_3\% = {}^2/_3\%.$$

20 Friedrichsd'or geben $^2/_3$ Thlr.
250 „ „ ? „ | $\frac{2 \,.\, 250}{3 \,.\, 20} = \frac{25}{3} = 8^1/_3$ Thlr.

10) Zu wieviel Procent sind 175 Louisd'or eingewechselt, wenn sie mit $13^1/_8$ Thlr. Verlust zu $10^1/_2\%$ ausgegeben werden?

20 Louisd'or geben $10^1/_2$ Thlr.
175 „ „ ? „ | $\frac{21 \,.\, 175}{2 \,.\, 20} = \frac{735}{8} = 91^7/_8$ Thlr.

$91^7/_8$ Thlr. + $13^1/_8$ Thlr. Verlust = 105 Thlr.

175 Friedrichsd'or geben 105 Thlr.
20 „ „ ? „ | $\frac{105 \,.\, 20}{175} = 12\%.$

11) Wie viele Louisd'or à 12% sind 140 Kronen à 9 Thlr. 6 Sgr.?

140 Kronen à 9 Thlr. 6 Sgr. = 1288 Thlr.

1 Louisd'or à 12% = 5 Thlr. 18 Sgr. = $5^3/_5$ Thlr. = $^{28}/_5$ Thlr.

1288 Thlr. : $^{28}/_5 = \frac{1288 \,.\, 5}{28} = 230$ Louisd'or.

12) Wie viele Kronen à 9 Thlr. 6 Sgr. sind 104 bairische Karolinen à $12^5/_{13}$ südd. Gulden?

1 Guld. = $^4/_7$ Thlr.; 104 Karolinen à $12^5/_{13}$ Guld. = 1288 Guld.

1288 Guld. $\times$ $^4/_7$ Thlr. = 736 Thlr.; 736 : $9^1/_5 = \frac{736 \,.\, 5}{46} = 80$ Kronen.

XV. Die Wechsel-Rechnung.

§ 182.

Ein Wechsel ist ein Schuldschein, der durch das in ihm vorkommende Wort „Wechsel" dem Schuldner die Verpflichtung auferlegt, genau an dem im Wechsel bezeichneten Tage die Schuld abzuführen, widrigenfalls sofort die Wechselklage eingeleitet wird, deren unmittelbare Folge Personalarrest ist. Wegen der großen Wichtigkeit, den die Wechsel für den Handel und Verkehr haben, wird ihnen von jedem Staate ein besonderer Schutz verliehen, so daß in den meisten Fällen eine eingereichte Wechselklage binnen 48 Stunden ihre Erledigung findet.

Derjenige, welcher einen Wechsel ausstellt und verkauft oder für eine Schuld weiter giebt oder ihn bis zur Zahlung der Wechselsumme als Schuldschein liegen läßt, heißt der Aussteller oder Trassant, und Derjenige, der sich verpflichtet,

die in dem Wechsel ausgesprochenen Bedingungen zu erfüllen, also auch zur rechten Zeit (am Verfalltage) prompte Zahlung zu leisten, heißt der Bezogene oder Trassat. (Man sagt: der Wechsel ist auf ihn gezogen oder trassirt). Geht der Trassat die Bedingungen ein, so schreibt er auf den Wechsel „acceptirt" oder „angenommen" nebst seinem Namen quer durch den Wechsel; er wird nun auch der Acceptant genannt.

Außer diesen beiden Personen, dem Aussteller und dem Acceptant, kommt in den meisten Wechseln noch eine dritte Person vor, an die der Acceptant die Zahlung zu leisten hat; sie wird der Remittent oder Wechselnehmer genannt und ist entweder namhaft gemacht, wo es dann im Wechsel heißt: „zahlen Sie an die Ordre des Herrn N. N.", oder er ist nicht namhaft gemacht, sondern es heißt im Wechsel: „zahlen Sie an die Ordre von mir selbst". Im letzteren Falle ist der Aussteller selbst als Remittent zu betrachten und bleibt es so lange, bis er in seinem Giro (siehe weiter unten) den neuen Besitzer des Wechsels namhaft macht, der dann der Remittent ist.

Wenn der Aussteller und der Acceptant eine und dieselbe Person ist, d. h. wenn der Aussteller auf sich selbst gezogen hat, so wird ein solcher Wechsel ein eigener oder trockner Wechsel oder Promesse, auch wohl Sola-Wechsel genannt, weil zu einem eigenen Wechsel niemals ein Prima-Wechsel (siehe weiter unten) verwendet wird; alle übrige Wechsel werden kaufmännische Wechsel oder Tratten genannt. Ein eigener Wechsel lautet:

Berlin, den 16ten Januar 1867. Pr. Cour. Rthlr. 200 „ — „ —

Am 16ten März 1867 zahle ich gegen diesen meinen Sola-Wechsel an die Ordre des Herrn C. Krüger die Summe von Zweihundert Thalern Preuß. Courant. Den Werth baar (in Waaren) erhalten.

Heinrich Schulz,
Friedrichsstraße Nr. 209.

Eine Tratte lautet:

(Acceptirt) Angenommen. J. Daniel.

Berlin, den 16ten Januar 1867. Preuß. Court. Rthlr. 300 „ — „ —

Am 16ten März 1867 zahlen Sie für diesen Prima-Wechsel an die Ordre des Herrn F. Bentix die Summe von Dreihundert Thalern Preuß Court. Den Werth erhalten, und stellen es auf Rechnung laut Bericht.

Herrn J. Daniel F. G. Simon
in Berlin, Rosenstraße 108.

Soll ein Remittent (F. Bentix) nicht genannt werden, so heißt es: an die Ordre von mir selbst.

Bei dem eigenen Wechsel ist also Heinrich Schulz der Aussteller und Acceptant zugleich; er hat den Wechsel auf sich selbst gezogen, daher ist auch kein Accept nothwendig, aber immer ein namhaft gemachter Remittent C. Krüger. Bei der Tratte ist F. G. Simon der Trassant oder Aussteller, J. Daniel der Trassat oder Acceptant und F. Bentix der Remittent.

Gewöhnlich behält der Remittent bei dem eigenen Wechsel, und der Remittent oder Aussteller bei der Tratte, den Wechsel nicht, sondern sie geben ihn als Zahlung weiter oder verkaufen ihn. In diesem Falle schreiben sie auf die Rückseite (in dosso) des Wechsels die Worte: Für mich an die Ordre des

Herrn N. N." und darunter ihren Namen, Ort und Datum, oft auch nur den Namen allein ohne jene Worte. Dadurch geht der Wechsel in den Besitz des N. N. über, und dieser verfährt ebenso, wenn er den Wechsel weiter geben will. Man nennt dies das Giriren oder Indossiren des Wechsels, und die ihn girirt oder indossirt haben, heißen die Giranten oder Indossanten.

Sämmtliche Giranten haften für die richtige Zahlung des Wechsels, wenn der Acceptant nicht zahlt, wobei jeder Hintermann sich an einen beliebigen Vordermann halten kann; dazu gehört aber, daß der letzte Inhaber des Wechsels rechtzeitig Protest aufnehmen läßt und dabei verfährt, wie es die Wechselordnung (das Wechselgesetz) vorschreibt.

Man hat verschiedene Benennungen bei den Wechseln. So werden alle diejenigen Wechsel, bei denen der Zahlungstag durch ein Datum bestimmt wird, Datowechsel genannt. Tagewechsel sind solche, bei denen es heißt: medio (Mitte) oder ultimo (am letzten Tage) dieses oder jenes Monats zu zahlen, Sichtwechsel, bei denen die Zahlung nach Sicht (Ansicht) sogleich geleistet werden soll. 8 Tage nach Sicht sind wirkliche 8 Tage (nicht eine Woche), 14 Tage nach Sicht 14 Tage ꝛc. Wenige Tage nach Sicht heißen auch Wechsel mit kurzer Sicht. Markt- oder Meßwechsel sind solche, die an bestimmten Märkten oder Messen zu zahlen sind. Die früheren Usowechsel (nach dem üblichen Brauch) sind nicht mehr statthaft.

Ferner kommen bei den Wechseln noch die Benennungen Sola, Prima, Secunda, Tertia u. s. w. vor. Die Solawechsel werden gewöhnlich zu den eigenen Wechseln genommen, weil bei ihnen keine Secunda ausgestellt wird. Zu den kaufmännischen Wechseln werden dagegen gewöhnlich Primawechsel genommen, weil dann der Aussteller verpflichtet ist, über denselben Wechsel noch ein gleichlautendes Exemplar, die Secunda, auszustellen, sobald es von dem derzeitigen Inhaber des Wechsels verlangt wird: entweder um die Prima acceptiren zu lassen, ehe die Secunda (die erst durch mehrere Hände geht) eintrifft, oder überhaupt nur die Prima sicher zu stellen, wenn die Entfernung bis zum Acceptant groß ist.

Obwohl noch mehrere Eigenthümlichkeiten bei den Wechseln vorkommen, die Derjenige, der viel mit Wechseln zu thun hat, aus der Wechselordnung kennen lernen muß, so reicht doch das hierüber Gesagte für den vorliegenden Zweck vollkommen aus, und es soll deshalb nur noch etwas über die Anwendung der Wechsel hinzugefügt werden.

Der Weinhändler C. Hinze in Berlin kauft von dem Weinbergsbesitzer L. Dechamp in Bordeaux für 3000 Francs Wein auf 3 Monate Ziel. Geldsendungen per Post sind nicht gebräuchlich, am wenigsten nach dem Auslande, sondern die Beträge werden durch Wechsel abgeführt, was auf verschiedene Weise geschehen kann, und zwar:

Erstens durch die Tratte a drittura (direct, unmittelbar).

L. Dechamp in Bordeaux trassirt auf C. Hinze in Berlin einen Wechsel über so viele Thaler preuß. Courant, als die 3000 Francs nach dem dortigen Cours betragen, an die Ordre des Herrn C. Aaron in Berlin und schickt den Wechsel dem Letzteren zu. Dieser präsentirt ihn dem C. Hinze, welcher nun acceptirt und den Betrag an C. Aaron oder an einen anderen Inhaber am Verfalltage zahlt.

Zweitens durch die Tratte indirect.

L. Dechamp trassirt auf C. Hinze den Betrag in preuß. Thalern oder auch in Francs mit den Worten „an die Ordre von mir selbst"; er girirt hierauf den Wechsel auf einen Geschäftsfreund in Amsterdam, dem er schuldet;

dieser setzt sein Giro unter das des Dechamp und schickt den Wechsel an einen Geschäftsfreund in Frankfurt a. M., um ein Conto auszugleichen u. s. w., bis der Wechsel zuletzt dem C. Hinze zum Accept und zur Zahlung präsentirt wird. Es kann dies auch die Secunda sein, wogegen die Prima behufs Accept dem C. Hinze schon früher präsentirt ist.

Drittens durch die Rimesse a drittura.

C. Hinze geht zu einem Banquier in Berlin, kauft hier Pariser Briefe über 3000 Francs nach dem derzeitigen Kurse und übersendet (remittirt) diese dem L. Dechamp. Er kann auch nach der Börse gehen und hier die Pariser Briefe kaufen oder einen Makler beauftragen, solches gegen eine kleine Provision zu thun.

Viertens durch die Rimesse indirect.

Statt Pariser Briefe kauft C. Hinze in der vorigen Weise holländische oder andere Briefe, wenn er glaubt, besser damit fortzukommen und L. Dechamp, dem Kurse nach, seine richtigen 3000 Francs ausgezahlt erhält, wozu es nöthig ist, daß C. Hinze weiß, wie die Papiere, die er kauft, in Bordeaux stehen. Er sendet diese Papiere nun dem L. Dechamp, der sie dort zu dem derzeitigen Kurse verkauft.

A. Kurs der Wechsel.

§ 183.

Wechsel auswärtiger Plätze, Werthpapiere, Gold und fremdes Geld werden gleichsam als Waare betrachtet und steigen daher im Preise, wenn sie gesucht werden, oder fallen im Preise, wenn sie angeboten und nicht verlangt werden. Dies Steigen und Fallen des Werthes der Wechsel 2c. wird der Kurs (Cours) genannt. In jeder großen Handelsstadt wird dieser Kurs von der Börse durch die sogenannten Kurszettel (Börsenberichte) alle Tage bekannt gemacht und von den meisten Zeitungen aufgenommen.

Gewöhnlich sind in der Abtheilung „Wechsel- und Geldkurs“ zwei Rubriken vorhanden, die eine mit „Br.“, die andere mit „G.“ überschrieben. Die erste bedeutet Briefe oder angeboten, weil die Wechsel zu dem dabei stehenden Preise verkauft werden sollen; die andere bedeutet gesucht, indem Wechsel zu dem dabei stehenden Preise gesucht werden. Steht noch „bz.“ oder „bez.“ hinter einem Preise, so heißt dies, daß zu diesem Preise die Wechsel verkauft worden sind.

Der Wechselkurs wird gewöhnlich nur durch eine Zahl ausgedrückt, und zwar durch diejenige Zahl, welche den Preis angiebt, der für eine gewisse Summe auswärtiger Währung am Platze für den Tag gezahlt wird. So sagt man: der Kurs der Amsterdamer Briefe war vorgestern in Berlin 142, und heute ist er $143^1/_2$; darunter versteht man, daß vorgestern 142 Thlr. und heute $143^1/_2$ Thlr. preuß. Courant für 250 holländische Gulden gezahlt worden sind. 142 Thlr. und $143^1/_2$ Thlr. nennt man die bewegliche, veränderliche Valuta, und 250 Gulden die feste Valuta. Gewöhnlich hat die eigene Stadt die bewegliche und die fremde Stadt die feste Valuta.

Im Nachstehenden ist von einigen der bedeutendsten Handelsstädte die feste, immer gleichbleibende Valuta angegeben; die dabei gesetzte bewegliche Valuta hat selbstredend keine bleibende Giltigkeit.

Amsterdam.	Bewegliche Valuta:	—	Feste Valuta:
Berlin	143 Thlr. preuß. Cour.	für	250 holl. Guld.
Frankfurt a. M.	$99\frac{1}{2}$ holl. Guld.	„	100 südd. Guld.
Hamburg . . .	$36\frac{1}{2}$ „ „	„	40 Mrk. Bco.
Leipzig	$143\frac{1}{4}$ Thlr. sächsisch	„	250 holl. Guld.
London . . .	$12\frac{1}{8}$ holl. Guld.	„	1 Livr. Sterl.
Paris	$56\frac{1}{4}$ „ „	„	120 Francs.
Wien	$32\frac{1}{2}$ „ „	„	30 österr. Guld.

Berlin.			
Amsterdam . .	143 Thlr. preuß. Cour.	für	250 holl. Guld.
Frankfurt . . .	$56\frac{3}{4}$ „ „ „	„	100 südd. Guld.
Hamburg . . .	$152\frac{5}{8}$ „ „ „	„	300 Mrk. Bco.
Leipzig	$99\frac{3}{4}$ „ „ „	„	100 Thlr. sächs.
London . . .	$6\frac{2}{3}$ „ „ „	„	1 Pfd. Sterl.
Paris	$79\frac{1}{2}$ „ „ „	„	300 Francs.
Wien	90 „ „ „	„	150 österr. Guld.

Frankfurt a. M.			
Amsterdam . .	$100\frac{1}{2}$ süddeutsche Guld.	für	100 holl. Guld.
Berlin	$106\frac{1}{4}$ „ „	„	60 Thlr. preuß.
Hamburg . . .	$88\frac{3}{4}$ „ „	„	100 Mrk. Bco.
Leipzig	106 „ „	„	60 Thlr. sächs.
London . . .	120 „ „	„	10 Pfd. Sterl.
Paris	$94\frac{3}{4}$ „ „	„	200 Francs.
Wien	107 „ „	„	100 österr. Guld.

Hamburg.			
Amsterdam . .	$36\frac{1}{2}$ holländ. Guld.	für	40 Mrk. Bco.
Berlin . . .	152 Thlr. preuß.	„	300 „
Frankfurt . .	89 südd. Guld.	„	100 „
Leipzig . . .	$152\frac{3}{4}$ Thlr. sächs.	„	300 „
London . . .	$13\frac{3}{10}$ Mrk. Bco.	„	1 Pfd. Sterl.
Paris . . .	192 Francs	„	100 Mrk. Bco.
Wien	$84\frac{1}{2}$ österr. Guld.	„	100 „

Leipzig.			
Amsterdam . .	$143\frac{1}{4}$ Thlr. sächsisch	für	250 holl. Guld.
Berlin . . .	$99\frac{7}{8}$ „ „	„	100 Thlr. preuß.
Frankfurt . .	57 „ „	„	100 südd. Guld.
Hamburg . .	$152\frac{5}{8}$ „ „	„	300 Mrk. Bco.
London . . .	$6\frac{5}{6}$ „ „	„	1 Pfd. Sterl.
Paris . . .	$79\frac{1}{2}$ „ „	„	300 Francs.
Wien	90 „ „	„	150 österr. Guld.

London.			
Amsterdam . .	$12\frac{1}{8}$ holländ. Gulden	für	1 Livr. Sterl.
Berlin . . .	$6\frac{2}{3}$ Thlr. preuß.	„	1 „
Frankfurt . .	$120\frac{1}{4}$ südd. Guld.	„	10 „
Hamburg . .	$13\frac{3}{10}$ Mrk. Bco.	„	1 „
Leipzig . . .	$6\frac{5}{6}$ Thlr. sächs.	„	1 „
Paris . . .	$25\frac{1}{5}$ Francs	„	1 „
Wien . . .	$11\frac{1}{4}$ österr. Guld.	„	1 „

Paris. Bewegliche Valuta: — Feste Valuta:

Amsterdam . .	212	Francs	für	100 holl. Guld.
Berlin	376	„	„	100 Thlr. preuß.
Frankfurt . . .	$211^1/_2$	„	„	100 südd. Guld.
Hamburg . . .	$191^1/_2$	„	„	100 Mrk. Bco.
Leipzig	276	„	„	100 Thlr. sächs.
London . . .	$25^1/_5$	„	„	1 Livr. Sterl.
Wien	$226^1/_2$	„	„	100 österr. Guld.

Wien.

Amsterdam . .	$92^1/_2$	österr.	Guld.	für	100 holl. Guld.
Berlin	$166^2/_3$	„	„	„	100 Thlr. preuß.
Frankfurt . . .	$94^3/_4$	„	„	„	100 südd. Guld.
Hamburg . . .	$84^1/_2$	„	„	„	100 Mrk. Bco.
Leipzig	$165^1/_2$	„	„	„	100 Thlr. sächs.
London . . .	$11^1/_4$	„	„	„	1 Livr. Sterl.
Paris	$44^1/_6$	„	„	„	100 Francs.

B. Die Wechsel-Reduction.

§ 184.

Unter **Wechselreduction** versteht man die Berechnung des Werthes fremder, in den Wechseln angegebener Geldsorten nach dem augenblicklichen Kurse, entweder in heimischer oder in fremder Währung. Auch die Berechnung der Münzen nach dem Kurse wird zur Wechselreduction gerechnet.

Muß eine Währung durch eine oder mehrere andere gefunden werden, so nennt man dies die **indirecte** Wechselreduction, und kommen Spesen (Maklerlohn, Porto, Provision) dabei vor, Wechselreduction **mit Spesen**. Eine Eintheilung der folgenden Beispiele ist hiernach jedoch nicht gemacht, weil die Verschiedenheit in der Rechenweise nicht so bedeutend ist.

1) A. in Paris hat auf B. in Berlin 2500 Frcs. trassirt; der Kurs ist $80^2/_5$ %. Wieviel muß B. zahlen?

300 Frcs. geben $80^2/_5$ Thlr.
2500 „ „ ? „

$$\frac{402 \cdot 2500}{5 \cdot 300} = 670 \text{ Thlr.}$$

2) B. in Berlin mußte für eine Tratte aus Paris 670 Thlr. bezahlen, der Kurs war $80^2/_5$; wie groß war die Tratte in Francs?

$80^2/_5$ Thlr. geben 300 Frcs.
670 „ „ ? „

$$\frac{300 \cdot 670 \cdot 5}{402} = 2500 \text{ Frcs.}$$

3) B. in Berlin zahlte für eine Tratte von 2500 Frcs. 670 Thlr.; wie war der Kurs in Berlin?

2500 Frcs. geben 670 Thlr.
300 „ „ ? „

$$\frac{670 \cdot 300}{2500} = 80^2/_5.$$

4) C. in Hamburg hat eine Schuld in Frankfurt a. M. und remittirt zur Deckung derselben Frankfurter Briefe, die er zum Course von $88\frac{8}{9}$ für 2700 Mrk. Bco. kauft. Wie groß war die Schuld in Frankfurt?

100 Mrk. Bco. geben $88\frac{8}{9}$ südd. Guld.
2700 „ „ „ ? „ „

$$\frac{800 \cdot 2700}{9 \cdot 100} = 2400 \text{ südd. Guld.}$$

5) D. in Berlin kauft für $2562\frac{1}{2}$ Thlr. Londoner Briefe zum Course von $6\frac{5}{6}$ und remittirt sie nach Hamburg zur Deckung einer dortigen Schuld. Wie groß war die Schuld, wenn der Cours in Hamburg $12\frac{4}{5}$ war?

? Mrk. Bco. — $2562\frac{1}{2}$ Thlr.
$6\frac{5}{6}$ — 1 Livr. Sterl.
1 — $12\frac{4}{5}$ Mrk. Bco.
4800 Mrk. Bco.

6) B. in Berlin hat an A. in Paris 2650 Frcs. zu zahlen; er kauft holländische Briefe und remittirt sie an A. Der Cours in Berlin ist 141, der in Paris 212; wieviel hat B. in Berlin gezahlt und wieviel holländisches Papier hat er gekauft?

Wenn die letzte Frage nicht wäre, so würde diese Aufgabe wie die 5te gerechnet, nämlich:

? Thlr. preuß. — 2650 Frcs.
212 — 100 holl. Guld.
250 — 141 Thlr. preuß.
705 Thlr. muß B. zahlen.

Um auch die letzte Frage zu beantworten, ist es besser, die Aufgabe gleich in zwei Ansätzen zu rechnen.

212 Frcs. geben 100 holl. Guld.
2650 „ „ ? „ „

$$\frac{100 \cdot 2650}{212} = 1250 \text{ holl. Guld. hat B. gekauft.}$$

250 holl. Guld. geben 141 Thlr.
1250 „ „ „ ? „

$$\frac{141 \cdot 1250}{250} = 705 \text{ Thlr muß B. zahlen.}$$

7) A. in Stettin erhält für eine Forderung in Paris im Betrage von 4220 Frcs. Frankfurter Briefe, die er in Berlin für 1120 Thlr. verkauft. Wie war der Cours in Paris, wenn der in Berlin zu 56 notirt war?

56 Thlr. geben 100 südd. Guld.
1120 „ „ ? „ „

$$\frac{100 \cdot 1120}{56} = 2000 \text{ südd. Guld.}$$

2000 südd. Guld. geben 4220 Frcs.
100 „ „ „ ? „

$$\frac{4220 \cdot 100}{2000} = 211 \text{ Cours in Paris für Frankfurter Briefe.}$$

8) Welchen Werth haben 80 Ducaten in Paris in preuß. Gelde, wenn der Ducaten dort zu $11\frac{7}{8}$ Frcs. zu haben und der Cours daselbst 375 ist.

? Thlr. preuß. — 80 Ducaten
1 — $11\frac{7}{8}$ Frcs.
375 — 100 Thlr. preuß.
3 760

760 : 3 = $253\frac{1}{3}$ Thlr.

9) Welches ist der Wechselcours in London, wenn 150 Louisd'or zu 12 % gleich 126 Livr. Sterl. sind?

? Thlr. preuß. — 1 Livr. Sterl.
126 — 150 Louisd'or
20 — 112 Thlr.
3 20

20 : 3 = $6\frac{2}{3}$ Cours in London.

10) A. in Berlin ersucht B. in Hamburg, für ihn in Amsterdam 5400 holl. Guld. zu bezahlen, 1% Spesen zu berechnen und den Betrag auf ihn zu trassiren. Wieviel hat A. zu zahlen, wenn der Cours in Hamburg 36 und in Berlin $151^2/_3$ ist?

? Thlr. preuß.	—	5400 holl. Guld.
36	—	40 Mrk. Bco.
100	—	101 do. (Spes.)
300	—	$151^2/_3$ Thlr. preuß.
3		9191

$9191 : 3 = 3063^2/_3$ Thlr.

Die Spesen kommen in die Säule rechts, weil sie dem Betrage zugerechnet werden und A. um so viel mehr zahlen muß.

11) A. in Leipzig ersucht B. in Frankfurt a. M. 4200 Frcs. von C. in Paris für ihn einzuziehen, $1^1/_2$% Spesen zu berechnen und den Betrag ihm zu remittiren; wieviel erhält A. in Leipzig, wenn der Cours Frankfurt—Paris $94^2/_3$ und Frankfurt—Leipzig 58 ist?

B. in Frankfurt kann die 4200 Frcs. von C. in Paris nur dadurch einziehen, daß er die Summe auf C. trassirt und den Wechsel in Frankfurt verkauft; demnächst Leipziger Briefe kauft und sie A. remittirt. Die Spesen kommen hier in die linke Säule, weil sie vom Betrage abgezogen werden.

? Thlr. sächs.	—	4200 Frcs.
200	—	$94^2/_3$ Guld.
$101^1/_2$	—	100 Guld. (Spesen)
100	—	58 Thlr. sächsisch.
		1136 Thlr. erhält A.

12) A. in Paris hat an B. in Hamburg 3000 Mrk Bco. zu zahlen. A. ersucht B., auf Berlin zu 152 zu trassiren und sein Conto damit auszugleichen; die Deckung nach Berlin macht A. zu 370. In Hamburg sind $^1/_2$% Spesen, in Berlin $^1/_4$% Spesen und $^2/_3$% Courtage entstanden, außerdem treten noch $4^1/_2$ Francs Porto in Paris hinzu; wie hoch kommen dem A. die 3000 Mark zu stehen?

? Frcs.	—	3000 Mrk. Bco.
100	—	$100^1/_2$ (Spesen)
300	—	152 Thlr. preuß.
100	—	$100^1/_4$ Thlr. (Spesen)
100	—	$100^2/_3$ Thlr. (Courtage)
100	—	370 Frcs.
1000000		5704025302

= 5704 Frcs. 3 Centimes
4 „ 50 „ Porto
5708 Frcs. 53 Centimes.

Die beiden an verschiedenen Örtern entstandenen Spesen und die Courtage können nicht zusammengezogen werden, wenn man, wie hier geschehen ist, genau rechnen will, weil sie nicht auf eine und dieselbe, sondern auf eine jedesmal veränderte Summe sich beziehen. Es entstehen dadurch aber, wie man sieht, große unbequeme Zahlen, die nicht vorkommen, wenn man $^1/_2$, $^1/_4$ und $^2/_3$% zusammenzieht, was $1^5/_{12}$% giebt. Der dann entstehende Betrag ist (ohne Porto) $5703^2/_3$ Frcs., also um circa 36 Centimes oder 3 Sgr. geringer, als jener. Es kommt nun darauf an, ob der Berliner Kaufmann oder Banquier, der die 3 Sgr. verliert, dafür eine oder zwei Minuten länger rechnen will. Bei großen Procenten möchte aber das Zusammenziehen derselben nicht gerathen sein, weil sich dann eine bedeutende Differenz herausstellen würde. Am besten rechnet man diese Art Aufgaben, sobald Multiplicationen und Divisionen mit großen Zahlen vorkommen, mittelst Logarithmen. (§ 228.)

13) A. in Wien schuldet an B. in Paris 6000 Frcs. und übersendet diesem eine Tratte auf C. in Paris in gleichem Betrage. C. zahlt nicht, und B. trassirt nun auf A. die 6000 Frcs. nebst 20 Frcs. für Protest und Porto, 2 pro mille Courtage und 6% Disconto für $^1/_2$ Monat. Wieviel hat A. zu zahlen, wenn der Cours in Wien 40 ist?

100 Frcs. geben 6 Frcs. in 12 Mon.
6000 „ „ ? „ „ $^1/_2$ „

$$\frac{6 \cdot 6000 \cdot {}^1/_2}{100 \cdot 12} = \frac{6 \cdot 6000 \cdot 1}{100 \cdot 2 \cdot 12}$$

= 15 Francs Disconto.

15 Frcs. Disconto 12 „ Courtage 20 „ Protest 47 Frcs. Spesen	Auf 1000 Frcs. 2 Frcs., macht auf 6000 Frcs. 12 Frcs. Courtage. 6000 Frcs. + 47 Frcs. Spesen = 6047 Frcs.

100 Frcs. geben 40 österr. Guld.
6047 „ „ ? „ „ | $\frac{40 \,.\, 6047}{100} = 2418\frac{4}{5}$ österr. Guld.

14) A. in Leipzig schuldet B. in Berlin eine gewisse Summe und beauftragt seinen Geschäftsfreund C. in Frankfurt a. M., 2100 österr. Gulden auf D. in Wien zu 112 zu trassiren und den Betrag in Berliner Briefen zu 105 an B. in Berlin zu remittiren. Während dessen fällt der Wiener Cours in Frankfurt auf 110. Zu welchem Preise muß C. nun remittiren, wenn die Schuld bei B. richtig abgeführt werden soll?

C. soll österr. Briefe über 2100 Gulden zu 112 verkaufen und Berliner Briefe zu 105 dafür ankaufen; er kann die erstern jedoch nur zu 110 verkaufen. Soll nun B. dieselbe Summe erhalten, so muß C. die Berliner Briefe um so viel billiger kaufen, als 110 billiger wie 112 ist. Also:

112 geben 110
105 „ ? | $\frac{110 \,.\, 105}{112} = \frac{825}{8} = 103\frac{1}{8}$.

C. muß die Berliner Briefe demnach zu $103\frac{1}{8}$ kaufen. Probe:

? Thlr. preuß. — 2100 österr. Guld. 100 — 112 südd. Guld. 105 — 60 Thlr. preuß. 1344 Thlr.	? Thlr. preuß. — 2100 österr. Guld. 100 — 110 südd. Guld. $103\frac{1}{8}$ — 60 Thlr. preuß. 1344 Thlr.

15) A. in Berlin wird von B. in Paris beauftragt, 200 Goldkronen à $9\frac{1}{6}$ Thlr. gegen eine bestimmte Anzahl Louisd'or à 10 %, die C. in Berlin dem B. zu zahlen hat, umzuwechseln und per Post zu übersenden. Die Kronen sind aber während dessen zu $9\frac{1}{3}$ Thlr. gestiegen; wenn nun A. dennoch die 200 Kronen liefern will, wie hoch muß er die Louisd'or verausgaben?

A. muß die Louisd'or um so viel höher verausgaben, als $9\frac{1}{3}$ höher wie $9\frac{1}{6}$ ist, und da von den Kronen der Courantwerth angegeben ist, so können die Louisd'or „auch nur nach diesem Werth", nicht nach Procenten in Ansatz kommen. (10 % = 15 Sgr. = $\frac{1}{2}$ Thlr.)

$9\frac{1}{6}$ Thlr. geben $5\frac{1}{2}$ Thlr.
$9\frac{1}{3}$ „ „ ? „ | $\frac{11 \,.\, 28 \,.\, 6}{2 \quad 3 \quad 55} = 5\frac{3}{5}$ Thlr.

$\frac{3}{5}$ Thlr. = 18 Sgr. und 18 × $\frac{2}{3}$ = 12 %. (§ 181 Beisp. 7.) Die Louisd'or müssen also zu 12 % verausgabt werden.

C. Die Wechsel-Arbitrage.

§ 185.

Arbiter heißt im Lateinischen der Schiedsrichter. Arbitrage bedeutet demnach eine Rechnungsart, durch die entschieden werden soll, ob die eine oder die andere Art einer Zahlungsleistung die vortheilhaftere ist, oder ob dieser oder jener Weg, behufs einer Börsenspeculation, einzuschlagen ist, um den größtmöglichsten Gewinn zu erzielen. Beide Fälle kommen in den folgenden Beispielen vor.

1) A. in Berlin soll in Wien 1600 Gulden bezahlen und kann diesen Betrag entweder in österreichischen Briefen zu 90 remittiren, oder in Berliner Wechseln zu $166^2/_3$ auf sich trassiren lassen; welche Art der Zahlung ist die vortheilhaftere?

Rimesse:	Tratte:	
150 Guld. geb. 90 Thlr.	$166^2/_3$ Gld. geb. 100 Thlr.	Beide Arten der Zahlung sind also gleich.
1600 " " ? "	1600 " " ? "	
$\frac{90 \cdot 1600}{150} = 960$ Thlr.	$\frac{100 \cdot 1600 \cdot 3}{500} = 960$ Thlr.	

2) N. in Wien soll 2600 Francs in Paris bezahlen; er kann a drittura in holländischen Briefen und in Berliner Briefen remittiren. Was ist am vortheilhaftesten? Die Course sind: Wien—Paris $44^1/_6$, Wien—Amsterdam $92^1/_2$, Paris—Amsterdam 212, Wien—Berlin $166^2/_3$ und Paris—Berlin 376.

a drittura remittiren.

100 Francs geben $44^1/_6$ österr. Guld.
2600 " " ? " "

$$\frac{265 \cdot 2600}{6 \cdot 100} = 1148^1/_3 \text{ österr. Guld.}$$

In holländischen Briefen:	In Berliner Briefen:
? österr Guld. — 2600 Frcs.	? österr. Guld. — 2600 Frcs.
212 — 100 holl. Guld.	376 — 100 Thlr. preuß.
100 — $92^1/_2$ österr. Guld.	100 — $166^2/_3$ österr. Guld.
53 60125	141 162500
$60125 : 53 = 1134^{23}/_{53}$ österr. Gld.	$162500 : 141 = 1152^{68}/_{141}$ östr. Gld.

Durch holländische Briefe ist also die Rimesse am vortheilhaftesten.

3) A. in Amsterdam hat eine Forderung von 3600 österr. Gulden in Wien und kann den Betrag a drittura, oder über Frankfurt a. M. oder über Berlin einziehen. Was ist am vortheilhaftesten, wenn Amsterdam—Wien 34, Frankfurt—Wien 112, Frankfurt—Amsterdam 99, Berlin—Wien 96, Berlin—Amsterdam 140 steht?

Tratte a drittura:

30 österr. Guld. geben 34 holl. Gld.
3600 " " " ? " "

$$\frac{34 \cdot 3600}{30} = 4080 \text{ holl. Guld.}$$

Ueber Frankfurt a. M.	Ueber Berlin:
? holl. Guld. — 3600 österr. Guld.	? holl. Guld. — 3600 österr. Guld.
100 — 112 südd. Guld.	150 — 96 Thlr. preuß.
99 — 100 holl. Guld.	140 — 250 holl. Guld.
11 44800	7 28800
$44800 : 11 = 4072^8/_{11}$ holl. Guld.	$28800 : 7 = 4114^2/_7$ holl. Guld.

Ueber Berlin wäre also die Tratte am vortheilhaftesten, wenn nicht etwa Provision und Spesen in Berlin mehr als 34 holl. Gulden betragen.

4) A. in Breslau hat in Paris 250 Napoleonsd'or à 20 Frcs. zu fordern und kann sie entweder in Friedrichsd'or à $21\frac{1}{4}$ Frcs. oder in Louisd'or à $20\frac{1}{2}$ Frcs. einziehen. Die Friedrichsd'or stehen in Breslau 14 %, die Louisd'or 12 %; welche Einziehung ist die vortheilhaftere?

In Friedrichsd'or:

? Thlr. preuß. — 250 Napd'or.
1 — 20 Frcs.
$21\frac{1}{4}$ — 1 Friedd'or.
20 — 114 Thlr. preuß.
17   22800

22800 : 17 = $1341\frac{3}{17}$ Thlr.

In Louisd'or:

? Thlr. preuß. — 250 Napd'or.
1 — 20 Frcs.
$20\frac{1}{2}$ — 1 Louisd'or.
20 — 112 Thlr. preuß.
41   56000

56000 : 41 = $1365\frac{35}{41}$ Thlr.

Die Einziehung in Louisd'or ist also am vortheilhaftesten.

5) A. in Frankfurt a. M. kann auf Paris 400 Napoleonsd'or à 20 Frcs. zum Course von $92\frac{1}{8}$ trassiren, oder die Valuta auf Wien zu $44\frac{1}{6}$ entnehmen und die Rimesse dafür in Frankfurter Briefen zu $93\frac{1}{3}$ machen lassen. Auf welchem Wege ist Gewinn und wieviel?

Tratte a drittura:

? südd. Guld. — 400 Napd'or.
1 — 20 Frcs.
200 — $92\frac{1}{8}$ südd. Guld.
3685 südd. Guld.

Ueber Wien:

? südd. Guld. — 400 Napd'or.
1 — 20 Frcs.
100 — $44\frac{1}{6}$ österr. Guld.
$93\frac{1}{3}$ — 100 südd. Guld.
7   26500

26500 : 7 = $3785\frac{5}{7}$ südd. Guld.

Ueber Wien beträgt also der Gewinn $100\frac{5}{7}$ südd. Gulden; es kommen jedoch etwaige Spesen noch in Abzug.

6) A. in Berlin will in Leipzig 1000 Dukaten à 3 Thlr. mit $4\frac{4}{9}$ % Agio einwechseln lassen, dieselben nach Wien senden und dort zu $5\frac{1}{2}$ Guld. umsetzen, demnächst den Betrag in Berliner Briefen zu $166\frac{2}{3}$ remittiren lassen. Provision und Spesen betragen in Leipzig $2\frac{1}{2}$ %, in Wien 3 %. Hat A. Gewinn oder Verlust bei dem Geschäft?

Einkauf in Leipzig:

? Thlr. preuß. — 1000 Duk.
$33\frac{1}{3}$ — $104\frac{4}{9}$ Thlr.
100 — $102\frac{1}{2}$ Thlr. Spes.
3   9635

9635 : 3 = $3211\frac{2}{3}$ Thlr.

Verkauf in Wien:

? Thlr. — 1000 Duk.
1 — $5\frac{1}{2}$ Guld. österr.
100 — 97 do. (Spesen)
$166\frac{2}{3}$ — 100 Thlr. preuß.
3201 Thlr.

Bei dem Einkauf kommen die Spesen in die rechte Säule, weil sie den Betrag erhöhen; bei dem Verkauf in die linke Säule, weil der Commissionär in Wien sie von der zu remittirenden Summe abzieht.
A. würde also einen Verlust von $10\frac{2}{3}$ Thlr. bei dem Geschäft erleiden.

XVI. Die Waaren-Rechnung.

§ 186.

Obwohl fast in jeder Rechnungsart Aufgaben vorkommen, durch die der Werth von Waaren gesucht wird, so erhalten doch nur diejenigen Aufgaben, in denen der Wechselcours berücksichtigt werden muß und bei denen gewöhnlich noch Maß- und Gewichts-Reductionen, Spesen und dergleichen vorkommen, die obige Benennung. Geht die Waarenrechnung sehr in's Detail, wobei besonders die vielen verschiedenartigen Spesen in Betracht kommen, die oft einzeln berechnet werden müssen, so wird sie auch die Waaren-Calculation genannt. Die bei dieser vorkommenden Spesen werden in Werthspesen, Gewichtsspesen und allgemeine Spesen getheilt.

Zu den Werthspesen gehören:

die Provision oder Commission, Gebühren für die Ausführung eines Auftrages, z. B. den Ankauf von Wechseln und Waaren; die Courtage (Kurtage) oder Sensarie, Maklergebühr für den Verkauf von Wechseln und Waaren; die Assecuranz oder Prämie für die Versicherung der Schiffe und Waaren; das Delcredere, Ersatz für die Gefahr des Creditgebens bei Wechseln und Waaren (Delcredere stellen heißt: diese Gefahr übernehmen); der Convoy, Schutz der Kauffahrteischiffe durch Kriegsschiffe; das Tonnengeld, für die Erhaltung der im Fahrwasser liegenden Tonnen, um den Schiffen den richtigen Weg zu zeigen; ferner die Zölle und die Steuern.

Zu den Gewichtsspesen gehören:

die Fracht; die Caplaken oder die Primage, welche dem Schiffer oder Fuhrmann für die gute Erhaltung der Waaren gezahlt wird; die Speditionsgebühren, dem Spediteur für die Besorgungen bei der Versendung; die Leckage, für den Verlust bei flüssigen Substanzen; die Refactie, Abzug für beschädigte oder schlechte Waaren.

Die allgemeinen Spesen bestehen in Arbeitslohn, Lagergeld, Porto, Reparaturen u. s. w.

In Hinsicht der Tara ist bei der Waarenrechnung noch zu merken, daß man die wirkliche, nach dem Gewicht gefundene Tara auch die Netto-Tara nennt, zum Unterschied von der Uso-Tara, die eine usancemäßige Annahme ist, welche mit ihrem Gewichte oft gar nicht übereinstimmt und gewöhnlich in Procenten ausgedrückt wird.

Im Kettensatz wird die Tara wie der Rabatt behandelt, und es ist gleichgiltig, ob sie auf das Gewicht der Waare oder auf den Geldwerth bezogen wird. Denn kauft Jemand z. B. 300 Pfd. Reis Brutto für 20 Thlr., so kostet ihm das Pfund Brutto 2 Sgr.; werden 6% Tara gerechnet, das sind 18 Pfd., so gehen 18 × 2 Sgr. = 1 Thlr. 6 Sgr. von 20 Thlr. ab, und es bleiben 18 Thlr. 24 Sgr. zu zahlen. 6% von 20 Thlr. beträgt aber auch 1 Thlr. 6 Sgr.; es kommt also beim Kettensatz nicht darauf an, ob man setzt:

100 Pfd. = 94 Pfd. wegen 6% Tara oder 100 Thlr. = 94 Thlr. wegen 6% Tara.

Da bei der Waarenrechnung und Waarencalculation gewöhnlich sehr große Brüche vorkommen, so ist es ganz besonders bei dieser Rechnungsart erlaubt, dieselben annähernd in kleine Brüche zu verwandeln, oder wenn der Bruch über $\frac{1}{2}$ ist, 1, unter $\frac{1}{2}$ Null anzunehmen, wie es in den folgenden Beispielen geschehen ist; wer jedoch ein ganz genaues Resultat haben will, der muß, um ein langwieriges Rechnen zu vermeiden, die Aufgabe mittelst Logarithmen lösen. Siehe Waarenrechnung mit Logarithmen. § 229.

1) N. in London bezieht aus Brüssel Brabanter Spitzen à Meter 5 Francs und remittirt den Betrag in Pariser Wechseln zu $25\frac{1}{5}$; was kostet das Yard in London wenn 914 Meter gleich 1000 Yard sind?

? Schl. Sterl.	— 1 Yard
1000	— 914 Meter
1	— 5 Francs
$25\frac{1}{5}$	— 1 Livr Sterling
1	— 20 Schilling
126	457

457 : 126 = 3 Schill. $7\frac{11}{21}$ Pence.

2) Ein Kaufmann in Wien kauft in Hamburg für eine gewisse Summe Kaffee, den Centner zu 60 Mark Banco, und bezahlt den Betrag nach Abzug von 5 % Rabatt in Berliner Briefen mit 1732 Guld. 80 Neukr. Wieviel Pfund hat er gekauft, wenn Wien—Berlin $166\frac{2}{3}$, und Hamburg—Berlin 152 notirt ist?

Der Rabatt kommt in die rechte Säule, weil hier nicht nach dem Preise, sondern umgekehrt, nach der Quantität gefragt wird.

? Hmb. Pfd.	— $1732\frac{4}{5}$ Gld. österr.
95	— 100 do. (Rabatt)
$166\frac{2}{3}$	— 100 Thlr. preuß.
152	— 300 Mrk. Bco.
60	— 100 Pfd. Hamb.
	3600 Pfd.

3) Ein Kaufmann in London bezieht aus Berlin 1100 Gallons Spiritus und bezahlt, das Liter zu 3 Sgr. gerechnet, nach Abzug des Rabatts 70 Livr. Sterling in Berliner Briefen zu $6\frac{2}{3}$. Wieviel Procent betrug der Rabatt, wenn 22 Gallons gleich 100 Liter sind?

Da nach Procenten gefragt wird, so kann der Ansatz in Thalern oder in Livr. Sterl. gemacht werden. Die Ergebnisse sind gleich.

? Thlr. Rabatt	— 100 Thlr.
1	— 30 Sgr.
3	— 1 Liter
100	— 22 Gallons
1100	— 70 Livr. Sterl.
1	— $6\frac{2}{3}$ Thlr.
3	280

280 : 3 = $93\frac{1}{3}$ Thaler.

100 — $93\frac{1}{3}$ = $6\frac{2}{3}$ % Rabatt.

? Livr. Strl. Rab.	— 100 Livr. Strl.
1	— $6\frac{2}{3}$ Thlr.
1	— 30 Sgr.
3	— 1 Liter
100	— 22 Gallons
1100	— 70 Livr. Strl.
3	280

280 : 3 = $93\frac{1}{3}$ Livr. Strl.

100 — $93\frac{1}{3}$ = $6\frac{2}{3}$ % Rabatt.

4) A. in Wien kauft von B. in Paris 600 Meter Seidenzeug für 2500 Francs und erhält bei gleich baarer Zahlung 6 % Rabatt. Die Werthspesen betragen 9 %, die Gewichts- und allgemeinen Spesen 11 %. Die Zahlung erfolgt sogleich in Berliner Papieren. Wie theuer kann A. die Elle in Wien verkaufen, wenn Wien—Berlin 164, Paris—Berlin 376 notirt ist, 100 österr. Ellen gleich 78 Meter sind, und 40 % an der Waare verdient werden sollen?

? östr. Gld.	—	1 östr. Elle
100	—	78 Meter
600	—	2500 Francs
100	—	94 Frcs. (Rabatt)
376	—	100 Thlr. preuß.
100	—	164 Guld. östr.
100	—	120 do. (Spesen)
100	—	140 do. (Gewinn)
5000		11193

11193 : 5000 = $2^{1193}/_{5000}$ Guld.
= 2 Gulden $23^{43}/_{50}$ Kreuzer
= 2 Gulden 24 Kreuzer.

5) Ein Kaufmann in Frankfurt a. M. bezieht aus Amsterdam 20000 Pond Reis, das Pond zu 10 Cents. mit 5 Monaten Ziel oder 12 % Disconto. Uso-Tara wird 1 %, für Gutgewicht $^2/_3$ % und für Provision in Amsterdam 5 $^0/_{00}$ gerechnet. Die Werthspesen betragen 15 %, die Gewichts- und allgemeinen Spesen zusammen 84 südd. Gulden. Wieviel ist für den Reis zu zahlen, wenn die Zahlung nach einem Monat in österreichischen Papieren erfolgt und Frankfurt—Wien 110, Amsterdam—Wien $31^1/_2$ notirt ist; wie theuer kann ferner das Pfund in Frankfurt verkauft werden, wenn 200 Frankfurter Pfund gleich 100 holländischen Pond sind und 60 % an der Waare verdient werden sollen?

? südd. Gld.	—	20000 Pond
1	—	10 Cent
100	—	1 Guld. holl.
100	—	96 do. (Disconto)
100	—	$98^1/_3$ do. (Tr. u. Gtg.)
100	—	115 do. (Spesen)
1000	—	1005 do. (Provision)
$31^1/_2$	—	30 östrr. Guld.
100	—	110 südd. Guld.
875		2000218

2000218 : 875 = $2285^{843}/_{875}$
= 2286 südd. Guld.

Die 20000 Pond kosten also 2286 südd. Guld. + 84 südd. Guld. Gewichts- und allgemeine Spesen, zusammen 2370 südd. Gulden.

? Kreuzer	—	1 Frankf. Pfd.
2	—	1 holl. Pond.
20000	—	2370 südd. Gld.
100	—	160 do. do. (Gewinn)
1	—	60 Kreuzer.
125		711

711 : 125 = $5^{86}/_{125}$ Krz. = 5 Krz. 3 Pf.

6) H. in Stettin kauft von D. in Bordeaux 5000 Liter Weingeist, den Hektoliter zu 35 Frcs., mit 6 Monaten Ziel oder 8 % Disconto. D. gewährt $1^1/_2$ % für Leckage, bringt aber 4 % für die Fässer, 4 $^0/_{00}$ Sensarie, $1^1/_2$ % Speditionsgebühren und 6 $^0/_{00}$ Assecuranz in Rechnung. H. muß $87^1/_2$ Frcs. Fracht und 10 Frcs. Caplaken, die in Bordeaux bedungen waren, ferner 3 Thlr. Tonnengeld in Swinemünde, 3 $^4/_5$ Thlr. Zoll und Steuern, 5 Thlr. Courtage in Stettin und 11 Thlr. allgemeine Spesen zahlen. Er führt die Schuld 3 Monate nach dem Kauftage in Hamburger Papieren zum Cours Stettin—Hamburg 152, Bordeaux—Hamburg 190 ab. Was kostet ihm der Weingeist im Ganzen, und wie theuer kann er das Liter in Stettin verkaufen, wenn er 10 % Wasser zusetzt und 75 % verdienen will.

Da sich die Procente, welche D. in Rechnung stellt, sämmtlich auf den Einkaufspreis beziehen, so können sie zusammengezogen und kompensirt (ausgeglichen) werden, also 4‰ Sensarie und 6‰ Assecuranz geben 10‰ = 1 %, dazu Fässer 4 %, Speditionsgebühren $1^1/_2$ %, zusammen $6^1/_2$ %; davon ab für Leckage $1^1/_2$ %, bleiben 5 % Spesen.

8 % Disconto auf 1 Jahr macht 2 % auf 3 Monate.

? Thlr. preuß.	—	5000 Liter
100	—	35 Francs
100	—	105 „ (Spesen)
100	—	98 „ (Disconto)
190	—	100 Mark Bco.
300	—	152 Thlr. preuß.
5		2401

2401 : 5 = $480^1/_5$ Thlr.

Gießt A. 10 % Wasser zu dem Weingeist, also auf 100 Liter 10 Liter, so setzt er demselben 500 Liter Wasser zu und hat nun 5500 Liter Spiritus zu circa 90 %.

Die Spesen betragen $87^1/_2$ Francs, Fracht und Caplaken 10 Francs, zusammen $97^1/_2$ Frcs. à 8 Sgr., macht 26 Thaler; dazu Tonnengeld und Steuern $34^4/_5$ Thlr., Courtage und Spesen 16 Thlr., giebt in Summa $76^4/_5$ Thlr. Hiervon ab Werth der Fässer (die H. behält) etwa 7 Thaler, bleiben $69^4/_5$ Thlr. Betrag für den Weingeist $480^1/_5$ Thlr. und $69^4/_5$ Thlr., macht 550 Thlr. Einkaufspreis für die 5500 Liter.

? Sgr.	—	1 Liter
5500	—	550 Thlr.
100	—	175 Thlr. (Gewinn)
1	—	30 Sgr.
4		21

21 : 4 = $5^1/_4$ Sgr. = 5 Sgr. 3 Pf.

XVII. Die Staatspapier- und Actien-Rechnung.

A. Staatspapiere.

§ 187.

Staatspapiere sind Schuldverschreibungen eines Staates über Capitalien, die er aufgenommen hat und wofür er den Inhabern solcher Papiere Zinsen vergütet. Man nennt die Staatspapiere auch Staats-Obligationen, Staats-Effecten oder Fonds; in England werden sie Stocks, in Frankreich Bons genannt.

Zu den preußischen Staatspapieren gehören die Staatsschuldscheine, die Staatsanleihen, die freiwillige Anleihe, die Pfand- und Rentenbriefe der verschiedenen Provinzen, als der Kur- und Neumark, Pommerns 2c. und die Berliner Stadtobligationen.

Die meisten dieser Papiere sind über Summen von 25, 50, 100 bis 1000 Thaler ausgestellt; man nennt dies ihre **Nominalwerthe**, denn ihre wirklichen Werthe hangen von den augenblicklichen finanziellen Verhältnissen des Staates, von dem Zinsfuß, nach dem sie Zinsen gewähren, von Krieg und Frieden und von der Größe des Begehrs ab.

Dieser veränderliche Werth wird der **Cours** derselben genannt, welcher im Courszettel (§ 183) in Procenten angegeben ist und zugleich ersehen läßt, welcher Zinsfuß mit ihnen verbunden ist. Die dem Course beigesetzten Buchstaben haben dieselbe Bedeutung, wie es bei den Wechseln im gedachten Paragraph gesagt ist.

Sämmtliche preußische Staatspapiere lauten au porteur, d. h. nicht auf den Namen des Inhabers (wie in England bei den Consols), sondern wer sie kauft, ist Besitzer und ihm werden die Zinsen ausgezahlt. Diese werden mittelst sogenannter **Coupons**, welche auf mehrere Jahre jedem Scheine beigefügt sind, bei den Regierungs-Hauptkassen oder anderen Kassen, gewöhnlich am 2ten Januar und 1sten Juli (bei einigen auch an anderen Tagen) erhoben. Es giebt aber auch Staatspapiere, die keine bestimmten Zinsen tragen, wie die **Prämienscheine, Prämienanleihen, Loose** u. s. w., deren Zinsen in dem Gewinn bestehen, der bei der Verloosung (ähnlich wie bei der Lotterie) auf sie fällt und der oft nur gering, oft aber auch sehr beträchtlich ist.

Von den fremden Staatspapieren gilt in der Hauptsache dasselbe, was eben von den preußischen gesagt ist. Die bemerkenswerthesten sind die österreichischen **Metalliques** mit verschiedenem Zinsfuße, die russisch-polnischen Anleihen und wie sie weiter im Courszettel, der fast in jeder Zeitung zu lesen ist, angegeben sind.

Man kauft und verkauft die Staatspapiere bei einem Banquier, oder man läßt dies durch einen Makler gegen eine festgesetzte Courtage bei der Börse besorgen. Beim Ein- und Verkauf werden die Zinsen der zugehörigen Coupons immer nach 30 Tagen auf den Monat gerechnet. Giebt der Verkäufer eines Staatspapiers die Coupons, welche im nächsten Zinstermine zu zahlen sind, mit ab, so zahlt ihm der Käufer die Zinsen vom vergangenen Termine bis zum Kauftage; giebt er die gedachten Coupons nicht mit, so zieht der Käufer von dem Werth der Papiere die Zinsen vom Kauftage bis zum nächsten Termin ab.

1) Es will Jemand am 11ten October 1500 Thaler (Nominalwerth) preuß. Staatsschuldscheine mit Coupons kaufen, der Cours ist $89\frac{7}{8}$; wieviel hat er dafür zu zahlen? Die Zinsen à $3\frac{1}{2}$% werden am 1sten Juli und 2ten Januar erhoben.

Vom 1sten Juli bis 11ten October sind $3\frac{1}{3}$ Monat, also:

100 Thlr. geben in 12 Mon. $3\frac{1}{2}$ Thlr.
1500 „ „ „ $3\frac{1}{3}$ „ ? „

$$\frac{7 . 1500 . 10}{2 . 100 . 3 . 12} = 14\frac{7}{12} \text{ Thlr.}$$

= 14 Thlr. 17 Sgr. 6 Pf. Zinsen.

100 Thlr. Nominalwerth geben $89\frac{7}{8}$ Thaler.

1500 Thlr. geben also $89\frac{7}{8} \times 15$
= 1348 Thlr. 3 Sgr. 9 Pf. Capital
dazu 14 „ 17 „ 6 „ Zinsen
1362 Thlr. 21 Sgr. 3 Pf.
sind für die 1500 Thlr. Staatsschuldscheine zu zahlen.

2) A. will am 11ten October 1500 Thlr. Staatsschuldscheine ohne Coupons verkaufen; wieviel erhält er dafür, wenn der Cours $89\frac{7}{8}$ ist?

Vom 11ten October bis 31sten December sind $2^2/_3$ Monate, also:

100 Thlr. geben in 12 Mon. $3^1/_2$ Thlr.
1200 „ „ „ $2^2/_3$ „ ? „

$$\frac{7 \cdot 1500 \cdot 8}{2 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 12} = 11^2/_3 \text{ Thlr.}$$
= 11 Thlr. 20 Sgr. Zinsen.

100 Thlr. Nominalwerth geben $89^7/_8$ Thaler,

1500 Thlr. geben also $89^7/_8 \times 15$
= 1348 Thlr. 3 Sgr. 9 Pf. Cap.
davon ab 11 „ 20 „ — „ Zins.
bleiben 1336 Thlr. 13 Sgr. 9 Pf.,

die A. für die 1500 Thaler Staatsschuldscheine erhält.

3) B. kauft am 11ten August 1800 Thlr. Staatsschuldscheine mit Coupons und zahlt dafür 1633 Thlr.; zu welchem Cours hat er sie gekauft?

Vom 1sten Juli bis 11ten August sind $1^1/_3$ Monate.

100 Thlr. geben in 12 Mon. $3^1/_2$ Thlr.
1800 „ „ „ $1^1/_3$ „ ? „

$$\frac{7 \cdot 1800 \cdot 4}{2 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 12} = 7 \text{ Thlr. Zinsen.}$$

1633 Thlr. — 7 Thlr. = 1626 Thlr.
1800 Thlr. geben 1626 Thlr.
100 Thlr. geben also 1626 : 18

$$= \frac{1626}{18} = \frac{813}{9} = \frac{271}{3} = 90^1/_3 \,\%.$$

B. hat also die 1800 Thlr. zum Cours von $90^1/_3$ % gekauft.

4) C. kauft am 21sten Mai Staatsschuldscheine mit Coupons zum Cours von $92^2/_3$ und zahlt dafür $1128^1/_3$ Thlr.; welchen Nominalwerth hatten die Papiere?

Vom 1sten Januar bis 21sten Mai sind $4^2/_3$ Monate.

12 Monate geben $3^1/_2$ Thlr. Zinsen
$4^2/_3$ „ „ ? „ „

$$\frac{7 \cdot 14}{2 \cdot 3 \cdot 12} = \frac{49}{36} = 1^{13}/_{36} \text{ Thlr.}$$

$92^2/_3 + 1^{13}/_{36} = 94^1/_{36}$ ist der Courswerth plus den Zinsen für 100 Thlr. Nominalwerth; $1128^1/_3$ Thaler ist der Courswerth plus den Zinsen für den ganzen Nominalwerth, also:

$94^1/_{36}$ Thlr. geben 100 Thlr.
$1128^1/_3$ „ „ ? „

$$\frac{100 \cdot 3385 \cdot 36}{3 \cdot 3385} = 1200 \text{ Thlr. Nominalwerth.}$$

5) D. kauft am 9ten Februar 4-procentige neue Pommersche Pfandbriefe zum Course von 98 ohne Coupons und muß dafür $1447^1/_2$ Thlr. zahlen; welchen Nominalwerth hatten die Pfandbriefe? (Zinsen-Zahlungstermine sind am 24sten Juni und 24sten December.)

(Vom 9ten Februar bis 24sten Juni sind 4 Monate 15 Tage = $4^1/_2$ Monate.)

12 Monate geben 4 Thlr.
$4^1/_2$ „ „ ? „

$$\frac{4 \cdot 9}{2 \cdot 12} = \frac{3}{2} = 1^1/_2 \text{ Thlr. Zinsen.}$$

98 Thlr. — $1^1/_2$ Thlr. = $96^1/_2$ Thaler ist der Courswerth minus den Zinsen für 100 Thlr. Nominalwerth; $1447^1/_2$ Thaler ist auch der Courswerth minus den Zinsen für den ganzen Nominalwerth; also:

$96^1/_2$ Thlr. geben 100 Thlr.
$1447^1/_2$ „ „ ? „

$$\frac{100 \cdot 2895 \cdot 2}{2 \cdot 193} = 1500 \text{ Thlr. Nominalwerth.}$$

6) Es kauft Jemand am 13ten September 1600 Thlr. Berliner Stadtobligationen mit Coupons zum Course von $101^1/_2$ und muß dafür $1638^2/_5$ Thlr. zahlen. Wieviel Procent geben diese Papiere? (Zinsen-Zahlungstermine sind am 2ten Januar und 1sten Juli.)

$101^1/_2 \times 16 = 1624$ Thlr. Capital,
$1638^2/_5$ Thlr. — 1624 Thlr.
$= 14^2/_5$ Thlr. Zinsen.
Vom 1sten Juli bis 13ten September sind 72 Tage.

1600 Thlr. in 72 Tag. $14^2/_5$ Thlr. Zins.
100 „ „ 360 „ ? „ „

$$\frac{72 \cdot 100 \cdot 360}{5 \cdot 1600 \cdot 72} = \frac{9}{2} = 4^1/_2\,\%.$$

7) Es verkauft Jemand im Monat Juni 2000 Thlr. der 5-procentigen preußischen Staatsanleihe vom Jahre 1859 mit Coupons zum Course von 105 und erhält $2122^1/_2$ Thlr. ausgezahlt; an welchem Tage hatte er die Papiere verkauft? (Zinsen-Zahlungstermine sind am 1sten April und 1sten October.)

105 Thlr. $\times$ 20 = 2100 Thlr. Capital; $2122^1/_2$ Thlr. — 2100 Thlr. = $22^1/_2$ Thlr. Zinsen.

100 Thlr. geben 5 Thlr. in 360 Tagen
2000 „ „ $22^1/_2$ „ „ ? „
} Je mehr Capital, je weniger Tage; § 141 je mehr Zinsen, je mehr Tage.

$$\frac{360 \cdot 100 \cdot 45}{2000 \cdot 2 \cdot 5} = 81 \text{ Tage} = 2 \text{ Monate } 21 \text{ Tage}.$$

2 Monate 21 Tage nach dem 1sten April ist der 22ste Juni; die Papiere sind also am 22sten Juni verkauft worden.

8) Es kauft Jemand in Berlin am 29sten Juli 5-procentige österreichische Metalliques mit Coupons zum Course von 62 und bezahlt an Zinsen 22 Thlr. preußisch Courant; wieviel hat er dem Nominalwerthe nach von diesen Papieren gekauft? (Zinsen-Zahlungstermine sind am 1sten Mai und 1sten November.)

Vom 1sten Mai bis 29sten Juli sind 88 Tage.

3 Gulden österr. = 2 Thlr. preuß. Courant; 22 Thlr. preuß. Courant = 33 österr. Gulden.

5 Guld. in 360 Tagen 100 Guld.
33 „ „ 88 „ ? „
} Je mehr Zinsen, je mehr Capital; je weniger Tage, je mehr Capital § 140.

$$\frac{100 \cdot 33 \cdot 360}{5 \quad 88} = 2700 \text{ Gulden Nominalwerth}.$$

B. Actien.

§ 188.

Was die Staatspapiere für den Staat sind, das sind die Actien für Privatunternehmungen. Soll z. B. eine Eisenbahn gebaut werden, zu der die Unternehmer nicht die nöthigen Geldmittel besitzen, so geben sie Actien aus, gewöhnlich zu denselben Nominalwerthen, wie es bei den Staatspapieren der Fall ist und die nicht allein wie diese Zinsen bringen, sondern auch, wenn die Bahn rentirt, d. h. mehr Einnahme als Ausgabe hat, eine Dividende gewähren. Der

Ueberschuß der Einnahmen wird nämlich nach Abzug aller Kosten und Zinsen unter die Actionäre (Besitzer der Actien) im Verhältniß der Größe der Actiensumme, welche sie besitzen, vertheilt, was man die Vertheilung der Dividende nennt.

Haben die zum Bau der Eisenbahn ausgegebenen Actien nicht hingereicht, den Bau und Betrieb zu decken, so werden noch anderweite Actien ausgegeben, die dann Prioritäts-Actien genannt werden. Diese bringen jedoch nur Zinsen, keine Dividende wie die ersteren (Stammactien), und werden gewöhnlich von den Ueberschüssen der Einnahme wieder eingelöst (amortisirt). Nicht allein Eisenbahnen, sondern auch Brauereien, Brodbäckereien und andere industrielle Unternehmungen werden in neuerer Zeit auf Actien eingerichtet.

Die Actien sind wie die Staatspapiere mit Coupons versehen, die an ein oder zwei bestimmten Tagen im Jahre, wie bei jenen gezahlt werden, und da mit den Actien ebenfalls ein bedeutender Handel getrieben wird, so sind sie auch wie die Staatspapiere dem Course unterworfen, der sich bei ihnen hauptsächlich nach der Dividende, die sie gewähren, und nach dem Zinsfuße richtet.

Die Berechnung der Zinsen und des Werthes der Actien ist mit jener bei den Staatspapieren ganz übereinstimmend, weshalb auch nur einige Beispiele als Anhalt hier folgen:

1) A. will am 7ten April 20 Stück $3\frac{1}{2}$-procentige Cöln-Mindener Eisenbahn-Actien à 100 Thlr. zum Course von 192 mit Coupons kaufen; wieviel wird er dafür zahlen müssen? (Zinsen-Zahlungstermine sind am 2ten Januar und 1sten Juli.)

Vom 1sten Januar bis 7ten April sind 96 Tage = $3\frac{1}{5}$ Monate.

$192 \times 20 = 3840$ Thlr. Capital (20 Actien à 192 Thlr.)

100 Thlr. geben in 12 Mon. $3\frac{1}{2}$ Thlr.	$\frac{7 \cdot 2000 \cdot 16}{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 12} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$
2000 „ „ „ $3\frac{1}{5}$ „ ? „	Thaler Zinsen.

3840 Thlr. Capital + $18\frac{2}{3}$ Thlr. Zinsen = $3858\frac{2}{3}$ Thlr. hat A. zu zahlen.

2) B. hat am 16ten Mai 1600 Thlr. $3\frac{1}{2}$-procent. Oberschlesische Prioritäts-Actien Littr. E. im Course von $81\frac{3}{4}$ ohne Coupons gekauft; wieviel hat er dafür gezahlt? (Zinsen-Zahlungstermine sind am 1sten April und 1sten October.)

Vom 16ten Mai bis 1sten October sind $4\frac{1}{2}$ Monate.

$81\frac{3}{4} \times 16 = 1308$ Thlr. Capital (16 Hundert à $81\frac{3}{4}$ Thlr.)

100 Thlr. geben in 12 Mon. $3\frac{1}{2}$ Thlr.	$\frac{7 \cdot 1600 \cdot 9}{2 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 12} = 21$ Thlr. Zinsen.
1600 „ „ „ $4\frac{1}{2}$ „ ? „	

1308 Thlr. Capital — 21 Thlr. Zinsen = 1287 Thlr. hat B. gezahlt.

3) Für eine Eisenbahn sind 3 Millionen Thaler 4-procentige Stamm-Actien ausgegeben; die Betriebskosten, Gehälter und alle anderen Ausgaben betrugen im Jahre 1866 70000 Thlr., die Einnahme 450000 Thlr.; wieviel Procent beträgt die zu vertheilende Dividende?

3000000 Thlr. à 4 % macht 120000 Thlr. Zinsen für die Stammactien, dazu Unkosten 70000 Thlr., macht Ausgabe 190000 Thlr.

450000 Thlr. Einnahme — 190000 Thlr. Ausgabe läßt 260000 Thlr. Ueberschuß.

3000000 Thlr. geben 260000 Thlr.	$\frac{260000 \cdot 100}{3000000} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$ % Dividende.
100 „ „ ? „	

4) Für eine Eisenbahn sind 4 Millionen Thaler Stammactien à $4\frac{1}{2}\%$ und 1 Million Thaler Prioritäts-Actien à 5% ausgegeben; die Betriebskosten und alle übrigen Ausgaben betragen im Jahre 1866 85000 Thlr., die Einnahme 725000 Thlr.; wie groß ist die in diesem Jahre zu vertheilende Dividende, wenn die Hälfte des Ueberschusses zur Amortisirung der Prioritäts-Actien verwendet werden soll?

4000000 Thaler Stammactien à $4\frac{1}{2}\%$ macht 180000 Thaler Zinsen; 1000000 Thlr. Prioritäts-Actien à 5% macht 50000 Thaler Zinsen; dazu 85000 Thlr. Betriebskosten, ergiebt eine Ausgabe von 315000 Thalern.

725000 Thlr. Einnahme — 315000 Thlr. Ausgabe giebt 410000 Thaler Ueberschuß, davon $\frac{1}{2}$ = 205000 Thlr. zur Amortisirung, bleiben 205000 Thlr. zur Vertheilung.

4000000 Thlr. geben 205000 Thlr.
100 " " ? "

$$\frac{205000 \cdot 100}{4000000} = \frac{41}{8} = 5\tfrac{1}{8}\%$$ Dividende.

XVIII. Die Termin-Rechnung.

§ 189.

Wenn zwei oder mehrere Capitalien nicht gleichzeitig zahlbar sind, so läßt sich ein Tag ermitteln, an welchem die Capitalien zusammen, ohne Nachtheil an Zinsen für den Zahlenden oder für den Empfänger, gezahlt werden können; dieser Tag wird der mittlere Zahlungstermin genannt. Wenn ferner ein oder mehrere Capitalien an einem gewissen Tage zu zahlen sind und es werden Zahlungen früher oder zwischen den festgesetzten Terminen gemacht, so kann dadurch das letzte Capital, Restcapital, oder der Rest einer Summe, um so viel später gezahlt werden und der Tag, an dem dies geschieht, heißt der Zahlungstag des Restes. Beide Tage werden durch die Terminrechnung gefunden und diese wird daher in die beiden Haupttheile: Aufsuchung des mittleren Zahlungstermins und Bestimmung des Zahlungstages des Restes getheilt.

A. Aufsuchung des mittleren Zahlungstermins.

§ 190.

Will A. von B. für 800 Thlr. Waare unter der Bedingung kaufen, daß er 300 Thlr. gleich und die übrigen 500 Thlr. nach 6 Monaten zahlen könne, und B. bewilligt den Credit der 500 Thlr. auf 6 Monate, will aber das Geld zusammen gezahlt haben, so meint er damit, daß A. auch die 300 Thaler so lange behalten soll, bis die Zinsen der ganzen 800 Thlr. gleich den Zinsen der 500 Thlr. auf 6 Monate sind.

500 Thaler geben aber in 6 Monaten eben so viele Zinsen, wie 1 Thlr. in $500 \times 6 = 3000$ Monaten (§ 139 Beispiel 15); man hat also nichts weiter nöthig, als diejenige Zahl zu suchen, die mit den ganzen 800 Thlrn. multiplicirt, auch 3000 Monate giebt, und das ist $3000 : 800 = 3\frac{3}{4}$. Also in $3\frac{3}{4}$ Monaten geben 800 Thlr. eben so viele Zinsen, wie 500 Thlr. in 6 Monaten; die ganzen 800 Thlr. sind also nach $3\frac{3}{4}$ Monaten zu zahlen.

Man sieht zugleich, daß sich die Nullen heben, daß diese also in gleicher Anzahl bei jedem Capital fortgelassen werden können, und daher nur angesetzt werden braucht $\frac{5 \times 6}{8} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ Monate. Sind mehrere Capitalien gegeben, z. B. 400 Thlr. sollen gleich, 300 Thlr. nach 2 Monaten und 500 Thlr. nach 4 Monaten gezahlt werden, so ist $3 \times 2 = 6$ und $5 \times 4 = 20$, zusammen 26; $26 : 12 = 2\frac{1}{6}$ Monate. Die ganzen 1200 Thlr. sind also nach $2\frac{1}{6}$ Monaten zu zahlen.

Um also den mittleren Zahlungstermin von zwei oder mehreren Capitalien zu finden, multiplicirt man jedes Capital mit der zugehörigen Zeit (Monate oder Tage), addirt diese Produkte und dividirt sie durch die Summe aller Capitalien, wobei man die gleiche Anzahl Nullen der Capitalien fortläßt.

1) Ein Haus soll für 30000 Thlr. unter der Bedingung verkauft werden, daß 12000 Thlr. gleich und 18000 Thlr. nach 8 Monaten zu zahlen sind. Ein Käufer will die ganze Summe zusammen zahlen, aber den Vortheil der gestellten Bedingung genießen; wie viele Monate nach dem Kauftage hat er die ganze Summe zu zahlen? (3 Nullen fort.)

$\frac{18 \times 8}{12 + 18} = \frac{144}{30} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$ Monate oder 4 Monate 24 Tage nach dem Kauftage müssen also die ganzen 30000 Thlr. gezahlt werden.

2) Am 1sten Mai sind 7200 Thlr., am 27sten Mai 8400 Thlr. zu zahlen, an welchem Tage können beide Capitalien zusammen gezahlt werden?

Vom 1sten bis 27sten Mai sind 26 Tage (2 Nullen fort).

$\frac{84 \times 26}{72 + 84} = \frac{2184}{156} = \frac{182}{13} = 14$ Tage nach dem 1sten Mai, also am 15ten Mai sind beide Capitalien zusammen zu zahlen.

3) Am 1sten April sind 3000 Thlr., am 16ten Mai 3600 Thlr. und am 1sten Juli 4200 Thlr. zu zahlen; an welchem Tage können die 3 Capitalien zusammen gezahlt werden?

Vom 1sten April bis 16ten Mai sind $1\frac{1}{2}$ Monate, bis 1sten Juli 3 Mon. (2 Nullen fort) $\frac{36 \,.\, 1\frac{1}{2} + 42 \,.\, 3}{30 + 36 + 42} = \frac{54 + 126}{108} = \frac{180}{108} = 1\frac{2}{3}$ Monate oder 1 Monat 20 Tage; dies zum 1sten April addirt, giebt den 21sten Mai als Zahlungstag der 3 Capitalien.

4) Am 1sten Mai sind 7200 Thlr., am 6ten Juni 6000 Thlr., am 11ten Juli 4800 Thlr., am 16ten August 3600 Thlr. und am 21sten September 2400 Thlr. zu zahlen; an welchem Tage können die 5 Capitalien zusammen gezahlt werden?

Vom 1sten Mai bis 6ten Juni sind $1^1/_6$ Monate, bis 11ten Juli $2^1/_3$ Monate, bis 16ten August $3^1/_2$ Monate, bis 21sten September $4^2/_3$ Monate. (2 Nullen fort.)

$$\frac{60 \,.\, 1^1/_6 + 48 \,.\, 2^1/_3 + 36 \,.\, 3^1/_2 + 24 \,.\, 4^2/_3}{72 + 60 + 48 + 36 + 24} = \frac{70 + 112 + 126 + 112}{240}$$

$= \frac{420}{240} = {}^7/_4 = 1^3/_4$ Monate oder 1 Monat 23 Tage nach dem 1sten Mai also am 24sten Juni sind die 5 Capitalien zusammen zu zahlen.

5) $^3/_{10}$ eines Capitals sollen am 15ten Mai, $^3/_{10}$ am 15ten August und $^4/_{10}$ am 15ten October gezahlt werden; wann kann das ganze Capital zusammen gezahlt werden?

Vom 15ten Mai bis 15ten August sind 3 Monate, bis 15ten October 5 Monate.

Da die Nenner der Brüche gleich sind, so kommen nur die Zähler in Ansatz:
$\frac{3 \,.\, 3 + 4 \,.\, 5}{3 + 3 + 4} = \frac{9 + 20}{10} = \frac{29}{10} = 2^9/_{10}$ Monate oder 2 Monate 27 Tage zu dem 15ten Mai addirt, giebt den 12ten August als mittleren Zahlungstermin des ganzen Capitals.

6) Der 3te Theil eines Capitals soll am 1sten Januar, der 4te Theil am 1sten März, der 6te Theil am 1sten Mai, der 8te Theil am 1sten Juli und der Rest am 1sten September gezahlt werden; wann kann das ganze Capital zusammen gezahlt werden?

Vom 1sten Januar bis 1sten März sind 2, bis 1sten Mai 4, bis 1sten Juli 6 und bis 1sten September 8 Monate.

$^1/_3 + {}^1/_4 + {}^1/_6 + {}^1/_8 = {}^8/_{24} + {}^6/_{24} + {}^4/_{24} + {}^3/_{24} = {}^{21}/_{24}$; also der Rest $^3/_{24}$.

Da die Brüche jetzt gleiche Nenner haben, so kommen, wie in Beispiel 5, nur die Zähler in Ansatz:
$\frac{6 \,.\, 2 + 4 \,.\, 4 + 3 \,.\, 6 + 3 \,.\, 8}{8 + 6 + 4 + 3 + 3} = \frac{12 + 16 + 18 + 24}{24} = \frac{70}{24} = \frac{35}{12} = 2^{11}/_{12}$ Monate oder 2 Monate 28 Tage nach dem 1sten Januar, giebt den 29sten März als mittleren Zahlungstermin des ganzen Capitals.

7) Ein Capital von 6000 Thlrn. mit den einjährigen Zinsen zu 4 % soll am 1sten April, ein anderes von 8000 Thlrn. mit den einjährigen Zinsen zu $4^1/_2$ % am 1sten Juli und ein drittes von 10000 Thlrn. mit den zweijährigen Zinsen zu $2^1/_2$ % am 1sten September gezahlt werden; wann ist der mittlere Zahlungstermin dieser 3 Capitalien?

Wenn bei den Capitalien die Zinsen, einjährige oder mehrjährige, mit berücksichtigt werden sollen, so werden sie dem Capital zugerechnet und es wird dann mit diesem in derselben Weise wie bisher verfahren.

6000 Thlr.	zu	4 %	geb. in	1	Jahr	240	Thlr.	Zins.,	also	Cap.	u.	Zins.	6240	Thlr.
8000	"	" $4^1/_2$ %	"	1	"	360	"	"	"	"	"	"	8360	"
10000	"	" $2^1/_2$ %	"	2	"	500	"	"	"	"	"	"	10500	"

Vom 1sten April bis 1sten Juli sind 3 Monate, bis 1sten September 5 Monate (1 Null fort).

$$\frac{836 . 3 + 1050 . 5}{624 + 836 + 1050} = \frac{3879}{1255} = 3 \text{ Monate } 2^{182}/_{251} \text{ Tage}$$ oder 3 Monate 3 Tage zum 1sten April addirt, giebt den 4ten Juli als mittleren Zahlungstermin.

B. Bestimmung des Zahlungstermins des Restes.

§ 191.

Es sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

es ist ein Zahlungstermin festgesetzt, und die Zahlung oder die Zahlungen erfolgen vor diesem Termin;

es sind ein, zwei oder mehrere Zahlungstermine festgesetzt, und die Zahlungen geschehen vor, zwischen und nach diesen Terminen.

a) Es ist ein Zahlungstermin festgesetzt, und die Zahlung oder die Zahlungen erfolgen vor diesem Termin.

Soll A. am 1sten Mai 750 Thlr. zahlen, und er zahlt schon am 1sten März, also 2 Monate früher, als er es nöthig hat, 450 Thlr., so hat B., an den er das Capital zu zahlen hat, die Zinsen für 450 Thlr. × 2 Monate = 900 Monate (§ 190) erhalten, ohne daß dieser sie zu fordern hat; es muß also A. die noch zu zahlenden 300 Thlr. so lange nach dem Zahlungstermine behalten können, bis die Zinsen für diese 300 Thlr. gleich denen sind, die B. durch die 450 Thlr. erhalten hat; also 900 Monate : 300 = 3 Monate. In 3 Monaten geben 300 Thlr. ebenso viele Zinsen, wie 450 Thlr. in 2 Monaten. A. kann also die Restsumme oder das Restcapital von 300 Thlrn. 3 Monate nach dem Zahlungstermin, d. i. bis zum 1sten August behalten.

Werden mehrere Zahlungen vor dem festgesetzten Termin gemacht, so sind, wie vorhin, die Zinsen des Restcapitals gleich den Zinsen sämmtlicher vorher gemachten Zahlungen.

Man findet also bei einem festgestellten Termin, und wenn eine Zahlung vor diesem Termin geschieht, den Zahlungstag des Restes dadurch, daß man die Zahlungssumme mit der Zeit vor dem Zahlungstermin multiplicirt und dies Produkt durch das Restcapital oder die Restsumme dividirt; oder wenn mehrere Zahlungen vor dem festgesetzten Termin geschehen, daß man jede Zahlungssumme mit der zugehörigen Zeit vor dem Zahlungstermin multiplicirt, die erhaltenen Produkte addirt und dies durch das Restcapital oder die Restsumme dividirt.

Die Nullen können auch hier in gleicher Anzahl bei den Capitalien fortgelassen werden.

1) A. soll am 15ten September 1200 Thlr. zahlen; er zahlt aber schon am 1sten Juli 700 Thlr. Wie lange kann er die Restsumme von 500 Thlrn. nach dem Zahlungstermin behalten?

Vom 1sten Juli bis 15ten September sind $2^1/_2$ Monate (2 Nullen fort).

$$\frac{7 . 2^1/_2}{5} = \frac{7 . 5}{2 . 5} = \frac{7}{2} = 3^1/_2$$ Monate nach dem 15ten September, d. i. den 30sten December sind die 500 Thlr. zu zahlen.

2) B. soll 1800 Thlr. am 1sten October zahlen; er zahlt aber schon 300 Thlr. am 1sten Juli, 200 Thlr. am 15ten Juli, 400 Thlr. am 1sten August und 300 Thlr. am 1sten September. Wann kann er das Restcapital von 600 Thlrn. zahlen?

Vom 1sten Juli bis 1sten October sind 3 Monate; vom 15ten Juli bis 1sten October sind $2^1/_2$ Monate; vom 1sten August bis 1sten October sind 2 Monate und vom 1sten Sept. bis 1sten Octbr. ist 1 Monat (2 Nullen fort).

$$\frac{3 \,.\, 3 + 2 \,.\, 2^1/_2 + 4 \,.\, 2 + 3 \,.\, 1}{6} = \frac{9 + 5 + 8 + 3}{6} = \frac{25}{6}$$

$= 4^1/_6$ Monate nach dem 1sten October, d. i. den 6ten Februar des folgenden Jahres sind die 600 Thlr. Restsumme von B. zu zahlen.

3) C. soll ein Capital am 26sten August zahlen; er zahlt aber $^1/_3$ desselben schon am 16ten Mai, $^1/_4$ am 21sten Juni und $^1/_6$ am 1sten Juli. Wann kann er den Rest zahlen?

Die Brüche auf gleiche Benennung gebracht, geben $^4/_{12}$, $^3/_{12}$, $^2/_{12}$ und der Rest also $^3/_{12}$; da die Nenner gleich sind, so kommen nur die Zähler 4, 3, 2, 3 in Ansatz. Ferner sind vom 16ten Mai bis 26sten August $3^1/_3$ Monate, vom 21sten Juni bis 26sten August $2^1/_6$ Monate und vom 1sten Juli bis 26sten August $1^5/_6$ Monat.

$$\frac{4 \,.\, 3^1/_3 + 3 \,.\, 2^1/_6 + 2 \,.\, 1^5/_6}{3} = \frac{13^1/_3 + 6^1/_2 + 3^2/_3}{3} = \frac{23^1/_2}{3} = \frac{47}{6}$$

$= 7^5/_6$ Monate $=$ 7 Monate 25 Tage nach dem 26sten August, also am 21sten April des folgenden Jahres ist der Rest zu zahlen.

b) Es sind ein, zwei oder mehrere Zahlungstermine festgestellt, und die Zahlungen geschehen vor, zwischen und nach den Terminen.

Soll A. am 15ten Juli 600 Thlr. und am 15ten September 800 Thlr. zahlen, zahlt aber schon am 15ten Mai 1000 Thlr., so hat B. die Zinsen von 1000 Thlrn. auf 4 Monate, vom 15ten Mai bis 15ten September, also $1000 \times 4 = 4000$ Monate erhalten, die er nicht zu fordern hat; dagegen hat A. die 600 Thlr. nicht gezahlt, von welchen die Zinsen auf 2 Monate, vom 15ten Juli bis 15ten September, $600 \times 2 = 1200$ Monate machen. 4000 Monate — 1200 Monate $=$ 2800 Monate Zinsen hat B. also mehr erhalten. So oft nun die Restsumme in dem Ueberschuß 2800 Monate enthalten ist, so lange kann A. diese Summe nach dem letzten Zahlungstermin, dem 15ten September, behalten.

Die Restsumme 400 Thlr. ist in 2800 Monaten 7 mal enthalten, und 7 Monate nach dem 15ten September giebt den 15ten April des folgenden Jahres, an dem sie zu zahlen ist.

Sind mehrere Zahlungen von A. erfolgt, so kommen sie, mit ihrer zugehörigen Zeit multiplicirt, ebenso in Ansatz, wie hier die eine Zahlung; dasselbe ist der Fall, wenn mehrere Zahlungstermine angenommen sind. Wenn also *ein*, *zwei* oder *mehrere* Abschlagszahlungen erfolgen *vor*, *zwischen* oder *nach* den Terminen, so multiplicirt man jede Abschlagszahlung mit der Zeit bis zum letzten Zahlungstermin und addirt diese Produkte; dann multiplicirt man diejenigen Capitalien (Summen), welche vor dem letzten Zahlungstermin gezahlt werden sollten, mit den Zeiten bis zum letzten Zahlungstermin, addirt diese Produkte und zieht sie von den vorigen ab. Die Differenz wird demnächst durch

die Restsumme dividirt, und der entstehende Quotient giebt die Zeit an, in welcher die letztere nach dem letzten Zahlungstermin zu zahlen ist. Die gleiche Anzahl Nullen kann auch hier fortgelassen werden.

1) A. soll 4500 Thlr. am 1sten Juni und 3000 Thlr. am 1sten Septbr. zahlen; er zahlt aber 6000 Thlr. schon am 1sten März. Wann hat er den Rest von 1500 Thlrn. zu zahlen? (2 Nullen fort.)

60 × 6 Monate (vom 1sten März bis 1sten Septbr.) = 360 Monate,
45 × 3 „ (vom 1sten Juni bis 1sten Septbr.) = 135 „
bleiben 225 Monate.

225 : 15 = 15 Monate nach dem 1sten September, also am 1sten December des folgenden Jahres sind die 1500 Thlr. zu zahlen.

2) B. soll 800 Thlr. am 1sten Juni und 1000 Thlr. am 1sten November zahlen; er zahlt aber am 1sten August 1400 Thlr. Wann kann er den Rest von 400 Thlrn. zahlen? (2 Nullen fort.)

14 × 3 Monate (vom 1sten August bis 1sten November) = 42 Monate,
8 × 5 „ (vom 1sten Juni bis 1sten November) = 40 „
bleiben 2 Monate.

2 : 4 = $^1/_2$ Monat = 15 Tage nach dem 1sten November, also am 16ten November sind die 400 Thlr. zu zahlen.

3) C. soll sogleich 5000 Guld. und nach 6 Monaten 4000 Guld. zahlen; er zahlt die 5000 Guld. nicht, dagegen einen Monat später 7000 Guld. Wann muß er die übrigen 2000 Guld. zahlen? (3 Nullen fort.)

7 × 5 Monate (5 Monate vor dem letzten Zahlungstermin) = 35 Monate
5 × 6 „ (6 „ „ „ „ „) = 30 „
bleiben 5 Monate.

5 : 2 = $2^1/_2$ Monate nach dem letzten Zahlungstermin, d. h. nach $8^1/_2$ Monaten oder $7^1/_2$ Monate nach der ersten Zahlung ist die Restsumme von 2000 Guld. zu zahlen.

4) D. soll sogleich 4000 Francs und nach 5 Monaten 6000 Francs zahlen; er zahlt statt dessen 7000 Francs nach 3 Monaten. Wann ist die Restsumme von 3000 Francs zu zahlen? (3 Nullen fort.)

7 × 2 Monate (2 Monate vor dem letzten Zahlungstermin) = 14 Monate
4 × 5 „ (5 „ „ „ „ „) = 20 „
bleiben — 6 Monate.

— 6 : 3 = — 2 Monate. Wenn, wie hier, der Subtrahendus größer als der Minuendus ist, so erhält die Differenz das minus-Zeichen (—) vor sich; das soll heißen, daß man die 2 Monate nicht zu dem letzten Zahlungstermin addirt, wie bisher, sondern sie von demselben abzieht: 5 — 2 = 3 Monate. Nach 3 Monaten (vom 1sten Zahlungstermin an gerechnet) hat also D. nicht allein die 7000 Francs, sondern auch zugleich die Restsumme, mithin die ganzen 10000 Francs zu zahlen.

5) E. soll 8000 Rubel sogleich und 12000 Rubel nach 4 Monaten zahlen; er zahlt die 8000 Rubel aber nicht, sondern 16000 Rubel nach 2 Monaten. Wann sind die übrigen 4000 Rubel zu zahlen? (3 Nullen fort.)

16 × 2 Monate (2 Monate vor dem letzten Zahlungstermin) = 32 Monate
8 × 4 „ (4 „ „ „ „ „) = 32 „
bleiben 0 Monate.

Wenn die Differenz Null ist, d. h. wenn die Zinsen sich heben, so ist die Restsumme am letzten Zahlungstermin, also hier nach 4 Monaten, zu zahlen.

6) F. soll am 1sten Juni 9000 Thlr. bezahlen, zahlt aber schon am 1sten März 5000 Thlr., dagegen erst wieder am 1sten August 2000 Thlr.; kann er die noch fehlenden 2000 Thlr. ferner behalten und wie lange? (3 Nullen fort.)

5 × 3 Monate (vom 1sten März bis 1sten Juni) = 15 Monate
2 × 2 „ (vom 1sten Juni bis 1sten August) = 4 „
bleiben 11 Monate.

11 : 2 = $5\frac{1}{2}$ Monate nach dem 1sten Juni, also den 15ten November sind die letzten 2000 Thlr. zu zahlen. Da die Zahlung der 2000 Thlr. am 1sten August, also nach dem Zahlungstermin (am 1sten Juni) geschah, so mußten die Zinsen dafür von den vor dem Zahlungstermin gezahlten 5000 Thlrn. abgezogen werden.

7) G. soll am 1sten März 3000 Thlr., am 16ten Juni 5000 Thlr. und am 7ten September 3000 Thlr. zahlen; er zahlt aber 8000 Thlr. schon am 1sten Febr. Wann hat er den Rest von 3000 Thlrn. zu zahlen? (3 Nullen fort.)

8 × $7\frac{1}{5}$ Mon. (vom 1sten Febr. bis 7ten Septbr.) = $57\frac{3}{5}$ Mon.
3 × $6\frac{1}{5}$ „ (vom 1sten März bis 7ten Sept.) = $18\frac{3}{5}$ Mon.
5 × $2\frac{7}{10}$ „ (vom 16ten Juni bis 7ten Sept.) = $13\frac{1}{2}$ „ = $32\frac{1}{10}$ „
bleiben $25\frac{1}{2}$ Mon.

$25\frac{1}{2}$: 3 = $8\frac{1}{2}$ Monate nach dem 7ten September, also den 22sten Mai des folgenden Jahres sind die letzten 3000 Thlr. zu zahlen.

8) H. soll 1200 Thlr. am 1sten April und 600 Thlr. am 1sten November zahlen, zahlt aber 1000 Thlr. am 1sten Mai und 600 Thlr. am 1sten Juni; wann hat er den Rest von 200 Thlrn. zu zahlen? (2 Nullen fort.)

10 × 6 Monate (vom 1sten Mai bis 1sten November) = 60 Monate
6 × 5 „ (vom 1sten Juni bis 1sten November) = 30 „
zusammen 90 Monate
12 × 7 „ (vom 1sten April bis 1sten November) = 84 „
bleiben 6 Monate.

6 : 2 = 3 Monate nach dem 1sten November, also am 1sten Februar des folgenden Jahres sind die 200 Thlr. zu zahlen.

9) N. soll 600 Thlr. am 1sten Januar, 600 Thlr. am 16ten Februar, 800 Thlr. am 1sten April und 1000 Thlr. am 1sten Juni zahlen; er zahlt jedoch 800 Thlr. am 5ten Februar, 600 Thlr. am 1sten März und 1200 Thlr. am 1sten Mai. Wann muß er den Rest von 400 Thlrn. zahlen? (2 Nullen fort.)

8 × $3\frac{7}{8}$ Monate (vom 5ten Februar bis 1sten Juni) = 31 Monate
6 × 3 „ (vom 1sten März bis 1sten Juni) = 18 „
12 × 1 „ (vom 1sten Mai bis 1sten Juni) = 12 „
(26 Tage sind circa $\frac{7}{8}$ Monate gerechnet) zusammen 61 Monate.

Transport 61 Monate

6 × 5 Mon. (vom 1sten Januar bis 1sten Juni) = 30 Mon.
6 × $3^1/_2$ „ (vom 16ten Febr. bis 1sten Juni) = 21 „
8 × 2 „ (vom 1sten April bis 1sten Juni) = 16 „ = 67 Monate

bleiben — 6 Monate.

— 6 : 4 = — $1^1/_2$ Monate vor dem 1sten Juni, also den 16ten April muß der Rest gezahlt werden; es hätten also die am 1sten Mai gezahlten 1200 Thlr. schon am 16ten April nebst dem Rest gezahlt werden müssen.

10) Z. soll am 16ten Februar $^1/_3$ eines Capitals, am 26sten April $^2/_9$, am 1sten Juli $^1/_9$ und das Uebrige am 16ten October zahlen, zahlt jedoch am 16ten Januar $^1/_6$, am 1sten März $^1/_3$ und am 1sten Mai $^1/_6$; wann hat er den Rest zu zahlen?

Die Brüche auf gleiche Benennung gebracht, das ist zu 18tel, giebt $^6/_{18}$, $^4/_{18}$, $^2/_{18} = {^{12}/_{18}}$; von $^{18}/_{18}$ bleiben also $^6/_{18}$, welche am 16ten October zu zahlen sind. Gezahlt hat Z. $^3/_{18}$, $^6/_{18}$ und $^3/_{18}$. Die Nenner fortgelassen, erhält man:

3 × 9 Monate (vom 16ten Januar bis 16ten October) = 27 Monate
6 × $7^1/_2$ „ (vom 1sten März bis 16ten October) = 45 „
3 × $5^1/_2$ „ (vom 1sten Mai bis 16ten October) = $16^1/_2$ „

zusammen $88^1/_2$ Monate.

6 × 8 Mon. (vom 16ten Febr. bis 16ten Octbr.) = 48 Mon.
4 × $5^2/_3$ „ (vom 26sten April bis 16ten Octbr.) = $22^2/_3$ „
2 × $3^1/_2$ „ (vom 1sten Juli bis 16ten Octbr.) = 7 „ = $77^2/_3$ Monate

bleiben $10^5/_6$ Monate.

$10^5/_6 : 6 = 1^{29}/_{36}$ Monat = 1 Monat 24 Tage nach dem 16ten October, also am 10ten December ist der Rest zu zahlen.

Andere Aufgaben der Termin-Rechnung siehe Gleichungen, § 210.

XIX. Die Zinseszins-Rechnung.

§ 192.

Wenn die Zinsen eines Jahres zum Capital geschlagen werden und bei dem folgenden Jahre nicht allein vom Capital, sondern auch von den vorjährigen Zinsen wieder Zinsen berechnet werden, so nennt man dies Zins auf Zins oder Zinseszinsen. Dem Einzelnen ist es gesetzlich nicht gestattet, Zinsen von Zinsen zu nehmen; nur die Sparkassen, Lebensversicherungs-Gesellschaften, Rentenbanken und dergleichen Institute sind befugt, Zinseszinsen in Rechnung zu bringen, weil sie damit nützliche Zwecke für das allgemeine Wohl verbinden. Da die Rechenweise bei diesen Instituten verschieden ist, so wird auch die Zinseszinsrechnung hiernach in folgende verschiedene Rechnungsarten getheilt.

A. Die eigentliche Zinseszins-Rechnung.

§ 193.

Von 100 Thalern ist nach einem Jahre, zu 5 %, das Capital mit den Zinsen 105 Thlr., von einem Thaler also $^{105}/_{100} = 1{,}05$ Thlr., von einem Capital K folglich: K × 1,05 Thlr. Bei 4 % wird es demnach K . 1,04 Thlr., bei 3 % K . 1,03 Thlr. sein u. s. w.

Nimmt man K . 1,05 Thlr. als ein neues Capital an, so ist für das zweite Jahr Capital mit Zinsen K . 1,05 . 1,05 Thlr., für das dritte Jahr, wenn K . 1,05 . 1,05 Thlr. wieder als ein neues Capital angenommen wird, K . 1,05 . 1,05 . 1,05. Daraus geht hervor, daß man, um die Zinseszinsen von einem Capital zu erhalten, bei 5 % 1,05, bei 4 % 1,04, bei 3 % 1,03 u. s. w. so oft mit sich selbst multipliciren muß, als Jahre gegeben sind, und daß man mit dem hieraus erhaltenen Produkt das Capital zu multipliciren hat. Für 2, 3, 4 auch 5 Jahre ließe sich nun wohl in dieser Weise der Zinseszins nicht schwer finden, allein wollte man ihn für 25 Jahre, 85 Jahre oder wohl gar für 150 Jahre berechnen, so würde es eine erschreckliche Arbeit sein, so oft 1,05 u. s. w. mit sich selbst zu multipliciren. Man bedient sich deshalb, wenn solche Fälle einzeln vorkommen, zur Berechnung der Zinseszinsen der Logarithmen (§ 230). Im Geschäftsleben kommt jedoch die Berechnung der Zinseszinsen selten über 50 Jahre hinaus vor; wer daher öfter viele solche Posten zu berechnen hat, der fertige sich eine Tabelle in folgender Art an:

Von 1 Thlr. Capital sind, wie vorhin gezeigt worden ist, nach dem 1sten Jahre Capital mit Zinsen 1,05 Thlr.; nach dem 2ten Jahre 1,05 × 1,05 Thlr. = 1,1025 Thlr. oder für den hier vorliegenden Zweck mit 3 Decimalen ausreichend = 1,103 Thlr. (§ 82); nach dem 3ten Jahre 1,103 × 1,05 = 1,15815 oder 1,158 Thlr.; nach dem 4ten Jahre 1,158 × 1,05 = 1,21590 oder 1,216 Thlr. u. s. w. In dieser Weise erhält man bei fortgesetzter Multiplication mit 1,05 Thlr. bei 5 %, mit 1,045 bei $4^1/_2$ %, mit 1,04 bei 4 % u. s. w. die folgende Tabelle I., welche für $3^1/_2$ %, 4 %, $4^1/_2$ % und 5 % auf 50 Jahre ausgeführt ist, die aber Jeder durch einen anderen beliebigen Zinsfuß sich erweitern kann und, wenn die Tabelle zur wirklichen Berechnung im Geschäftsverkehr benutzt werden soll, mit 6 Decimalen auszuführen hat, weil nur dann ganz richtige Resultate erzielt werden können.

Mit Hilfe dieser Tabelle ist es nun leicht, für jedes Capital und jedes Jahr die Zinseszinsen zu finden, indem man mit der für das gegebene Jahr in der Tabelle befindlichen Zahl nur das Capital zu multipliciren braucht. Die Tabelle reicht zwar nur bis 50 Jahre, aber man kann sie auch für Jahre über 50 hinaus benutzen. Will man z. B. für 85 Jahre den Zins auf Zins haben, so zerlegt man 85 in zwei beliebige Zahlen, 35 und 50 oder 45 und 40 oder 42 und 43 u. s. w., und multiplicirt die in der Tabelle dafür angegebenen Werthe mit einander. Für 100 Jahre würde man also den Werth von 50 Jahren mit sich selbst multipliciren müssen, für 200 dasselbe mit 100 vorzunehmen haben.

Welche ungeheure Zahlen übrigens bei vielen Jahren Zins auf Zins entstehen, geht aus folgendem Beispiele hervor: Wenn 1 Pfennig vor 1865 Jahren zu 5 % auf Zinseszinsen gegeben worden wäre, so würde derselbe in der Zeit einen

Werth von 9 Sextillionen Thalern erreicht haben. Will man diese Zahl schreiben, so muß man 36 Nullen der 9 anhängen, und sehr schlecht würde es mit der Bezahlung dieser Summe aussehen; denn nimmt man den Cubikfuß Gold zu 1200 Pfd. und das Pfund Gold zu 450 Thlr. an, so würden, da unsere Sonne ein Volumen hat, das $1^1/_2$ Millionen Erdkugeln in sich faßt, nicht weniger als 302 Sonnenkugeln von gediegenem Golde erforderlich sein, um jene Schuld zu decken. Dies mittelst der Tabelle berechnen zu wollen, würde jedoch nicht anzurathen sein, da es sehr langwierig ist und kein ganz sicheres Resultat giebt, welches nur mittelst Logarithmen zu erlangen ist. (§ 230.)

Tabelle I.,

welche den Zins auf Zins von 1 Thaler, Gulden, Francs u. s. w. auf 1 bis 50 Jahre angiebt.

Nach Jahren	zu 5 %	zu 4½ %	zu 4 %	zu 3½ %	Nach Jahren	zu 5 %	zu 4½ %	zu 4 %	zu 3½ %
1	1,050	1,045	1,040	1,035	26	3,557	3,141	2,776	2,446
2	1,103	1,092	1,082	1,071	27	3,735	3,282	2,887	2,532
3	1,158	1,141	1,125	1,109	28	3,922	3,430	3,002	2,620
4	1,216	1,193	1,170	1,148	29	4,118	3,584	3,122	2,712
5	1,277	1,246	1,217	1,188	30	4,324	3,745	3,247	2,807
6	1,341	1,302	1,266	1,229	31	4,540	3,914	3,377	2,905
7	1,408	1,361	1,317	1,272	32	4,767	4,090	3,512	3,007
8	1,478	1,422	1,370	1,317	33	5,005	4,274	3,652	3,112
9	1,552	1,486	1,425	1,363	34	5,255	4,466	3,798	3,221
10	1,630	1,553	1,482	1,411	35	5,518	4,667	3,950	3,334
11	1,712	1,623	1,541	1,460	36	5,794	4,877	4,108	3,450
12	1,798	1,696	1,603	1,511	37	6,084	5,097	4,272	3,571
13	1,888	1,772	1,667	1,564	38	6,388	5,326	4,443	3,696
14	1,982	1,852	1,734	1,619	39	6,707	5,566	4,621	3,825
15	2,081	1,935	1,803	1,675	40	7,042	5,816	4,806	3,959
16	2,185	2,022	1,875	1,734	41	7,394	6,078	4,998	4,098
17	2,294	2,113	1,950	1,795	42	7,764	6,351	5,198	4,241
18	2,409	2,208	2,028	1,857	43	8,152	6,637	5,406	4,390
19	2,529	2,308	2,109	1,923	44	8,560	6,936	5,622	4,543
20	2,655	2,412	2,193	1,990	45	8,988	7,248	5,847	4,702
21	2,788	2,520	2,281	2,059	46	9,437	7,574	6,081	4,867
22	2,927	2,634	2,372	2,132	47	9,909	7,915	6,324	5,037
23	3,073	2,752	2,467	2,206	48	10,404	8,271	6,577	5,214
24	3,227	2,876	2,566	2,283	49	10,924	8,643	6,840	5,396
25	3,388	3,005	2,669	2,363	50	11,470	9,033	7,114	5,585

Beispiele:

1) Wieviel betragen 500 Thlr. zu 5 % Zins auf Zins nach 34 Jahren?

Nach der Tabelle I. giebt 1 Thlr. Zins auf Zins nach 34 Jahren zu 5 % 5,255 Thlr., also geben 500 Thlr. 5,255 × 500 = $2627^1/_2$ Thlr.

2) Wieviel betragen 100 Gulden zu $3\frac{1}{2}$% Zins auf Zins nach 95 Jahren?

Nach der Tabelle I. ist der Zins auf Zins von 1 Gulden in 50 Jahren 5,585 und in 45 Jahren 4,702; 5,585 × 4,702 = 26,260; 26,260 × 100 = 2626 Gulden.

3) Welche Summe ist angelegt worden, wenn man für dieselbe, zu $3\frac{1}{2}$% Zins auf Zins, nach 36 Jahren $517\frac{1}{2}$ Thlr. ausgezahlt erhält?

$3\frac{1}{2}$% geben in 36 Jahren nach der Tabelle I. 3,450 Thlr.

517,50 Thlr. : 3,450 Thlr. = 150 Thlr. sind angelegt worden.

4) In wie vielen Jahren werden aus 540 Thlrn. zu 5% Zins auf Zins $2451\frac{3}{5}$ Thlr.

$2451\frac{3}{5}$ = 2451,60; 2451,60 : 540 = 4,540; 4,540 in der Tabelle I. unter der Rubrik 5% gesucht, giebt 31 Jahre.

5) Zu wieviel Procent müßten 650 Francs ausgeliehen worden sein, wenn sie in 30 Jahren Zins auf Zins $2434\frac{1}{4}$ Francs bringen sollten?

$2434\frac{1}{4}$ Frcs. = 2434,25 Frcs.; 2434,25 : 650 = 3,745; 3,745 in der Tabelle I. bei 30 Jahren aufgesucht, giebt $4\frac{1}{2}$%.

B. Die Zinseszins-Rechnung bei den Sparkassen.

§ 194.

Wer sich durch Sparsamkeit ein kleines Vermögen sammeln will, der zahlt jährlich eine kleine Summe bei der Sparkasse ein, wo das Geld, gewöhnlich zu $3\frac{1}{2}$ oder 4%, auf Zinseszinsen so lange stehen bleiben kann, bis es von dem Einzahler wieder verlangt wird.

Wird jährlich 1 Thlr. eingezahlt, so beträgt nach der Tabelle I. zu $3\frac{1}{2}$% der Zinseszins:

nach dem 1sten Jahre	1,035 Thlr.
nach dem 2ten Jahre:	
der zweite Thaler auf 1 Jahr . .	1,035 Thlr.
der erste Thaler auf 2 Jahre . .	1,071 „
zusammen	2,106 Thlr.
nach dem 3ten Jahre:	
der dritte Thaler auf 1 Jahr . .	1,035 Thlr.
der zweite Thaler auf 2 Jahre .	1,071 „
der erste Thaler auf 3 Jahre . .	1,109 „
zusammen	3,215 Thlr.

Man sieht hieraus, daß man nur der Reihefolge nach die Zahlen der Tabelle I., beim 2ten Jahre zu der 1sten Zahl der Tabelle, bei jedem folgenden Jahre zu der vorjährigen Summe zu addiren braucht, um die folgende Tabelle zu bilden.

Tabelle II.,

welche die Beträge angiebt, die bei 1 Thaler, Gulden, Franc u. s. w. jährlicher Einzahlung nach 1 bis 50 Jahren von den Sparkassen gezahlt werden.

Nach Jahren	zu 5 %	zu 4½ %	zu 4 %	zu 3½ %	Nach Jahren	zu 5 %	zu 4½ %	zu 4 %	zu 3½ %
1	1,050	1,045	1,040	1,035	26	53,706	49,711	46,128	42,759
2	2,153	2,137	2,122	2,106	27	57,441	52,993	49,015	45,291
3	3,311	3,278	3,247	3,215	28	61,363	56,423	52,017	47,911
4	4,527	4,470	4,417	4,362	29	65,481	60,007	55,139	50,623
5	5,804	5,717	5,634	5,550	30	69,805	63,752	53,386	53,429
6	7,145	7,019	6,900	6,779	31	74,345	67,666	61,763	56,335
7	8,553	8,380	8,217	8,052	32	79,112	71,756	65,275	59,341
8	10,031	9,802	9,587	9,368	33	84,117	76,030	68,927	62,453
9	11,583	11,288	11,012	10,731	34	89,372	80,497	72,725	65,674
10	13,213	12,841	12,494	12,142	35	94,890	85,164	76,675	69,008
11	14,925	14,464	14,035	13,602	36	100,684	90,041	80,783	72,458
12	16,723	16,160	15,638	15,113	37	106,768	95,138	85,055	76,029
13	18,611	17,932	17,305	16,677	38	113,156	100,464	89,498	79,725
14	20,593	19,784	19,039	18,296	39	119,863	106,030	94,119	83,550
15	22,674	21,719	20,842	19,971	40	126,905	111,847	98,925	87,510
16	24,859	23,742	22,717	21,705	41	134,299	117,925	103,923	91,607
17	27,153	25,855	24,667	23,500	42	142,063	124,276	109,121	95,849
18	29,562	28,064	26,695	25,357	43	150,215	130,914	114,527	100,238
19	32,001	30,371	28,804	27,280	44	158,775	137,850	120,149	104,782
20	34,746	32,783	30,997	29,269	45	167,763	145,098	125,996	109,484
21	37,534	35,303	33,278	31,329	46	177,200	152,673	132,077	114,351
22	40,461	37,937	35,650	33,460	47	187,109	160,588	138,401	119,388
23	43,534	40,689	38,117	35,667	48	197,513	168,859	144,978	124,602
24	46,761	43,565	40,683	37,950	49	208,437	177,503	151,818	129,998
25	50,149	46,571	43,352	40,313	50	219,907	186,536	158,932	135,583

Da diese Tabelle den Zinseszins für eine jährliche Einzahlung von 1 Thlr. u. s. w. angiebt, so hat man nur nöthig, die beabsichtigte Einzahlungssumme mit der betreffenden Zahl in der Tabelle zu multipliciren, um die Summe, welche nach bestimmten Jahren von der Sparkasse gezahlt wird, zu finden.

1) Jemand zahlt jährlich einen doppelten Friedrichsd'or oder $11\frac{1}{3}$ Thlr. bei einer Sparkasse, die zu $3\frac{1}{2}$% rechnet, ein; wieviel erhält er nach zwanzig Jahren zurück?

$3\frac{1}{2}$% in 20 Jahren giebt nach Tab. II. 29,269 Thlr.; $29{,}269 \times 11\frac{1}{3}$ $= 331{,}715$ Thlr. = 331 Thlr. 21 Sgr. 5 Pf.

2) Es giebt Jemand sein jährliches Weihnachtsgeld von $20\frac{2}{3}$ Gulden einer Sparkasse, die zu $4\frac{1}{2}$% rechnet; wieviel bekommt er nach 15 Jahren zurück?

$4\frac{1}{2}$% in 15 Jahren giebt nach Tab. II. 21,719 Gld.; $21{,}719 \times 20\frac{2}{3}$ $= 448{,}859 = 448$ Guld. 52 Kr.

3) Jemand will so viel in eine Sparkasse, die zu 4% rechnet, jährlich einzahlen, daß seine einjährige Tochter an ihrem 24sten Geburtstage 500 Thlr. ausgezahlt erhält; wieviel beträgt die jährliche Einzahlung?

23 Jahre zu 4% giebt nach Tab. II. 38,117 Thlr.

500 Thlr. : 38,117 = 13,118 Thlr. = 13 Thlr. 3 Sgr. 6 Pf.

4) Es will Jemand jährlich 20 Thlr. in eine Sparkasse zahlen, die zu $3^1/_2$% rechnet, und diese Einzahlung so lange fortsetzen, bis er 470 Thlr. ausgezahlt erhält; wie lange muß er die 20 Thlr. einzahlen?

Wenn 20 Thlr. 470 Thlr. geben sollen, so muß 1 Thlr. = 470 : 20 = $23^1/_2$ = 23,50 geben; zu 23,50 gehören nach der Tab. II. 17 Jahre.

5) Es hatte Jemand jährlich 40 Guld. in eine Sparkasse eingezahlt und bekam nach 24 Jahren 1742 Guld. 36 Kr. ausgezahlt; zu welchem Zinsfuß rechnete die Sparkasse?

1742 Guld. 36 Kr. = $1742^6/_{10}$ Guld. = 1742,6 Guld.

1742,6 : 40 = 43,565; 43,565 in der Tab. II. unter 24 Jahren aufgesucht, giebt $4^1/_2$%.

C. Die Zinseszins-Rechnung bei den Lebensversicherungs-Gesellschaften.

§ 195.

Die Lebensversicherungs-Gesellschaften zahlen gegen eine gewisse Einzahlung, Prämie genannt, die sich nach dem Lebensalter des Versicherten richtet, entweder nach Verlauf festgesetzter Jahre, oder nach dem Tode des Versicherten an die Erben eine bestimmte Summe, die von der Größe der Prämie abhängig ist. Die Prämie kann entweder eine einmalige oder eine jährliche sein, wodurch die folgenden beiden verschiedenen Rechnungsarten entstehen.

a) Lebensversicherung mit einmaliger Prämie.

§ 196.

Statt daß man bei der wirklichen Zinseszinsrechnung die Einzahlung oder das Capital bestimmt und fragt, welchen Werth es nach gewissen Jahren haben wird, bestimmt man hier umgekehrt die Summe, welche nach einer gewissen Reihe von Jahren oder nach dem Tode des Versicherten gezahlt werden soll, und fragt, welche Einzahlung ist dazu erforderlich? Man findet die Antwort eigentlich schon mittelst der Tab. I.; um jedoch die jedesmalige Division, die damit verbunden ist, zu vermeiden, kann man eine besondere Tabelle anfertigen, durch die das Rechnen erleichtert wird.

Nach Tab. I. giebt 1 Thlr. zu 5% Zins auf Zins nach einem Jahre 1,050 Thlr.; es ist die Frage, welche Einzahlung erforderlich, damit 1 Thlr. statt 1,050 Thlr. nach einem Jahre gezahlt wird?

1,050 Thlr. erfordert 1 Thlr.
1 " " ? " | $\frac{1 \cdot 1}{1,050} = \frac{1}{1,050} = 0,952$ Thlr.

Werden also 0,952 Thlr. eingezahlt, so geben diese nach einem Jahre 1 Thlr.

Nach dem 2ten Jahre giebt, laut Tab. I., 1 Thlr. Einzahlung 1,103 Thlr. Folglich:

1,103 Thlr. erfordern 1 Thlr. | $\frac{1 \cdot 1}{1{,}103} = \frac{1}{1{,}103} = 0{,}9066 = 0{,}907$ Thlr.
1 „ „ ? „

Werden also 0,907 Thlr. eingezahlt, so geben diese nach 2 Jahren 1 Thlr.

Nach dem 3ten Jahre giebt, laut Tab. I., 1 Thlr. Einzahlung 1,158 Thlr. Also:

1,158 Thlr. erfordern 1 Thlr. | $\frac{1 \cdot 1}{1{,}158} = \frac{1}{1{,}158} = 0{,}8635 = 0{,}864$ Thlr.
1 „ „ ? „

Werden daher 0,864 Thlr. eingezahlt, so geben diese nach 3 Jahren 1 Thlr.

Fährt man so fort, Einen Thaler durch die Zahlen der ersten Tabelle der Reihefolge nach zu dividiren, so entsteht die folgende Tabelle.

Tabelle III.,

welche die **einmalige** Prämie angiebt, um nach 1 bis 50 Jahren 1 Thaler, Gulden, Franc u. s. w. ausgezahlt zu erhalten.

Nach Jahren	zu 5 %	zu 4½ %	zu 4 %	zu 3½ %	Nach Jahren	zu 5 %	zu 4½ %	zu 4 %	zu 3½ %
1	0,952	0,957	0,962	0,966	26	0,281	0,318	0,360	0,409
2	0,907	0,916	0,924	0,934	27	0,268	0,305	0,346	0,395
3	0,864	0,876	0,889	0,902	28	0,255	0,292	0,333	0,382
4	0,822	0,839	0,855	0,871	29	0,243	0,279	0,320	0,369
5	0,783	0,802	0,822	0,842	30	0,231	0,267	0,308	0,356
6	0,746	0,768	0,790	0,814	31	0,220	0,256	0,296	0,344
7	0,710	0,735	0,759	0,786	32	0,210	0,244	0,285	0,333
8	0,677	0,703	0,729	0,759	33	0,200	0,234	0,274	0,321
9	0,644	0,673	0,702	0,734	34	0,190	0,224	0,263	0,310
10	0,613	0,644	0,675	0,709	35	0,181	0,214	0,253	0,300
11	0,584	0,616	0,649	0,685	36	0,173	0,205	0,243	0,290
12	0,556	0,590	0,624	0,662	37	0,164	0,196	0,234	0,280
13	0,530	0,564	0,600	0,639	38	0,157	0,188	0,225	0,271
14	0,505	0,540	0,577	0,618	39	0,149	0,180	0,216	0,261
15	0,481	0,517	0,555	0,597	40	0,142	0,172	0,208	0,253
16	0,458	0,494	0,533	0,577	41	0,135	0,165	0,200	0,244
17	0,436	0,473	0,513	0,557	42	0,129	0,157	0,192	0,236
18	0,415	0,453	0,493	0,538	43	0,123	0,151	0,185	0,228
19	0,395	0,433	0,474	0,520	44	0,117	0,144	0,178	0,220
20	0,377	0,415	0,456	0,503	45	0,111	0,138	0,171	0,213
21	0,359	0,397	0,438	0,486	46	0,106	0,132	0,164	0,205
22	0,342	0,380	0,422	0,469	47	0,101	0,126	0,158	0,199
23	0,325	0,363	0,405	0,453	48	0,096	0,121	0,152	0,192
24	0,310	0,348	0,390	0,438	49	0,092	0,116	0,146	0,185
25	0,295	0,333	0,375	0,423	50	0,087	0,111	0,141	0,179

Multiplicirt man nun mit der Summe, für die man die Prämie sucht, diejenige Zahl, die bei den angenommenen Jahren und dem bei der Lebensversicherungs-Gesellschaft gebräuchlichen Zinsfuß in der vorstehenden Tabelle steht, so hat man die Prämie für jene Summe.

Wenn die Prämie für eine Summe gesucht wird, die nach dem Tode des Versicherten zu zahlen ist, so hat die Lebensversicherungs-Gesellschaft die Anzahl Jahre, für die sie den Zins auf Zins zu berechnen hat, selbst zu bestimmen, und dies geschieht fast immer nach der folgenden, von Süßmilch und Baumann zusammengestellten Mortalitätstafel.

Mortalitätstafel.

J.	M. L.	J.	M. L.	J.	M. L.	J.	M. L.	J.	M. L.	J.	M. L.
0	28,5	17	37,2	34	26,1	51	16,4	68	8,8	85	4,3
1	36,8	18	36,5	35	25,5	52	15,9	69	8,4	86	4,1
2	40,7	19	35,7	36	24,9	53	15,5	70	8,1	87	3,7
3	42,5	20	35,0	37	24,3	54	15,0	71	7,8	88	3,4
4	43,4	21	34,4	38	23,8	55	14,5	72	7,5	89	3,1
5	43,3	22	33,7	39	23,2	56	14,0	73	7,3	90	3,0
6	43,2	23	33,1	40	22,6	57	13,5	74	7,0	91	2,5
7	43,0	24	32,4	41	22,0	58	13,0	75	6,8	92	2,0
8	42,8	25	31,8	42	21,5	59	12,6	76	6,5	93	1,5
9	42,4	26	31,1	43	20,9	60	12,1	77	6,2	94	1,0
10	41,9	27	30,5	44	20,3	61	11,6	78	5,9	95	0,5
11	41,3	28	29,8	45	19,7	62	11,1	79	5,7	96	
12	40,6	29	29,2	46	19,1	63	10,7	80	5,5		
13	40,0	30	28,6	47	18,6	64	10,2	81	5,3		
14	39,3	31	28,0	48	18,0	65	9,9	82	5,0		
15	38,6	32	27,3	49	17,5	66	9,5	83	4,8		
16	37,9	33	26,7	50	16,9	67	9,1	84	4,6		

Die mit J. bezeichnete Rubrik giebt die Jahre des Alters an, und die mit M. L. bezeichnete Rubrik die mittlere Lebensdauer, d. h. die Jahre, wie lange Jemand in dem daneben stehenden Alter noch zu leben hat. 0 Jahre heißt unter einem Jahre.

1) Wieviel beträgt die einmalige Prämie bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft, die zu $4\frac{1}{2}$% rechnet, um nach 25 Jahren 2500 Thlr. (Gulden, Francs) ausgezahlt zu erhalten?

Nach der Tabelle III. sind bei $4\frac{1}{2}$%, um nach 25 Jahren 1 Thlr. zu erhalten, 0,333 Thlr. Einzahlung erforderlich; für 2500 Thlr. also 2500 mal so viel, folglich $0,333 \times 2500 = 832\frac{1}{2}$ Thlr. (Gulden, Francs) beträgt die Prämie.

2) N., der 41 Jahre alt ist, will sich mit 2000 Thlrn. bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft, die zu 4% rechnet, einkaufen; wieviel muß er für die einmalige Prämie zahlen?

Da hier keine Zeit angegeben ist, wann die 2000 Thlr. gezahlt werden sollen, so ist die Zahlung nach dem Tode gemeint. Nach der Mortalitätstafel hat N. noch 22 Jahre zu leben, (siehe Rubrik M. L. bei 41 Jahren) und hiernach wird die Prämie bestimmt.

1 Thlr. nach Tabelle III. erfordert auf 22 Jahre zu 4 % 0,422 Thaler. Also:

0,422 × 2000 = 844 Thlr. beträgt die zu zahlende Prämie.

3) P., der 31 Jahre alt ist, hat sich bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft, die zu 5 % rechnet, eingekauft und für die einmalige Prämie 714 Gulden gezahlt; wie hoch hat er sich eingekauft?

Nach der Mortalitätstafel hat er noch 28 Jahre zu leben; 28 Jahre geben nach der Tabelle III. zu 5 % 0,255 Gulden.

714 : 0,255 = 2800 Gulden beträgt die Versicherungssumme.

4) R. kauft sich bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft, die zu $3^1/_2$ % rechnet, mit 3000 Thlrn. ein und zahlt für die einmalige Prämie 900 Thlr.; wie alt war R.?

900 : 3000 = 0,300 für 1 Thlr.; 0,300 in der Tab. III. unter Rubrik $3^1/_2$ % gesucht, giebt 35 Jahre; also ist R. 35 Jahre versichert, d. i. seine Lebensdauer; diese giebt nach der Mortalitätstafel ein Lebensalter von 20 Jahren. R. war folglich 20 Jahre alt.

5) S., der 31 Jahre alt ist, versichert sich bei einer Lebensversicherungs-Anstalt mit 4500 Guld. und zahlt eine einmalige Prämie von $1498^1/_2$ Guld.; zu welchem Zinsfuß rechnete die Anstalt?

31 Jahre giebt nach der Mortalitätstafel 28 Jahre Lebensdauer.

1498,50 : 4500 = 0,333; 0,333 bei 28 Jahren in Tabelle III. gesucht, giebt 4 %.

b) Lebensversicherung mit jährlicher Prämie.

§ 197.

Selten wird bei Lebensversicherungen eine einmalige Prämie gezahlt; die meisten sind jährlich zu zahlende Prämien. Obgleich sich diese durch die 2te Tabelle finden lassen, so kann man doch, des bequemeren Rechnens wegen, auch hiervon eine Tabelle anlegen, die in folgender Art gefertigt wird:

Statt daß in der 2ten Tabelle der Werth für eine jährliche Einzahlung von 1 Thlr. angenommen ist, und die dafür zu zahlende Versicherungssumme gesucht wird, wird hier umgekehrt für eine Versicherungssumme von 100 Thlrn. die Einzahlung (Prämie) gesucht. Nach Tabelle II. giebt, zu 5 % nach 1 Jahr, 1 Thlr. 1,050 Thlr.; also 1,050 Thlr. erfordern 1 Thlr., wieviel erfordern 100 Thlr.?

1,050 Thlr. erfordern 1 Thlr.
100 „ „ ? „

$$\frac{1 \,.\, 100}{1{,}050} = \frac{100}{1{,}050} = 95{,}238 \text{ Thlr.}$$

Nach dem 2ten Jahre giebt Tabelle II. für 1 Thlr. 2,153 Thlr., also:

2,153 Thlr. erfordern 1 Thlr.
100 „ „ ? „

$$\frac{1 \,.\, 100}{2{,}153} = \frac{100}{2{,}153} = 46{,}447 \text{ Thlr.}$$

Man sieht also, daß man nur nöthig hat, 100 Thlr. durch die Zahlen der 2ten Tabelle der Reihe nach zu dividiren, um die folgende Tabelle zu erhalten.

Tabelle IV.,

welche die jährlich zu zahlende Prämie angiebt, um nach **1** bis **50** Jahren 100 Thaler, Gulden, Francs u. s. w. ausgezahlt zu erhalten.

In Jahren	zu 3½ %	zu 4 %	zu 4½ %	zu 5 %	In Jahren	zu 3½ %	zu 4 %	zu 4½ %	zu 5 %
1	96,618	96,154	95,692	95,238	26	2,338	2,168	2,012	1,862
2	47,483	47,125	46,790	46,447	27	2,207	2,040	1,887	1,741
3	31,104	30,798	30,506	30,202	28	2,087	1,922	1,772	1,630
4	22,925	22,640	22,371	22,090	29	1,975	1,814	1,666	1,527
5	18,018	17,749	17,492	17,229	30	1,871	1,713	1,569	1,433
6	14,751	14,493	14,247	13,996	31	1,775	1,619	1,478	1,345
7	12,419	12,170	11,933	11,692	32	1,685	1,532	1,394	1,264
8	10,674	10,431	10,202	9,969	33	1,601	1,451	1,315	1,189
9	9,318	9,081	8,859	8,633	34	1,522	1,375	1,242	1,119
10	8,235	8,004	7,788	7,568	35	1,449	1,304	1,174	1,054
11	7,352	7,125	6,914	6,700	36	1,380	1,238	1,111	0,993
12	6,617	6,395	6,188	5,980	37	1,315	1,176	1,051	0,937
13	5,935	5,779	5,577	5,373	38	1,254	1,117	0,995	0,884
14	5,456	5,252	5,055	4,856	39	1,196	1,062	0,943	0,834
15	5,007	4,798	4,604	4,410	40	1,142	1,011	0,894	0,787
16	4,607	4,402	4,212	4,023	41	1,091	0,962	0,848	0,745
17	4,255	4,054	3,868	3,683	42	1,043	0,916	0,805	0,704
18	3,944	3,746	3,563	3,383	43	0,997	0,873	0,763	0,666
19	3,665	3,472	3,293	3,116	44	0,954	0,832	0,726	0,630
20	3,416	3,226	3,050	2,876	45	0,913	0,794	0,689	0,597
21	3,191	3,005	2,833	2,664	46	0,875	0,757	0,655	0,564
22	2,988	2,805	2,636	2,472	47	0,838	0,723	0,623	0,534
23	2,803	2,624	2,458	2,297	48	0,803	0,690	0,592	0,506
24	2,635	2,458	2,295	2,139	49	0,769	0,659	0,563	0,480
25	2,480	2,307	2,147	1,994	50	0,738	0,629	0,536	0,455

Multiplicirt man nun mit der Zahl, welche die vollen Hunderte der Versicherungssumme angiebt, die betreffende Zahl in der Tabelle, so erhält man die zu zahlende jährliche Prämie. D. h. soll für 800 Thlr. Versicherungssumme die Prämie gesucht werden, so multiplicirt man mit 8; soll jedoch die Versicherungssumme nicht volle Hunderte betragen, etwa nur 720 Thlr., so wird 20 als Decimalbruch gesetzt, also mit 7,20 multiplicirt.

1) Wieviel beträgt die jährliche Prämie bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft die zu 4 % rechnet, um nach 27 Jahren 2550 Thlr. ausgezahlt zu erhalten? (2550 = 25½ Hundert = 25,50.)

27 Jahre geben nach Tab. IV. bei 4 % 2,040 Thlr.

2,040 Thlr. × 25,50 = 52,02 Thlr. = 52 Thlr. 7 Pf.

2) N. ist 32 Jahre alt und will sich mit 3450 Thlrn. bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft einkaufen, die zu 4½ % rechnet; wieviel muß er jährlich an Prämie zahlen?

Nach der Mortalitätstafel (§ 196) geben 32 Lebensjahre 27,3 oder, wie gerechnet wird, 27 Jahre Lebensdauer. Nach Tab. IV. geben 27 Jahre bei $4^1/_2$% 1,887 Thlr.; also:

1,887 Thlr. × 34,50 = 65,10 Thlr. = 65 Thlr. 3 Sgr.

3) P., welcher 26 Jahre alt ist, hat sich bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft, die zu $3^1/_2$% rechnet, eingekauft und zahlt jährlich 49 Guld. 42 Kr. Prämie; wie hoch hat er sich eingekauft?

Nach der Mortalitätstafel geben 26 Lebensjahre 31,1 oder 31 Jahre Lebensdauer; 31 Jahre geben nach der Tab. IV. bei $3^1/_2$% 1,775 Gulden.

49 Gulden 42 Kreuzer = 49,70 Gulden; 49,70 Gulden : 1,775 = 28 oder 2800 Gulden Versicherungssumme.

4) R. kauft sich bei einer Lebensversicherungs-Anstalt, die zu 5% rechnet, mit 5000 Thlrn. ein und zahlt 123 Thlr. 18 Sgr. jährliche Prämie; wie alt ist R.?

123 Thlr. 18 Sgr. = 123,60 Thlr.; 123,60 dividirt durch 50 Hundert Thaler, giebt 123,60 : 50 = 2,472; 2,472 bei 5% in Tab. IV. gesucht, giebt 22 Jahre; 22 Jahre Lebensdauer in der Mortalitätstabelle gesucht, geben 41. R. war also 41 Jahre alt.

5) S., welcher 54 Jahre alt ist, hat sich bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft mit 3500 Gulden eingekauft und zahlt jährlich eine Prämie von 161 Guld. 14 Neukr.; nach welchem Zinsfuß rechnete die Anstalt?

54 Jahre geben in der Mortalitätstafel 15 Jahre Lebensdauer; 161 Guld. 14 Neukr. = 161,14 Guld.; 161,14 Guld. dividirt durch 35 Hundert Gulden, ist 161,14 : 35 = 4,604; 4,604 bei 15 Jahren in der Tab. IV. aufgesucht, giebt $4^1/_2$%.

D. Die Zinseszins-Rechnung bei den Rentenbanken.

§ 198.

Wer eine Besitzung, eine Fabrik oder irgend ein Geschäft zu Gunsten eines Andern abtreten, sich aber so viel sichern will, daß er zeitlebens sein Auskommen hat, zahlt ein gewisses Capital an eine Rentenbank und erhält nun jährlich von dieser eine Summe, die man Rente oder Jahresrente nennt, wenn sie sich auf gewisse Jahre erstreckt, Leibrente, wenn sie für die ganze Lebensdauer ist. Auch Derjenige, der nicht so viel Vermögen besitzt, um von den Zinsen desselben leben zu können, kauft sich bei einer Rentenbank ein und bezieht dann eine Jahres- oder Leibrente, welche mehr als seine Zinsen beträgt. Ebenso kann für einen Andern eine Rente auf gewisse Zeit gekauft werden.

Es ist nun die Frage, wieviel Capital bei einer Rentenbank eingezahlt werden muß, um eine gewisse Anzahl Jahre hindurch eine gewünschte Summe jährlich ausgezahlt zu erhalten.

Um nach dem 1sten Jahre 1 Thlr. zu erhalten, muß man nach der Tab. III. bei 5% 0,952 Thlr. einzahlen.

Nach dem 2ten Jahre, um 2 Jahre hinter einander 1 Thlr. zu erhalten, muß man nach derselben Tabelle zahlen:

für das 1ste Jahr		0,952	Thlr.
2te	„	0,907	„
zusammen		1,859	Thlr.

Nach dem 3ten Jahre, um 3 Jahre hinter einander 1 Thlr. zu erhalten, muß man zahlen:

für das 1ste Jahr		0,952	Thlr.	} 1,859 Thlr.
2te	„	0,907	„	
3te	„	0,864	„	
zusammen		2,723	Thlr.	

Man sieht also, daß wenn man aus der Tab. III. zuerst die Zahlen des 1sten und 2ten Jahres, dann der Reihe nach jede folgende Zahl der Tabelle zu der Summe des vorhergehenden Jahres addirt, die folgende Tabelle entsteht.

Tabelle V.,

welche angiebt, wieviel für 1 Thaler (Gulden, Franc u. s. w.) Rente, auf 1 bis 50 Jahre zahlbar, sogleich einzuzahlen ist.

Jahre	zu 5 %	zu 4½ %	zu 4 %	zu 3½ %	Jahre	zu 5 %	zu 4½ %	zu 4 %	zu 3½ %
1	0,952	0,957	0,962	0,966	26	14,367	15,147	15,971	16,890
2	1,859	1,873	1,886	1,900	27	14,635	15,451	16,317	17,285
3	2,723	2,749	2,775	2,802	28	14,890	15,743	16,650	17,667
4	3,545	3,588	3,630	3,673	29	15,133	16,022	16,970	18,036
5	4,328	4,390	4,452	4,515	30	15,364	16,289	17,278	18,392
6	5,074	5,158	5,242	5,329	31	15,584	16,544	17,574	18,736
7	5,784	5,893	6,001	6,115	32	15,794	16,789	17,859	19,069
8	6,461	6,596	6,730	6,874	33	15,994	17,023	18,133	19,390
9	7,105	7,269	7,432	7,608	34	16,184	17,247	18,396	19,701
10	7,718	7,913	8,107	8,317	35	16,365	17,461	18,649	20,001
11	8,302	8,529	8,756	9,002	36	16,538	17,666	18,892	20,290
12	8,858	9,119	9,380	9,662	37	16,702	17,862	19,126	20,571
13	9,388	9,683	9,980	10,303	38	16,859	18,050	19,351	20,841
14	9,893	10,223	10,557	10,921	39	17,008	18,230	19,567	21,102
15	10,374	10,740	11,112	11,517	40	17,150	18,402	19,775	21,355
16	10,832	11,234	11,645	12,094	41	17,285	18,566	19,975	21,599
17	11,268	11,707	12,158	12,651	42	17,414	18,724	20,167	21,835
18	11,683	12,160	12,651	13,190	43	17,537	18,874	20,352	22,063
19	12,078	12,593	13,125	13,710	44	17,654	19,018	20,530	22,283
20	12,455	13,008	13,581	14,212	45	17,765	19,156	20,701	22,495
21	12,814	13,405	14,019	14,698	46	17,871	19,288	20,865	22,701
22	13,156	13,784	14,441	15,167	47	17,972	19,415	21,023	22,899
23	13,481	14,148	14,846	15,620	48	18,068	19,536	21,175	23,091
24	13,791	14,495	15,236	16,058	49	18,160	19,651	21,321	23,277
25	14,086	14,828	15,611	16,481	50	18,247	19,762	21,462	23,456

Wenn für 1 Thlr. Rente die einzuzahlende Summe bekannt ist, so ist sie für 50 Thlr. Rente 50 mal, für 100 Thlr. Rente 100 mal so groß u. s. w.

1) Der Onkel eines jungen Mannes will ein Capital hergeben, durch das der Letztere 16 Jahre lang jährlich 500 Thlr. Renten beziehen kann; wieviel muß der Onkel zahlen, wenn die Rentenbank zu $4^1/_2$ % rechnet?

Nach der Tabelle V. giebt 1 Thlr. zu $4^1/_2$ % auf 16 Jahre 11,234 Thlr.

11,234 Thlr. $\times$ 500 = 5617 Thlr. muß der Onkel einzahlen.

2) Der Besitzer einer Fabrik will dieselbe seinem Sohne übergeben, allein daraus so viel Capital entnehmen, daß er zeitlebens eine Leibrente von 1000 Thlrn. hat. Er ist 58 Jahre alt; wieviel muß er demnach bei einer Rentenbank, die zu 4 % rechnet, einzahlen?

Nach der Mortalitätstafel geben 58 Lebensjahre 13 Jahre Lebensdauer; 13 Jahre zu 4 % geben nach der Tabelle V. 9,980 Thlr.

9,980 Thlr. $\times$ 1000 = 9980 Thlr sind einzuzahlen.

3) N. will bei einer Rentenbank, die zu 5 % rechnet, 10000 südd. Gulden einzahlen; wie groß wird die Leibrente sein, wenn er 48 Jahre alt ist?

48 Jahre geben nach der Mortalitätstafel 18 Jahre Lebensdauer; 18 Jahre zu 5 % in der Tabelle V. geben 11,683 Gulden.

10000 Guld. : 11,683 = 855,94 Guld. beträgt die Leibrente.

4) Wie lange wird Jemand eine jährliche Rente von 600 Thlrn. beziehen können, wenn er 8000 Thlr. einzahlt und die Rentenbank zu $3^1/_2$ % rechnet?

8000 : 600 = 13,333. In der Tabelle V. geben 13,190 18 Jahre und 13,710 19 Jahre; also die Differenz von 13,710 — 13,190 = 0,520 giebt 12 Monate; 13,333 — 13,190 = 0,143, folglich:

0,520 geben 12 Monate 0,143 „ ? „	$\frac{12 \,.\, 143}{520} = \frac{429}{130} = 3^{39}/_{130}$ Mon. = 3 Mon. 9 Tg.

Die Rente von 600 Thlrn. kann also 18 Jahre 3 Monate 9 Tage bezogen werden.

5) Es hat Jemand an eine Rentenbank für eine Rente von 500 Thlrn. auf 16 Jahre 5617 Thlr. zahlen müssen; zu wieviel Procent rechnete die Rentenbank?

5617 : 500 = 11,234; 11,234 bei 16 Jahren in der Tabelle V. aufgesucht, giebt $4^1/_2$ %.

E. Die Zinseszins-Rechnung bei Theilzahlungen.

§ 199.

Wenn Jemand 800 Thlr. in 4 Jahren à 200 Thlr. zurückzahlen soll, so geschieht dies gewöhnlich in der Art, daß er nach dem 1sten Jahre 200 Thlr. Capital und 40 Thlr. Zinsen (zu 5 %), nach dem 2ten Jahre 200 Thlr. Capital und 30 Thlr. Zinsen, nach dem 3ten Jahre 200 Thlr. Capital und 20 Thlr. Zinsen und nach dem 4ten Jahre den Rest mit 10 Thlrn. Zinsen, im Ganzen also nach 4 Jahren 800 Thlr. Capital und 100 Thlr. Zinsen zahlt. Wenn aber der Debitor (Schuldner) wünscht, in jedem Jahre eine ganz gleiche Summe zu zahlen, und wollte nun die 100 Thlr. Zinsen in 4 gleiche Theile à 25 Thlr., also jährlich 225 Thlr. zahlen, wodurch er nach 4 Jahren auch 900 Thlr. zahlt, so würde dadurch der Creditor (Gläubiger) in Nachtheil kommen, denn er verlöre im 1sten Jahre die Zinsen von $4 \times 15 = 60$ Thlr., im 2ten Jahre von $3 \times 5 = 15$ Thlr. u. s. w., was bei großen Capitalien bedeutend genug wird, um darauf nicht eingehen zu können. Die nachfolgende Tabelle giebt nun an, welche Zahlung, wenn sie in jedem Jahre gleich groß sein soll, zu machen ist, um ein Capital in gewissen Jahren abzutragen, ohne daß Schuldner und Gläubiger einen Nachtheil an Zinsen erleiden. Die Anfertigung dieser Tabelle geschieht in folgender Art:

Nach Tabelle V. geben (zu 5 %) 0,952 Thlr. eingezahlt, nach einem Jahre 1 Thlr.; 1,859 Thlr. eingezahlt, geben 2 Jahre hinter einander jedesmal 1 Thlr.; 2,723 Thlr. eingezahlt, geben 3 Jahre hinter einander jedesmal 1 Thlr. u. s. w. Dies auf 100 berechnet, giebt:

0,952 Thlr. erfordern 1 Thlr.
100 " " ? " | $\frac{1 . 100}{0,952} = \frac{100}{0,952} = 105,042$ Thlr. nach einem Jahre,

1,859 Thlr. erfordern 1 Thlr.
100 " " ? " | $\frac{1 . 100}{1,859} = \frac{100}{1,859} = 53,792$ Thlr. nach zwei Jahren,

2,723 Thlr. erfordern 1 Thlr.
100 " " ? " | $\frac{1 . 100}{2,723} = \frac{100}{2,723} = 36,724$ Thlr. nach drei Jahren.

d. h. wenn 100 Thlr. zu 5 % in 3 Jahren mit einer gleich großen Summe jährlich abbezahlt werden sollen, so beträgt diese 36,724 Thlr. oder 36 Thlr. 21 Sgr. 9 Pf.; sollen 100 Thlr. in 2 Jahren mit einer gleich großen Summe abbezahlt werden, so beträgt diese 52,792 Thlr. u. s. w.

Um daher die Tabelle für 100 Thlr. von 1 bis 50 Jahren anzufertigen, hat man, wie aus dem Vorstehenden ersichtlich ist, nur nöthig, 100 Thlr. durch die Zahlen der Tabelle V. der Reihe nach zu dividiren.

Tabelle VI.,

welche angiebt, wie groß die jährliche gleiche Theilzahlung sein muß, wenn 100 Thlr. in 1 bis 50 Jahren bezahlt sein sollen.

In Jahren	zu 3½ %	zu 4 %	zu 4½ %	zu 5 %	In Jahren	zu 3½ %	zu 4 %	zu 4½ %	zu 5 %
1	103,519	103,950	104,493	105,042	26	5,920	6,261	6,602	6,960
2	52,632	53,022	53,390	53,792	27	5,785	6,129	6,472	6,833
3	35,689	36,036	36,377	36,724	28	5,660	6,006	6,352	6,716
4	27,225	27,548	27,871	28,209	29	5,544	5,893	6,241	6,608
5	22,128	22,462	22,779	23,105	30	5,437	5,788	6,139	6,508
6	18,765	19,077	19,387	19,708	31	5,337	5,690	6,044	6,416
7	16,353	16,664	16,969	17,289	32	5,244	5,599	5,956	6,331
8	14,547	14,859	15,162	15,477	33	5,157	5,515	5,874	6,252
9	13,144	13,455	13,757	14,074	34	5,075	5,436	5,798	6,178
10	13,024	12,335	12,637	12,956	35	5,000	5,362	5,727	6,110
11	11,109	11,420	11,725	12,045	36	4,928	5,293	5,661	6,046
12	10,348	10,661	10,966	11,290	37	4,861	5,228	5,598	5,987
13	9,705	10,020	10,327	10,653	38	4,798	5,168	5,540	5,930
14	9,156	9,472	9,782	10,108	39	4,738	5,111	5,485	5,879
15	8,682	8,999	9,311	9,640	40	4,682	5,057	5,434	5,830
16	8,268	8,587	8,902	9,232	41	4,629	5,006	5,386	5,785
17	7,904	8,225	8,542	8,874	42	4,579	4,959	5,340	5,742
18	7,581	7,905	8,224	8,559	43	4,532	4,914	5,297	5,702
19	7,293	7,611	7,941	8,279	44	4,487	4,871	5,258	5,664
20	7,036	7,363	7,688	8,028	45	4,445	4,831	5,220	5,629
21	6,804	7,133	7,460	7,804	46	4,405	4,793	5,184	5,595
22	6,593	6,925	7,255	7,601	47	4,367	4,757	5,150	5,564
23	6,402	6,736	7,068	7,417	48	4,331	4,723	5,118	5,535
24	6,227	6,563	6,899	7,250	49	4,296	4,690	5,089	5,506
25	6,069	6,405	6,744	7,099	50	4,263	4,659	5,060	5,480

Was für 1 Hundert Thaler gilt, das gilt auch für 4,80 Hundert Thaler (480 Thlr.) und für 3,75 Hundert Thaler (375 Thlr.) u. s. w.

1) 1200 Thlr. à 5 % sollen in 6 Jahren bezahlt werden; wie groß ist die jährliche gleiche Theilzahlung?

100 Thlr. geben, in 6 Jahren abbezahlt, nach der Tabelle VI. jährlich 19,708 Thlr. also 1200 geben 19,708 × 12 = 236,496 Thlr. = 236 Thlr. 14 Sgr. 11 Pf.

Mit der jährlich zu zahlenden gleichen Summe von 236 Thlrn. 14 Sgr. 11 Pf. oder 236½ Thlr. werden die 1200 Thlr. incl. Zinsen in 6 Jahren bezahlt sein, ohne daß der Gläubiger oder Schuldner einen Nachtheil an Zinsen hat.

2) 48000 Gulden sollen in 12 Jahren à 4½ % abbezahlt werden; wie groß ist die jährliche gleiche Theilzahlung?

100 Guld. geben nach der Tab. VI. in 12 Jahren zu 4½ % 10,966 Guld., 48000 Guld. also 10,966 × 480 = 5263,680 Guld. = 5263 Guld. 41 Kr.

3) Es hat Jemand 12 Jahre hinter einander jährlich eine Theilzahlung von 1705 Francs 76 Centimes zu entrichten; wie groß ist das abzutragende Capital bei 4 % Zinsfuß?

4 % in 12 Jahren geben für 100 Thlr. nach Tabelle VI. 10,661

Da nun 1705 Francs 76 Centimes entstanden sind aus dem Capital mal 10,661, so findet man das Capital, wenn 1705,76 durch 10,661 dividirt wird, also:

1705,76 : 10,661 = 160 = 160 Hundert = 16000 Francs.

4) Ein Capital von 38000 Thlrn. wird zu $3^1/_2$ % mit einer jährlichen Theilzahlung von 1900 Thlrn. abbezahlt; wie viele Jahre dauert die Abzahlung?

1900 Thlr. sind entstanden, indem 380 mit der Zahl, die für 100 Thlr. zu zahlen ist, multiplicirt wurde; dividirt man daher 1900 durch 380, so erhält man diese Zahl; also 1900 : 380 = 5. Diese Zahl (5) bei $3^1/_2$ % in der Tabelle VI. gesucht, giebt 35 Jahre. In 35 Jahren mit jährlich 1900 Thlrn. sind also die 38000 Thlr. incl. Zinsen abbezahlt.

5) Ein Capital von 55000 Thlrn. wird mit 4896 Thlrn. 3 Sgr. jährlicher Theilzahlung in 16 Jahren abbezahlt; zu wieviel Procent ist es verzinst?

4896 Thlr. 3 Sgr. = 4896,10 Thlr.; 4896,10 Thlr. : 550 = 8,902,

8,902 bei 16 Jahren in der Tabelle VI. gesucht, giebt $4^1/_2$ %.

XX. Die Gleichungen und ihre Anwendung.

§ 200.

Die algebraischen Gleichungen in ihrem ganzen Umfange können selbstredend hier keinen Platz finden, weil die Buchstabenrechnung vorangehen müßte, deren Aufnahme nicht zu dem Zwecke dieses Buches gehört, welches nur die Ziffernrechnung (Rechnen mit Ziffern) umfassen soll. Es sind aber die Gleichungen des ersten Grades mit einer oder zwei unbekannten Größen, die ohne Buchstabenrechnung gelehrt werden können, von entschiedenem Nutzen für jeden Rechner, denn sie zeigen nicht allein, wie die Zahlenwerthe einer oder zweier unbekannten Größen, die in einer Aufgabe vorkommen, auf leichte Art entwickelt werden, sondern geben auch dem Rechner ein Mittel an die Hand, fast in jeder Rechnungsart, bei etwas complicirten oder nicht gleich klar erscheinenden Aufgaben, sogleich einen Ansatz bilden und aus diesem sofort beurtheilen zu können, ob die Aufgabe dem eingeschlagenen Wege nach gelöst werden kann. Gewöhnlich führt diese Rechnungsart auch weit kürzer zum Ziele als alle anderen Verfahrungsarten.

Es sind nun im Folgenden zuerst einige, sehr leicht begreifliche, allgemeine Sätze zusammengestellt, welche die Grundlage der Gleichungen bilden. Wer sich diese Sätze gut merkt, dem wird auch das Rechnen mit Gleichungen keinerlei Schwierigkeit bereiten.

A. Allgemeine Sätze als Grundlage der Gleichungen.

§ 201.

Haben zwei Zahlenwerthe gleich viele Einheiten, so sagt man, sie sind *gleich*.

$8 + 4$, $17 - 5$, 6×2, $48 : 4$ sind gleiche Zahlenwerthe, weil jeder Ausdruck 12 giebt, also 12 Einheiten enthält.

Die Gleichstellung zweier gleichen Zahlenwerthe durch das Gleichheitszeichen heißt eine *Gleichung*. $8 + 4 = 20 - 8$.

Der Zahlenwerth links vom Gleichheitszeichen heißt die *linke Seite*, der Zahlenwerth rechts die *rechte Seite* der Gleichung. Die einzelnen, durch plus oder minus verbundenen Zahlen werden die Glieder der Gleichung genannt.

§ 202.

1) Gleiches zu Gleichem giebt Gleiches, oder man kann zu beiden Seiten der Gleichung eine gleiche Zahl *addiren*, ohne daß die Gleichung gestört wird.

$$8 + 4 = 20 - 8;$$

auf beiden Seiten 5 addirt, giebt:

$$8 + 4 + 5 = 20 - 8 + 5$$
$$17 = 17.$$

2) Gleiches von Gleichem läßt Gleiches, oder man kann von beiden Seiten der Gleichung eine gleiche Zahl subtrahiren, ohne daß die Gleichung gestört wird.

$$9 + 5 = 10 + 4;$$

auf beiden Seiten 8 subtrahirt, giebt:

$$9 + 5 - 8 = 10 + 4 - 8$$
$$6 = 6.$$

3) Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches, oder die Gleichung wird nicht gestört, wenn man jede *ganze* Seite derselben mit einer und derselben Zahl multiplicirt.

$$7 + 5 = 20 - 8;$$

auf beiden Seiten mit 4 multiplicirt, giebt:

$$4\,(7 + 5) = (20 - 8)\,4.$$

Die in dem letzten Ansatz angedeutete Multiplication kann in zweierlei Weise ausgeführt werden:

entweder man zieht die Zahlen in der Klammer zusammen und multiplicirt die dadurch entstandene Summe oder Differenz,

$$4 \times 12 = 12 \times 4$$
$$48 = 48$$

oder man multiplicirt jede einzelne Zahl in der Klammer und zieht nachher die Produkte zusammen.

$$(4 \times 7) + (4 \times 5) = (4 \times 20) - (4 \times 8)$$
$$28 + 20 = 80 - 32$$
$$48 = 48$$

4) Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches, oder die Gleichung wird nicht gestört, wenn man jede *ganze* Seite derselben durch eine und dieselbe Zahl dividirt.

$$16 + 8 = 40 - 16$$

beide Seiten durch 4 dividirt, giebt:

$$\frac{16 + 8}{4} = \frac{40 - 16}{4}$$

Die in dem letzten Ansatz angedeutete Division läßt sich in zweierlei Art ausführen:

man zieht entweder die Zahlen im Zähler zusammen und dividirt die dadurch entstandene Summe oder Differenz,

$$\frac{24}{4} = \frac{24}{4}$$
$$6 = 6$$

oder man dividirt jede Zahl im Zähler durch den Nenner und zieht hierauf die Quotienten zusammen.

$$\frac{16}{4} + \frac{8}{4} = \frac{40}{4} - \frac{16}{4}$$
$$4 + 2 = 10 - 4$$
$$6 = 6$$

§ 203.

Zahlen, die das plus-Zeichen vor sich haben, werden **additive** (positive) Zahlen, die das minus-Zeichen vor sich haben, **subtractive** (negative) Zahlen genannt. Beim Anfang eines Ausdrucks läßt man das Zeichen, wenn es plus ist, fort, daher jede Zahl ohne Vorzeichen als eine additive angesehen wird.

Zwei gleiche additive und subtractive Zahlen zusammengezogen (addirt), geben Null. $4 - 4 = 0; \; -4 + 4 = 0.$

Sind mehrere additive und subtractive Zahlen zusammen zu ziehen, so addirt man jede Art zusammen und zieht die kleinere Summe von der größeren ab; der Rest erhält dann das Vorzeichen der größeren Summe.

$$15 - 8 + 9 - 4 + 3$$
$$\text{giebt} \begin{cases} 15 + 9 + 3 = +27 \\ \quad\; -8 - 4 = -12 \end{cases}$$
$$\text{bleiben } +15$$

$$26 - 14 + 24 - 36 + 8 - 16$$
$$\text{giebt} \begin{cases} 26 + 24 + 8 = +58 \\ -14 - 36 - 16 = -66 \end{cases}$$
$$\text{bleiben } -8$$

§ 204.

1) Zahlen, die auf der einen Seite der Gleichung **additiv** sind, werden, wenn man sie auf die andere Seite bringt, **subtractiv**.

(+ 4 auf der linken Seite ist also durch diese Operation verschwunden, und auf der rechten Seite zu — 4 geworden.)

$$12 + 4 = 16;$$
4 auf beiden Seiten subtrahirt, giebt:
$$12 + 4 - 4 = 16 - 4$$
$$12 + 0 = 16 - 4 \text{ (§ 203.)}$$
$$12 = 16 - 4$$

2) Zahlen, die auf der einen Seite der Gleichung **subtractiv** sind, werden **additiv**, wenn man sie auf die andere Seite bringt.

(— 5 auf der linken Seite ist + 5 auf der rechten Seite geworden.)

$$12 - 5 = 7;$$
5 auf beiden Seiten addirt, giebt:
$$12 - 5 + 5 = 7 + 5$$
$$12 + 0 = 7 + 5 \text{ (§ 203.)}$$
$$12 = 7 + 5$$

3) Zahlen, welche die eine ganze Seite der Gleichung multipliciren, dividiren die ganze andere Seite, wenn sie auf diese Seite gebracht werden.

(5 als Multiplicator der linken Seite ist Divisor der rechten Seite geworden.)

$$5\,(4+6) = 50;$$

beide Seiten durch 5 dividirt, giebt:

$$\frac{5\,(4+6)}{5} = \frac{50}{5}$$

$$1\,(4+6) = \frac{50}{5}$$

$$4+6 = \frac{50}{5}$$

4) Zahlen, welche die eine ganze Seite der Gleichung dividiren, multipliciren die ganze andere Seite, wenn sie auf diese Seite gebracht werden.

(8 als Divisor der linken Seite ist Multiplicator der rechten Seite geworden.)

$$\frac{18+14}{8} = 3+1;$$

beide Seiten mit 8 multiplicirt, giebt:

$$\frac{8\,(18+14)}{8} = (3+1)\,8$$

$$1\,(18+14) = 24+8$$

$$18+14 = 24+8$$

§ 205.

1) Wenn die Gleichung einen Bruch enthält, so wird dieser fortgeschafft, indem man jeden Theil der Gleichung (jedes Glied) mit dem Nenner des Bruches multiplicirt.

$$\tfrac{8}{4} + 6 - 3 = 4 + 7 - 6$$

mit 4 jedes Glied multiplicirt, giebt nach § 202. 3.

$$8 + 24 - 12 = 16 + 28 - 24$$
$$20 = 20.$$

2) Wenn die Gleichung mehrere Brüche enthält, so werden diese entweder wie vorhin nach einander fortgeschafft, oder man multiplicirt die ganze Gleichung mit einer Zahl, in der die Nenner aufgehen. Lassen sich die Brüche addiren, so kann auch dies geschehen.

$$\tfrac{18}{3} + \tfrac{16}{4} - 3 = 5 + 6 - 4$$

mit 3 jedes Glied multiplicirt:

$$18 + \tfrac{48}{4} - 9 = 15 + 18 - 12$$

mit 4 jedes Glied multiplicirt:

$$72 + 48 - 36 = 60 + 72 - 48$$

mit 12 die erste Gleichung multiplicirt, giebt:

$$72 + 48 - 36 = 60 + 72 - 48$$
$$84 = 84.$$

3) Ist ein Nenner ein Mehrfaches eines kleineren Nenners, so wird mit dem größeren Nenner zuerst multiplicirt, wodurch der andere Nenner fortfällt.

$$6 + \tfrac{12}{4} - 4 = 4 + \tfrac{16}{8} - 1$$

mit 8 jedes Glied multiplicirt:

$$48 + 24 - 32 = 32 + 16 - 8$$
$$40 = 40.$$

4) Läßt sich jedes Glied der Gleichung durch eine und dieselbe Zahl dividiren, so kann dadurch die Gleichung in kleineren Zahlen dargestellt werden.

$$12 + 15 - 9 + 18 = 24 - 21 + 33$$

die ganze Gleichung durch 3 dividirt, giebt:

$$4 + 5 - 3 + 6 = 8 - 7 + 11$$
$$12 = 12.$$

§ 206.

Wenn in der Gleichung eine unbekannte Zahl, die durch x ausgedrückt wird, vorkommt, so wird sie wie jede andere bekannte Zahl nach § 202 bis 205 behandelt. Um ihren Werth zu finden, muß man so operiren, daß sie auf die linke Seite der Gleichung allein zu stehen kommt; alle bekannten Größen müssen nach der rechten Seite gebracht werden. Kommen mehrere x vor, so müssen sie zusammengezogen, und wenn sie additiv und subtractiv sind, ausgeglichen werden, so daß immer nur ein x auf der linken Seite bleibt.

1) $x - 7 - 5 = 8 + 9 - 3$
$x = 8 + 9 - 3 + 7 + 5$ (§ 204. 2.)
$x = 29 - 3$ (§ 203.)
$x = 26.$

2) $x + 7 + 3 = 24 - 6$
$x = 24 - 6 - 7 - 3$ (§ 204. 1.)
$x = 24 - 16$ (§ 203.)
$x = 8$

3) $8x - 9 + 7 = 14$
$8x = 14 + 9 - 7$ (§ 204. 1. u. 2.)
$8x = 16$ (§ 203.)
$x = \frac{16}{8} = 2$ (§ 204. 3.)

4) $\frac{x}{6} + 4 - 7 = 21$
$\frac{x}{6} = 21 - 4 + 7$ (§ 204. 1. u. 2.)
$\frac{x}{6} = 24$ (§ 203.)
$x = 24 . 6 = 144$ (§ 204. 4.)

5) $\frac{8}{x} + 9 = 7 + 6$
$\frac{8}{x} = 7 + 6 - 9$ (§ 204. 2.)
$\frac{8}{x} = 4$ (§ 203.)
$8 = 4x$ (§ 204. 4.)
$4x = 8$
$x = \frac{8}{4} = 2$ (§ 204. 3.)

6) $\frac{5 + 4}{x} = 8 - 15 + 10$
$\frac{5 + 4}{x} = 3$ (§ 203.)
$5 + 4 = 3x$ (§ 204. 4.)
$9 = 3x$
$3x = 9$
$x = \frac{9}{3} = 3$ (§ 204. 3.

7) $2x + 5 - 8 = 9 - x - 3$
$2x + x = 9 - 3 - 5 + 8$ (§ 204.)
$3x = 9$ (§ 203.)
$x = \frac{9}{3} = 3.$

8) $7x - 5x = 20 + x + 4$
$2x - x = 20 + 4$ (§ 204. 1. u. 2.)
$x = 24$ (§ 203.)

9) $\frac{9x}{2} + 8 = 3x + 9$
$9x + 16 = 6x + 18$ (§ 205.)
$9x - 6x = 18 - 16$
$3x = 2$
$x = \frac{2}{3} = {}^2/_3.$

10) $15^1/_2 - \frac{x}{3} = 2x - 3^1/_6$
$\frac{31}{2} - \frac{x}{3} = 2x - \frac{19}{6}$
$93 - 2x = 12x - 19$ } Nenner 6 fort. § 205.
$93 + 19 = 12x + 2x$
$14x = 112$
$x = \frac{112}{14} = 8.$

11) $8\frac{1}{4} + x - 4 - 1\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}x - 5\frac{2}{3}$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{33}{4} + x - 4 - \frac{5x}{3} = \frac{3x}{4} - \frac{17}{3} \\ 99 + 12x - 48 - 20x = 9x - 68\end{array}\right\}$$

Nenner 4 und 3 fort, d. i. mit 12 jedes Glied multiplicirt. (§ 205.)

$$99 - 48 + 68 = 9x - 12x + 20x$$
$$119 = 17x$$
$$x = \frac{119}{17} = 7.$$

12) $-5\frac{2}{3}x + 44\frac{1}{6} - 6x = -3\frac{1}{2}x + 27\frac{5}{6}$

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{17}{3}x + \frac{265}{6} - 6x = -\frac{7x}{2} + \frac{167}{6} \\ -34x + 265 - 36x = -21x + 167\end{array}\right\}$$

Nenner 6 fort (§ 205).

$$-34x - 36x + 21x = 167 - 265$$
$$-70x + 21x = -98$$
$$-49x = -98$$
$$x = \frac{98}{49} = 2.$$

Wenn auf beiden Seiten der Gleichung das Vorzeichen minus entsteht, so kann man es ohne Weiteres in plus verwandeln, weil man sich nur jedes Glied nach der anderen Seite versetzt denken darf.

B. Anwendung der Gleichungen.

a) Zinsrechnung mit Gleichungen.

§ 207.

1) Ein zu 5 % ausgeliehenes Capital beträgt nach 6 Jahren mit den Zinsen 4420 Thlr.; wie groß ist das Capital?

Nach § 124 werden die Zinsen eines Capitals gefunden, wenn man das Capital mit dem Zinsfuß multiplicirt und das Produkt durch 100 dividirt.

Ist das Capital x, der Zinsfuß 5 %, so sind die Zinsen $\frac{x \cdot 5}{100}$ und auf sechs Jahre $\frac{x \cdot 5 \cdot 6}{100} = \frac{30x}{100} = \frac{3x}{10}$. Capital und Zinsen sind also $x + \frac{3x}{10}$, folglich:

$$x + \frac{3x}{10} = 4420 \text{ Thlr.}$$
$$10x + 3x = 44200 \text{ Thlr.}$$
$$x = \frac{44200}{13} = 3400 \text{ Thlr.}$$

2) Zwei zu $4\frac{1}{2}$ % und 5 % ausgeliehene Capitalien, welche zusammen 7300 Thlr. betragen, bringen in $3\frac{1}{2}$ Jahren $1198\frac{3}{4}$ Thlr. Zinsen; wie groß ist jedes Capital?

$1198\frac{3}{4}$ Thlr. in $3\frac{1}{2}$ Jahren geben in 1 Jahr $1198\frac{3}{4} : 3\frac{1}{2} = \frac{4795}{4} \times \frac{2}{7}$ $= 342\frac{1}{2}$ Thlr. Zinsen.

$(342\frac{1}{2} = \frac{685}{2}.)$

Ist das eine Capital x Thlr., so ist das andere 7300 Thlr. — x Thlr.; die Zinsen auf 1 Jahr sind von x $\frac{x \,.\, 4\frac{1}{2}}{100} = \frac{9x}{200}$, die von 7300 — x sind $\frac{(7300 - x)\,5}{100}$, beide zusammen also

$$\left.\begin{aligned} \frac{9x}{200} + \frac{(7300 - x)\,5}{100} &= \frac{685}{2} \\ 9x + 73000 - 10x &= 68500 \end{aligned}\right\}\text{Nenner 200 fort.}$$

$$\begin{aligned} -x &= -73000 + 68500 \\ -x &= -4500 \\ x &= 4500 \text{ Thlr. } (\S\ 206) \end{aligned}$$

Das eine Capital ist also 4500 Thlr., das andere 7300 — 4500 = 2800 Thlr.

3) Es verleiht Jemand 8400 Thlr. zu 5 %, wozu er jedoch ein Capital zu $3\frac{1}{3}$ % aufgenommen hat. Nach $4\frac{1}{2}$ Jahren hat er einen Zinsenüberschuß von 1485 Thlrn.; wie groß war das aufgenommene Capital?

1485 Thlr. in $4\frac{1}{2}$ Jahren macht in 1 Jahr $\frac{1485 \,.\, 2}{9} = 330$ Thlr.

Hat er x Thlr. aufgenommen, so sind die Zinsen von den 8400 Thlrn. zu 5 % minus den Zinsen von x Thlrn. zu $3\frac{1}{3}$ % gleich dem Ueberschuß von 330 Thalern, also:

$$\frac{8400 \,.\, 5}{100} - \frac{x \,.\, 10}{100 \,.\, 3} = 330$$

$$\left.\begin{aligned} 420 - \frac{x}{30} &= 330 \\ 12600 - x &= 9900 \end{aligned}\right\}\text{Nenner 30 fort.}$$

$$12600 - 9900 = x$$

$x = 2700$ Thlr. aufgenommenes Capital.

4) Jemand verleiht ein Capital zu 5 %, wozu er sich jedoch 4500 Thlr. à 4 % leihen muß. Nach 5 Jahren hat er einen Ueberschuß an Zinsen von 2100 Thlrn.; wie groß war das Capital, das er selbst gegeben hat?

2100 Thlr. in 5 Jahren macht 420 Thlr. in 1 Jahr.

Das eigene Capital ist x Thlr., das geliehene 4500 Thlr.; von den Zinsen beider zu 5 % die 420 Thlr. Ueberschuß abgezogen, giebt die Zinsen der 4500 Thaler zu 4 %.

$$\frac{(x + 4500)\,5}{100} - 420 = \frac{4500 \,.\, 4}{100}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x + 4500}{20} - 420 &= 180 \\ x + 4500 - 8400 &= 3600 \end{aligned}\right\}\text{Nenner 20 fort.}$$

$$\begin{aligned} x - 3900 &= 3600 \\ x = 3600 + 3900 &= 7500 \text{ Thlr.} \end{aligned}$$

eigenes Capital.

5) Jemand giebt ein Capital von 6000 Thlrn. à $3^1/_2$ % und 3 Jahre später ein anderes von 7000 Thlrn. à 5 % auf Zinsen; nach wie vielen Jahren hat das zweite Capital eben so viele Zinsen gebracht wie das erste?

Steht das zweite Capital x Jahre denn steht das erste 3 + x Jahre also:

$$\frac{7000 \cdot 5 \cdot x}{100} = \frac{6000 \cdot 3^1/_2 (3 + x)}{100}$$

$$70 \cdot 5 \cdot x = 60 \cdot 3^1/_2 (3 + x)$$

$$350x = 210 (3 + x)$$
$$350x = 630 + 210x$$
$$350x - 210x = 630$$
$$140x = 630$$

$$x = \frac{630}{140} = 4^1/_2 \text{ Jahre.}$$

Es bringen mithin 7000 Thlr. zu 5 % in $4^1/_2$ Jahren eben so viele Zinsen, wie 6000 Thlr. zu $3^1/_2$ % in $7^1/_2$ Jahren.

6) Es hat Jemand 2 Capitalien zu 5 und 4 % ausgeliehen; das zweite zu 4 % ist $2^1/_2$ mal größer als das erste. Nach Verlauf von $3^1/_2$ Jahren betragen beide Capitalien mit den Zinsen zusammen $3622^1/_2$ Thlr.; wie groß ist jedes der beiden Capitalien?

Ist das eine Capital x, denn ist das andere $2^1/_2 x = \frac{5x}{2}$, also nach Beispiel 1 angesetzt:

$$\underset{\text{Cap.}}{x} + \underset{\text{Zins.}}{\frac{x \cdot 5 \cdot 7}{100 \; 2}} + \underset{\text{Cap.}}{\frac{5x}{2}} + \underset{\text{Zins.}}{\frac{5x \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 100 \; 2}} = 3622^1/_2$$

$$x + \frac{7x}{40} + \frac{5x}{2} + \frac{7x}{20} = \frac{7245}{2}$$

$$40x + 7x + 100x + 14x = 7245 \cdot 20.$$

$$161x = 144900$$

$$x = \frac{144900}{161} = 900.$$

Das erste Capital beträgt also 900 Thlr., das andere $2^1/_2$ mal 900 = 2250 Thlr.

7) Jemand verleiht ein Capital unter der Bedingung, daß $^1/_4$ desselben 5 %, $^1/_3$ desselben 4 % und der Rest 3 % bringen soll; nach $5^1/_4$ Jahren erhält er an Capital und Zinsen $7207^1/_2$ Thaler; wie groß ist das Capital?

($5^1/_4$ Jahre $= \frac{21}{4}$ Jahre.)

($7207^1/_2$ Thlr. $= \frac{14415}{2}$ Thlr.)

($^1/_4 + ^1/_3 = ^7/_{12}$, also Rest $^5/_{12}$)

Ist das Capital x, denn sind die Zinsen:

von $\frac{x}{4} = \frac{x \,.\, 5 \,.\, 21}{4 \,.\, 100 \;\, 4} = \frac{5\,x}{4} \cdot \frac{21}{400}$

von $\frac{x}{3} = \frac{x \,.\, 4 \,.\, 21}{3 \;\, 100 \;\, 4} = \frac{4\,x}{3} \cdot \frac{21}{400}$

von $\frac{5x}{12} = \frac{5x \,.\, 3 \,.\, 21}{12 \;\, 100 \;\, 4} = \frac{15x}{12} \cdot \frac{21}{400}$

zusammen $\frac{46\,x}{12} \cdot \frac{21}{400}$

$= \frac{161\,x}{800}$ Thaler Zinsen.

Capital und Zinsen sind also

$$x + \frac{161\,x}{800} = \frac{14415}{2} \text{ Thlr.}$$

$$800\,x + 161\,x = 14415 \,.\, 400$$

$$961\,x = 5766000$$

$$x = \frac{5766000}{961} = 6000 \text{ Thlr.}$$

beträgt das ganze Capital.

8) Es hat Jemand ein Capital zu 5 % ausgeliehen; nach 4 Jahren nimmt er $^1/_4$ der angewachsenen Summe fort und läßt die übrig bleibende Summe wieder 4 Jahre zu 5 % stehen, wodurch er 1600 Thlr. über sein zuerst ausgeliehenes Capital hat. Wie groß war dieses?

Ist das ausgeliehene Capital x, so sind die Zinsen zu 5 % nach 4 Jahren $\frac{x \,.\, 5 \,.\, 4}{100} = \frac{x}{5}$, Capital und Zinsen also $x + \frac{x}{5} = \frac{6x}{5}$; davon $^1/_4$ fort, bleiben $^3/_4 \times \frac{6\,x}{5} = \frac{18\,x}{20} = \frac{9\,x}{10}$.

Von $\frac{9x}{10}$ Capital sind die Zinsen zu 5 % in 4 Jahren $\frac{9\,x \,.\, 5 \,.\, 4}{10 \,.\, 100} = \frac{9\,x}{50}$;

Capital $\frac{9x}{10}$ + Zinsen $\frac{9x}{50}$ sind gleich dem eingelegten Capital x + 1600 Thlr.

also: $\frac{9x}{10} + \frac{9x}{50} = x + 1600$

$$45\,x + 9\,x = 50\,x + 80000 \quad \text{(Nenner 50 fort)}$$

$$45\,x - 50\,x = 80000$$

$$x = \frac{80000}{4} = 20000 \text{ Thlr. ausgeliehenes Capital.}$$

b) Gesellschaftsrechnung mit Gleichungen.

§ 208.

1) 3 Getreidehändler haben 720 Neuscheffel Weizen gekauft und wollen dieselben in der Weise unter sich theilen, daß B. 64 Neuschffl. weniger als A., und C. 28 Neuschffl. mehr als A. und B. zusammen erhält; wie groß ist der Antheil eines Jeden?

A. erhält x Neuscheffel
B. " x − 64
C. " x + x − 64 + 28
= 2 x − 36, also:

A. B. C.
$$x + x - 64 + 2\,x - 36 = 720$$

$$4\,x - 100 = 720$$

$$4\,x = 720 + 100 = 820$$

$$x = \frac{820}{4} = 205 \text{ Neuscheffel.}$$

Es erhält also:

A. $= x =$	205	Neuscheffel
B. $= x - 64 = 205 - 64 =$	141	"
C. $= 2x - 36 = 410 - 36 =$	374	"
	720	Neuscheffel.

2) 4 Kaufleute haben für $376^1/_6$ Thaler Zucker gekauft und wollen denselben so unter sich theilen, daß B. $1^1/_2$ Ctr. weniger als A. erhält und dafür $30^1/_2$ Thlr. weniger als A. zahlt; C. soll 2 Ctr. mehr als B., und D. $^1/_2$ so viel als B. und C. zusammengenommen erhalten; wieviel Centner erhält Jeder?

A. erhält x Ctr.
B. " $x - 1^1/_2$
C. " $x - 1^1/_2 + 2 = x + {}^1/_2$
D. " $= \frac{x - 1^1/_2 + x + {}^1/_2}{2} = \frac{2x - 1}{2} = x - {}^1/_2.$

Wenn B. für $1^1/_2$ Ctr. weniger, $30^1/_2$ Thlr. zahlt, so kostet der Centner $30^1/_2$ Thlr. : $1^1/_2 = 20^1/_3$ Thlr., und für $376^1/_6$ Thlr. kauft man $376^1/_6 : 20^1/_3 = 18^1/_2$ Centner.

Also $\overset{A.}{x} + \overset{B.}{x - 1^1/_2} + \overset{C.}{x + {}^1/_2} + \overset{D.}{x - {}^1/_2} = 18^1/_2$

$4x - 1^1/_2 = 18^1/_2$ ($+ \frac{1}{2}$ und $- \frac{1}{2}$ heben sich)

$4x = 18^1/_2 + 1^1/_2$

$x = \frac{20}{4} = 5$ Ctr.

Es erhält also:

A. 5 Ctr. $(= x)$
B. $3^1/_2$ " $(5 - 1^1/_2)$
C. $5^1/_2$ " $(5 + {}^1/_2)$
D. $4^1/_2$ " $(5 - {}^1/_2)$
$18^1/_2$ Ctr.

3) 5 Personen sollen $628^1/_2$ Thlr. so unter sich theilen, daß der 5te Theil des Antheils von A. gleich sei dem 7ten Theil des Antheils von B., C. aber $^1/_5$ mehr als A., D. $12^1/_2$ Thlr. mehr als C., und E. $^1/_9$ weniger als C. erhält; wieviel erhält Jeder?

A. erhält $5x$
B. " $7x$
C. " $5x + \frac{5x}{5} = 6x$
D. " $6x + 12^1/_2$ Thlr.
E. " $6x - \frac{6x}{9} = \frac{48x}{9} = 5^1/_3 x.$

$\overset{A.}{5x} + \overset{B.}{7x} + \overset{C.}{6x} + \overset{D.}{6x + 12^1/_2} + \overset{E.}{5^1/_3 x} = 628^1/_2$

$29^1/_3 x = 628^1/_2 - 12^1/_2$

$\frac{88}{3} x = 616$

$88x = 1848$

$x = \frac{1848}{88} = 21$ Thlr.

Es erhält also:

A. 105 Thlr. $(5x)$
B. 147 " $(7x)$
C. 126 " $(6x)$
D. $138^1/_2$ " $(6x + 12^1/_2)$
E. 112 " $(5^1/_3 x)$
$628^1/_2$ Thlr.

4) Es soll für einen Bedürftigen in einer Gesellschaft gesammelt werden. Giebt Jeder aus der Gesellschaft $^1/_2$ Thlr., so kommen 5 Thlr. mehr heraus, als man sammeln will; giebt Jeder $^1/_3$ Thlr., dann fehlen 5 Thlr. Aus wie vielen Personen bestand die Gesellschaft, und wieviel sollte gesammelt werden?

Die Gesellschaft bestand aus x Personen, also:

$$^1/_2\,x - 5 \text{ Thlr.} = {}^1/_3\,x + 5 \text{ Thlr.}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 5 + 5$$

$$\frac{x}{6} = 10$$

$$x = 60 \text{ Personen.}$$

$60 \times {}^1/_2$ Thlr. — 5 Thlr. = 25 Thlr., oder $60 \times {}^1/_3$ Thlr. + 5 Thlr. = 25 Thlr. sollten gesammelt werden.

5) In einer Gesellschaft befanden sich $2^1/_2$ mal so viel Herren als Damen; als aber 10 Herren und 10 Damen fortgingen, blieben noch 4 mal so viel Herren als Damen. Wie viele Damen und Herren waren anfänglich in der Gesellschaft?

x Damen und $2^1/_2$ x Herren waren anfänglich da:

$$2^1/_2\,x - 10 = (x - 10)\,4$$

$$\frac{5x}{2} - 10 = 4x - 40$$

$$5x - 20 = 8x - 80$$

$$80 - 20 = 8x - 5x$$

$$60 = 3x$$

$$x = \frac{60}{3} = 20.$$

Es befanden sich also anfänglich 20 Damen und 50 Herren in der Gesellschaft.

6) A. und B. spielen Billard: A. hat 38 Thlr., B. 26 Thlr. vor dem Spiele bei sich; nach dem Spiele hat A. 5 mal so viel Geld als B. Wieviel hat B. verloren?

B. hat x Thlr. verloren, also ist:

$$38 + x = (26 - x)\,5$$

$$38 + x = 130 - 5x$$

$$5x + x = 130 - 38$$

$$6x = 92$$

$$x = \frac{92}{6} = 15^1/_3 \text{ Thaler.}$$

A. hat nach dem Spiele $53^1/_3$ Thlr., B. $10^2/_3$ Thlr., also A. 5 mal so viel als B.

7) Die Garnison einer Stadt besteht aus 2600 Mann Infanterie und Kavallerie; jeder Infanterist bekommt monatlich $2^1/_3$ Thlr., jeder Kavallerist $3^1/_2$ Thlr. Wenn nun der monatliche Sold zusammen 6475 Thlr. beträgt, aus wie vielen Infanteristen und Kavalleristen bestand die Garnison?

Es waren x Infanteristen und 2600 — x Kavalleristen.

Die Infanteristen erhielten:

$$2^1/_3 \text{ Thlr.} \times x = \frac{7x}{3} \text{ Thaler,}$$

Die Kavalleristen erhielten:

$$3^1/_2 \text{ Thlr.} \times (2600 - x) = \frac{7}{2}\,(2600 - x)$$

$$\frac{7x}{3} + \frac{7}{2}\,(2600 - x) = 6475$$

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\,(2600 - x) = 925$$

$$x + \frac{3}{2}\,(2600 - x) = 2775$$

$$2x + 7800 - 3x = 5550$$

$$7800 - 5550 = 3x - 2x$$

$$x = 2250.$$

Es bestand mithin die Garnison aus 2250 Infanteristen und 2600 — 2250 = 350 Kavalleristen.

(Der erste Ansatz ist gleich durch 7 dividirt.) (§ 205. 4.)

8) Vier Personen spielen Karten; A. hat vor dem Spiele halb so viel Geld bei sich als B., und das des C. verhält sich zu dem des B. wie 4 zu 5. D. hat $^7/_8$ mal so viel als C.; zusammen haben sie 45 Thlr. Nach dem Spiele hat A. $10^1/_2$ Thlr. mehr als B., das des C. verhält sich zu dem des B. wie 5 zu 7, und D. hat 2 Thlr. weniger als A. Wer hat gewonnen und wieviel? Wer hat verloren und wieviel?

A. hat x Thlr. vor dem Spiele bei sich, also

B. $2x$ „
C. $\frac{8x}{5}$ „
D. $\frac{7x}{5}$ „

$$\left.\begin{array}{l} C. : B. = 4 : 5 \ (B. = 2x) \\ C. : 2x = 4 : 5 \end{array}\right\}$$

$$C. = \frac{2x \cdot 4}{5} = \frac{8x}{5} \quad (\S\ 154)$$

$$D. = \frac{7}{8} \times \frac{8x}{5} = \frac{7x}{5}$$

$$x + 2x + \frac{8x}{5} + \frac{7x}{5} = 45$$

$$6x = 45$$

$$x = \frac{45}{6} = 7^1/_2 \text{ Thlr.}$$

A. hat also $7^1/_2$ Thlr.
B. „ „ 15 „
C. „ „ 12 „
D. „ „ $10^1/_2$ „
} vor dem Spiele bei sich.

Nach dem Spiele hat:
B. x Thlr.
A. $x + 10^1/_2$ Thlr.,
C. $\frac{5x}{7}$
D. $x + 8^1/_2$ Thlr.

B. A. C. D.

$$x + x + 10^1/_2 + \frac{5x}{7} + x + 8^1/_2 = 45$$

$$3^5/_7 x + 19 = 45$$

$$\frac{26x}{7} = 45 - 19 = 26$$

$$x = \frac{26 \cdot 7}{26} = 7 \text{ Thlr.}$$

A. hat jetzt $7 + 10^1/_2 = 17^1/_2$ Thlr., folglich 10 Thlr. gewonnen,
B. „ „ 7 Thlr., also 8 Thlr. verloren,
C. „ „ $7 \times \frac{5}{7} = 5$ Thlr., mithin 7 Thlr. verloren,
D. „ „ $7 + 8^1/_2 = 15^1/_2$ Thlr., also 5 Thlr. gewonnen.

c) Mischungsrechnung mit Gleichungen.

§ 209.

1) Ein Kaufmann hat 2 Sorten Rum; von der einen Sorte kostet das Liter $11^1/_2$ Sgr., von der anderen $12^2/_3$ Sgr. Er mischt beide und verkauft das Liter zu 15 Sgr. wobei er 11 Thlr. 27 Sgr. verdient; von der ersten Sorte hat er 64 Liter genommen, wieviel von der zweiten?

Von der 2ten Sorte hat er x Liter genommen; gemischt hat er also 64 + x Liter.

(11 Thlr. 27 Sgr. sind 357 Sgr.)

$$64 \cdot 11\tfrac{1}{2} + x \cdot 12\tfrac{2}{3} = (64 + x)\,15 - 357$$
$$736 + \frac{38x}{3} = 960 + 15x - 357$$
$$736 + 357 - 960 = \frac{45x}{3} - \frac{38x}{3}$$
$$133 = \frac{7x}{3}$$
$$399 = 7x$$
$$x = \frac{399}{7}$$
$x = 57$ Liter von der 2ten Sorte.

2) Ein Tabackshändler mengt 45 Pfd. Taback à 16 Sgr. mit einer Sorte das Pfund zu $12\tfrac{1}{2}$ Sgr.; es gehen ihm 7 Pfd. der Mengung verloren, und nun kostet ihm 1 Pfd. der Mengung 15 Sgr. Wie viele Pfund der 2ten Sorte hat er genommen?

x Pfd. war die 2te Sorte, die Mengung also 45 + x Pfd.; von diesen gingen 7 Pfd. verloren, blieben folglich $45 + x - 7 = 38 + x$ Pfd.

$$45 \cdot 16 + x \cdot 12\tfrac{1}{2} = (38 + x)\,15$$
$$720 + \frac{25x}{2} = 570 + 15x$$
$$1440 + 25x = 1140 + 30x$$
$$1440 - 1140 = 30x - 25x$$
$$5x = 300$$
$x = \frac{300}{5} = 60$ Pfd. der 2ten Sorte.

3) Ein Händler mengt 2 Sorten Kartoffeln à 18 und 25 Sgr. den Neuscheffel; von der ersten Sorte nimmt er 40 Neuscheffel. Die Mengung verkauft er à Neuscheffel mit 20 Sgr. und verliert dabei $3\tfrac{1}{3}$ Thlr.; wie viele Neuscheffel der zweiten Sorte hat er zu der Mengung genommen?

($3\tfrac{1}{3}$ Thlr. = 100 Sgr.)

$$40 \cdot 18 + x \cdot 25 = (40 + x)\,20 + 100$$
$$720 + 25x = 800 + 20x + 100$$
$$25x - 20x = 900 - 720$$
$$5x = 180$$
$x = \frac{180}{5} = 36$ Neuschffl. der 2ten Sorte.

4) Ein Weinhändler macht eine Weinmischung, von der, wie er sich vorher berechnet hatte, die $\tfrac{3}{4}$-Flasche 9 Sgr. kosten müßte; es gingen aber bei der Arbeit 20 Liter des gemischten Weins verloren, und nun stellte sich der Preis der $\tfrac{3}{4}$-Flasche auf $10\tfrac{1}{2}$ Sgr. Wieviel Liter betrug die Mischung?

9 Sgr. die $\tfrac{3}{4}$-Flasche macht das Liter 12 Sgr.; und $10\tfrac{1}{2}$ Sgr. die $\tfrac{3}{4}$-Flasche macht das Liter 14 Sgr. Die Mischung betrug x Liter; also:

$$12x = (x - 20)\,14$$
$$12x = 14x - 280$$
$$280 = 14x - 12x$$
$$280 = 2x$$
$x = 140$ Liter betrug die Mischung.

140 Liter à 12 Sgr. = $\frac{140 \cdot 2}{5}$ Thlr. = 56 Thlr.

120 „ à 14 „ = $\frac{120 \cdot 7}{15}$ Thlr. = 56 Thlr.

5) Ein Weinhändler mischt 2 Sorten Wein à 13 und 8 Sgr. das Liter. Von der ersten Sorte nimmt er 70 Liter; wieviel nimmt er von der zweiten Sorte, wenn er 9 Liter Wasser zugießt und ihm nun das Liter Wein der Mischung 10 Sgr. kostet?

Die 2te Sorte ist x Liter, also die Mischung $70 + x + 9 = 79 + x$ Liter.

$$x \cdot 8 + 70 \cdot 13 = (79 + x)\, 10$$
$$8x + 910 = 790 + 10x$$
$$910 - 790 = 10x - 8x$$
$$120 = 2x$$
$$x = 60 \text{ Liter.}$$

d) Terminrechnung mit Gleichungen.

§ 210.

1) Ein Capital von 7200 Thlrn. ist am 1sten Juni und ein anderes am 27sten Juni zu zahlen; der mittlere Zahlungstermin beider Capitalien ist der 15te Juni. Wie groß ist das zweite Capital?

Vom 1sten bis 15ten Juni sind 14 Tage, vom 1sten bis 27sten Juni 26 Tage.

Das am 27sten Juni zu zahlende Capital ist x, also ist nach § 190, und wie dort geschehen, 2 Nullen vom Capital fortgelassen, der Ansatz:

$$\frac{x \cdot 26}{72 + x} = 14 \text{ (Tage)}$$
$$26x = 14\,(72 + x)$$
$$26x = 1008 + 14x$$
$$26x - 14x = 1008$$
$$x = \frac{1008}{12} = 84$$

und 2 Nullen wieder hinzu = 8400 Thlr.

Der mittlere Zahlungstermin, welcher in § 190 gesucht wird, ist hier gegeben. Man hat deshalb nur nöthig, den Ansatz ebenso wie in § 190 zu machen und ihn mit dem mittleren Zahlungstermin (14 Tage) gleich zu stellen, demnächst x, welches für das fehlende Capital gesetzt ist, zu entwickeln.

2) Am 1sten April ist ein Capital, am 16ten Mai ein anderes von 3600 Thalern und am 1sten Juli ein drittes von 4200 Thlrn. zu zahlen. Der mittlere Zahlungstermin ist der 21ste Mai; wie groß ist das erste Capital?

Vom 1sten April bis 16ten Mai sind $1\frac{1}{2}$ Monate, bis 21sten Mai $1\frac{2}{3}$ Monate, bis 1sten Juli 3 Monate.

Das am 1sten April zu zahlende Capital ist x, also ist nach Beispiel 1, und 2 Nullen von jedem Capital fortgelassen:

$$\frac{36 \cdot 1\frac{1}{2} + 42 \cdot 3}{x + 36 + 42} = 1\tfrac{2}{3} \text{ (Monate)}$$
$$54 + 126 = \tfrac{5}{3}\,(x + 36 + 42)$$
$$162 + 378 = 5x + 180 + 210$$
$$540 = 5x + 390$$
$$540 - 390 = 5x$$
$$x = \frac{150}{5} = 30 \text{ und}$$

die 2 Nullen wieder hinzu = 3000 Thlr.

3) Es soll Jemand am 16ten Mai 2200 Thlr. zahlen; er zahlt aber schon am 1sten Februar eine Summe und am 21sten September den Rest. Wie groß war die am 1sten Februar gezahlte Summe?

Vom 1sten Februar bis 16ten Mai sind $3^1/_2$ Monate, vom 16ten Mai bis 21sten September $4^1/_5$ Monate.

Die am 1sten Februar gezahlte Summe ist x, also das Restcapital 2200 — x oder, 2 Nullen fort, 22 — x. Nach § 191. a ist demnach:

$$\frac{x \cdot 3^1/_2}{22 - x} = 4^1/_5 \text{ (Monate)}$$

$$3^1/_2 x = 4^1/_5 (22 - x)$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{21}{5}(22 - x) \quad \text{mit 10 multiplicirt.}$$

$$35 x = 42 (22 - x) \quad \S\ 205.\ 2.$$

$$5 x = 6 (22 - x) \quad \text{durch 7 divid.}$$

$$5 x = 132 - 6 x \quad \S\ 205.\ 4.$$

$$x = \frac{132}{11} = 12$$

2 Nullen wieder hinzu = 1200 Thlr.

Hier ist der Zahlungstag des Restes gegeben, welcher § 191 a gesucht wird. Man stellt diesen, ebenso wie in Beispiel 1, mit dem nach § 191 a gemachten Ansatz gleich und entwickelt dann x.

4) Am 16ten März soll Jemand eine gewisse Summe zahlen; er zahlt jedoch am 1sten Januar 1400 Thaler und am 1sten Juli den Rest. Wie groß ist die am 16ten März zu zahlende Summe?

Vom 1sten Januar bis 16ten März sind $2^1/_2$ Monate, vom 16ten März bis 1sten Juli $3^1/_2$ Monate.

Die am 16ten März zu zahlende Summe ist x, das Restcapital also x — 1400 oder, 2 Nullen fort, x — 14. Nach Beispiel 3 ist demnach:

$$\left.\begin{aligned} \frac{14 \cdot 2^1/_2}{x - 14} &= 3^1/_2 \text{ (Monate)} \\ 14 \cdot 2^1/_2 &= 3^1/_2 (x - 14) \end{aligned}\right\} \S\ 204.\ 4.$$

$$35 = \frac{7x}{2} - 49$$

$$70 = 7 x - 98$$

$$168 = 7 x$$

$$x = \frac{168}{7} = 24$$

und 2 Nullen hinzu = 2400 Thlr.

5) 3600 Thlr. sollen am 1sten Januar und 2400 Thlr. am 1sten Juli gezahlt werden; es wird aber ein Capital am 1sten Februar und das Restcapital am 1sten September gezahlt; wie groß ist die am 1sten Februar gezahlte Summe?

Die ganze zu zahlende Summe beträgt 3600 Thaler + 2400 Thaler = 6000 Thlr.; davon ab die am 1sten Februar gezahlte Summe x, bleibt als Restcapital 6000 — x, und 2 Nullen fort, 60 — x. Der letzte Zahlungstermin ist der 1ste Juli, also ist nach § 191. b und bei einem ähnlichen Verfahren wie in Beispiel 1 und 3:

x . 5 Monate (vom 1sten Februar bis 1sten Juli) = 5 x Monate
36 . 6 „ (vom 1sten Januar bis 1sten Juli) = 216 „
bleiben 5 x — 216 Monate.

$$\frac{5x - 216}{60 - x} = 2 \text{ Monate (vom 1sten Juli bis 1sten September.)}$$

$$5 x - 216 = 2 (60 - x) = 120 - 2 x \text{ (§ 204. 4.)}$$

$$5 x + 2 x = 120 + 216$$

$$7 x = 336 \text{ also } x = \frac{336}{7} = 48$$

2 Nullen wieder hinzu = 4800 Thlr.

6) Es sollen am 1sten Juni x Thaler und am 1sten October 1800 Thlr. gezahlt werden; es sind aber am 1sten Juli 2700 Thaler und der Rest am 1sten November gezahlt worden. Wie groß ist die am 1sten Juni zu zahlende Summe?

Die im Ganzen zu zahlende Summe beträgt x Thlr. + 1800 Thlr.; die Restsumme ist also x + 1800 — 2700 = x — 900 oder, 2 Nullen fort, x — 9. Nach § 191. b. ist nun:

27 . 3 Monate (vom 1sten Juli bis 1sten October) = 81 Monate
x . 4 „ (vom 1sten Juni bis 1sten October) = 4 x „
bleiben 81 — 4 x Monate.

$$\frac{81 - 4x}{x - 9} = 1 \text{ (vom 1sten October bis 1sten November)}$$

$$81 - 4x = 1(x - 9) = x - 9 \quad (\S\ 204.\ 4.)$$

$$81 + 9 = x + 4x$$

$$5x = 90 \text{ und } x = \frac{90}{5} = 18$$

2 Nullen hinzu = 1800 Thaler.

e) Diverse Gleichungen.

§ 211.

1) Es kauft Jemand 42 Meter Tuch und verkauft sie zu 126 Thaler, wobei er $^1/_5$ des Einkaufspreises verdient; was hat ihm das Meter gekostet?

Das Meter kostet x Thlr., also

$$42x + \frac{42x}{5} = 126$$

$$210x + 42x = 630$$

$$252x = 630$$

$$x = \frac{630}{252} = 2^1/_2 \text{ Thlr.}$$

2) Jemand kauft 18 Meter Kattun und 22 Meter Leinwand für $10^1/_3$ Thlr.; für das Meter Kattun giebt er 5 Sgr. mehr als für das Meter Leinwand. Wieviel hat jedes Meter gekostet?

($10^1/_3$ Thlr. = 310 Sgr.)

Kostet das Meter Kattun x Sgr., so kostet das Meter Leinwand x — 5 Sgr., also:

$$18x + 22(x - 5) = 310$$

$$18x + 22x - 110 = 310$$

$$40x = 310 + 110$$

$$40x = 420$$

$$x = \frac{420}{40} = 10^1/_2 \text{ Sgr.}$$

Das Meter Kattun hat also $10^1/_2$ Sgr., das Meter Leinwand $10^1/_2 - 5 = 5^1/_2$ Silbergroschen gekostet.

3) Von 56 Ctr. Waare blieben 14 Ctr. mehr übrig, als verkauft wurden; wieviel Centner wurden verkauft?

Es wurden x Centner verkauft, also blieben x + 14 Centner übrig.

$$x + 14 = 56 - x$$

$$2x = 56 - 14 = 42$$

$$x = \frac{42}{2} = 21 \text{ Ctr.}$$

wurden verkauft, und 21 + 14 = 35 Centner blieben übrig; 56 — 21 = 35 Centner.

4) A. ist jetzt 45 Jahre alt, also 9mal älter als sein 5-jähriger Sohn; nach wie vielen Jahren ist A. doppelt so alt als sein Sohn?

Nach x Jahren, also:

$$45 + x = (5 + x)\,2$$
$$45 + x = 10 + 2x$$
$$45 - 10 = 2x - x$$
$$x = 35 \text{ Jahre.}$$

Nach 35 Jahren ist A. 80, der Sohn 40 Jahre alt.

5) Es soll eine Zahl gefunden werden, welche mit 7 multiplicirt ein Produkt giebt, das ebenso viel über 24 ist, als die Zahl selbst unter 24 ist.

Ist die Zahl x, so ist

$$7x - 24 = 24 - x$$
$$7x + x = 24 + 24$$
$$8x = 48$$
$$x = 6$$

6) Es sind zwei Zahlen gegeben, deren Summe 91 ist; dividirt man die eine Zahl durch 5, die andere durch 7, so geben die Quotienten addirt 15.

Ist die eine Zahl x, dann ist die andere 91 — x, also:

$$\frac{x}{5} + \frac{91 - x}{7} = 15$$
$$x + \frac{455 - 5x}{7} = 75$$
$$7x + 455 - 5x = 525$$
$$7x - 5x = 525 - 455$$
$$2x = 70$$
$$x = 35$$

die andere Zahl ist 91 — 35 = 56.

7) Ein Getreidehändler will so viel Getreide kaufen, als er Geld bei sich hat: kauft er 120 Neuscheffel Weizen, so bleiben ihm 42 Thlr. übrig; kauft er 192 Neuscheffel Roggen, dann fehlen ihm 30 Thlr. Wieviel Geld hat er bei sich, wenn der Neuschffl. Roggen $\frac{1}{2}$ Thlr. billiger als der Neuscheffel Weizen ist?

Kostet der Neuscheffel Weizen x Thlr., dann kostet der Neuscheffel Roggen $x - \frac{1}{2}$ Thlr.

$$120x + 42 = 192\,(x - \tfrac{1}{2}) - 30$$
$$120x + 42 = 192x - 96 - 30$$
$$42 + 96 + 30 = 192x - 120x$$
$$168 = 72x$$
$$x = {}^{168}/_{72} = 2\tfrac{1}{3}$$

Thaler kostet der Neuscheffel Weizen.

Er hat also $120 \,.\, 2\frac{1}{3} + 42$ Thlr. = 322 Thlr. bei sich.

8) Fährt ein Fuhrmann 57 Meilen, so ist seine Schuld, welche er bei einem Kaufmanne hat, getilgt, und er erhält noch 15 Thlr. baar; fährt er aber nur 36 Meilen, so bleiben von seiner Schuld noch 55 Thlr. Wieviel war er schuldig?

Kostet die Meile x Thlr. zu fahren, so ist:

$$57x - 15 = 36x + 55$$
$$57x - 36x = 55 + 15$$
$$21x = 70$$
$$x = \frac{70}{21} = 3\tfrac{1}{3} \text{ Thlr. die Meile.}$$

$57 \,.\, 3\frac{1}{3} - 15 = 175$ Thlr. betrug die Schuld.

9) Jemand wird gefragt, was ihm das Schock Eier im Korbe koste? Er antwortet: Jetzt kostet mir das Schock 24 Sgr., wäre mir aber der Korb nicht umgefallen, wodurch fünf Mandel unbrauchbar wurden, so würde mir das Schock nur 20 Sgr. kosten. Wie viele Eier hatte er im Korbe?

(5 Mandel = $1\frac{1}{4}$ Schock.)

Er hatte x Schock Eier im Korbe; also:

$$24x = (x + 1\tfrac{1}{4})\,20$$
$$24x = 20x + 25$$
$$24x - 20x = 25$$
$$4x = 25$$
$$x = 6\tfrac{1}{4}$$ Schock Eier hatte er im Korbe, $7\frac{1}{2}$ Schock hatte er gekauft.

10) Man fragt einen Beamten, wieviel Gehalt er habe? Er giebt zur Antwort: wenn ich $2\frac{1}{2}$ mal mehr hätte, als ich habe, so würde ich gerade so viel über 1050 Thlr. haben, als ich jetzt darunter habe. Wieviel Gehalt hatte er?

Er hatte x Thlr. Gehalt, also:

$$2\tfrac{1}{2}x = 1050 + 1050 - x$$
$$2\tfrac{1}{2}x + x = 2100$$
$$\frac{7}{2}x = 2100$$
$$x = \frac{2100 \,.\, 2}{7}$$
$$x = 600$$ Thaler.

11) Es kauft Jemand $\frac{1}{2}$ Stück Leinwand, weniger 14 Meter für 8 Thaler und läßt nachher den Rest des Stückes für 22 Thlr. holen; wie viele Meter enthielt das Stück?

Das Stück enthielt x Meter und kostet 8 + 22 = 30 Thlr.; es kostet demnach das Meter $\frac{30}{x}$ Thlr. und auch

$$\frac{8}{\frac{x}{2} - 14}$$ Thlr.

Beide Preisangaben sind gleich, also:

$$\frac{30}{x} = \frac{8}{\frac{x}{2} - 14}$$
$$30 = \frac{8x}{\frac{x}{2} - 14}$$
$$30\left(\frac{x}{2} - 14\right) = 8x$$
$$15x - 420 = 8x$$
$$15x - 8x = 420$$
$$7x = 420$$
$$x = 60$$ Meter.

12) Ein Getreidehändler kauft 186 Neuscheffel Getreide für 386 Thlr. und zahlt für den Neuscheffel Weizen $2\frac{1}{3}$ Thlr., für den Neuscheffel Roggen $1\frac{5}{6}$ Thlr.; wieviel Getreide jeder Art hat er gekauft?

Er hat x Neuscheffel Weizen und 186 — x Neuscheffel Roggen gekauft.

$2\frac{1}{3}$ Thlr. = $\frac{7}{3}$ Thlr.; $1\frac{5}{6}$ Thlr. = $\frac{11}{6}$ Thl.

$$\frac{7x}{3} + (186 - x)\frac{11}{6} = 386$$
$$14x + (186 - x)\,11 = 2316$$
$$14x + 2046 - 11x = 2316$$
$$3x = 2316 - 2046 = 270$$
$$x = \frac{270}{3} = 90$$ Nschffl. Weizen

$186 - 90 = 96$ Nschffl. Rogger.

13) A. macht $3\frac{1}{2}$ Schritte, während B. $2\frac{3}{4}$ Schritte macht, die Schritte sind gleich groß; wenn nun B. dem A. um 2100 Schritte voraus ist, nach wie vielen Schritten wird er von A. eingeholt, und wie viele Schritte hat B. noch gemacht?

Wenn A. 1 Schritt macht, macht B.

$$2\frac{3}{4} : 3\frac{1}{2} = \frac{11}{4} : \frac{7}{2} = \frac{11 \,.\, 2}{4 \,.\, 7}$$

$= \frac{11}{14}$ Schritt; macht also A. x Schritt, so macht B. $\frac{11}{14}$ x Schritt. Also ist:

$$x = \frac{11}{14}x + 2100$$
$$14x = 11x + 2100 \,.\, 14$$
$$14x - 11x = 2100 \,.\, 14$$
$$3x = 2100 \,.\, 14$$
$$x = \frac{2100 \,.\, 14}{3} = 700 \,.\, 14$$
$$= 9800 \text{ Schritt.}$$
$$\frac{11}{14}x = \frac{11}{14} \,.\, 9800 = 700 \,.\, 11$$
$$= 7700 \text{ Schritt.}$$

A. hat also 9800 Schritte gemacht, um B. einzuholen; B. hat außer dem Vorsprung noch 7700 Schritte gemacht.

14) A. macht 5 Schritte, während B. 4 Schritte macht; 3 Schritte von B. sind aber so groß wie 4 Schritte von A. Wenn nun A. dem B. um 300 Schritte voraus ist, wie viele Schritte kann er noch machen, bis B. ihn einholt, und wie viele Schritte hat B. gemacht?

Es ist gleichgültig, ob man sagt, 3 Schritte von B. sind gleich 4 Schritte von A., oder: während B. 4 Schritte macht, macht A. 3 Schritte; dadurch hat man gleichartige Größen, und man kann setzen:

macht B. $\frac{4}{5}$ Schritt, so macht A. 1 Schritt
„ B. $\frac{4}{3}$ „ „ „ A. 1 „

$$\frac{4}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{15} \qquad 1 \times 1 = 1,$$

macht also B. $\frac{16}{15}$ x Schritt, so macht A. 1 x Schritt.

$$\frac{16}{15}x = x + 300$$
$$16x = 15x + 4500$$
$$16x - 15x = 4500$$
$$x = 4500 \text{ Schritte.}$$

A. hat also noch 4500 Schritte, im Ganzen 4500 + 300 = 4800 Schritte gemacht; multiplicirt man diese mit $\frac{3}{4}$, weil 1 Schritt von A. = $\frac{3}{4}$ Schritt von B. ist, so erhält man 4800 . $\frac{3}{4}$ = 3600 Schritte, die B. gemacht hat.

15) Ein Hund verfolgt einen Hasen. Ehe der Hund zu laufen anfängt, ist ihm der Hase 210 Sprünge voraus; wenn nun der Hase in eben der Zeit 5 Sprünge macht, während der Hund 4 macht, 7 Hasensprünge aber gleich 5 Hundesprüngen sind, wie viele Sprünge kann der Hase noch machen, bis ihn der Hund eingeholt hat, und wie viele Sprünge hat der Hund gemacht?

Diese Aufgabe wird ebenso gerechnet wie die vorige:

macht der Hund $\frac{4}{5}$ Sprung, so macht der Hase 1
„ „ „ $\frac{7}{5}$ „ „ „ „ „ 1

„ „ „ $\frac{28}{25}$ „ „ „ „ „ 1
„ „ „ $\frac{28}{25}$x „ „ „ „ „ x

folglich:

$$\frac{28}{25}x = x + 210$$
$$28x = 25x + 5250$$
$$28x - 25x = 5250$$
$$3x = 5250$$
$$x = 1750 \text{ Sprünge.}$$

Der Hase hat also im Ganzen

1750 + 210 = 1960, und der Hund 1960 × $\frac{5}{7}$ = 1400 Sprünge gemacht.

16) A. macht 6 Schritte, während B, 5 macht, aber 2 Schritte von B. sind so groß wie 3 Schritte von A.; A. geht von einem Ort D. nach einem anderen E. und braucht dazu 9000 Schritte. Als er die Hälfte des Weges gegangen ist, folgt ihm B., auch von D. ausgehend; wie viele Schritte ist er von E. noch entfernt, wenn A. daselbst bereits eingetroffen ist?

Da hier nur nach Schritten von B. gefragt wird, so kann man die von A. gemachten 9000 Schritte in Schritte von B. verwandeln, indem man sie mit $^2/_3$ multiplicirt, denn 1 Schritt von A. ist gleich $^2/_3$ Schritt von B. $9000 \times {}^2/_3 = 6000$ und die Hälfte $4500 = 3000$ Schritt von B. Nun sind

$^5/_6$ Schr. von A. = 1 Schr. von B.
$^3/_2$ „ „ A. = 1 „ „ B.
$\frac{15}{12}$ „ „ A. = 1 „ „ B.

Es sind also $\frac{15}{12} \times 3000$ Schritte, die A. macht, $= (6000 - x)\ 1$, die B. macht.

$$\frac{15}{12} \cdot 3000 = 6000 - x$$
$$45000 = 72000 - 12\,x$$
$$12\,x = 72000 - 45000$$
$$12\,x = 27000$$
$$x = \frac{27000}{12} = 2250 \text{ Schritte.}$$

B. hat also noch 2250 Schritte zu machen, bis er in E. eintrifft.

Man kann dies auch so rechnen:

A. macht $^{12}/_{15}$ Schritt, wenn B. 1 Schritt macht; hat B. die Hälfte der 6000 Schritte gemacht, dann hat A. von der anderen Hälfte $3000 \times \frac{12}{15} = 2400$ Schritte gemacht und also noch 600 Schritte bis E. zu machen. Während A. diese 600 Schritte macht, macht B. $600 \times \frac{15}{12} = 750$ Schritte; $3000 - 750 = 2250$ Schritte hat B. demnach noch zu machen, bis er in E. eintrifft.

17) Um 12 Uhr stehen die beiden Zeiger einer Uhr über einander; wann und wie oft werden dieselben in den nächsten 12 Stunden wieder über einander stehen, und wann geschieht dies zum 9ten Mal?

Wenn man die Minuten, die beide Zeiger durchlaufen, Schritte nennt, so macht der große Zeiger 60 Schritte (von 12 bis wieder 12), während der kleine Zeiger 5 Schritte (von 12 bis 1) macht. Es läuft also jener 12 mal schneller wie dieser, d. h. macht der große Zeiger 1 Schritt, dann macht der kleine Zeiger $^1/_{12}$ Schritt, und macht jener x Schritte, so macht dieser $\frac{x}{12}$ Schritte.

Steht nun der große Zeiger auf 12 und der kleine auf 1, so hat dieser einen Vorsprung von 5 Schritten.

Es ist also:

$$x = \frac{x}{12} + 5$$
$$12\,x = x + 60$$
$$12\,x - x = 60$$
$$11\,x = 60$$
$$x = \frac{60}{11} = 5^5/_{11} \text{ Schritte.}$$

Der große Zeiger holt also den kleinen $5^5/_{11}$ Schritte nach seinem Ablaufen von 12 ein, und der kleine hat dann $^5/_{11}$ Schritt über 1 gemacht; Beides giebt, der Uhrzeit nach, $5^5/_{11}$ Minuten nach 1 Uhr oder 1 Stunde $5^5/_{11}$ Minuten

nach 12 Uhr. Bei zweimaligem Umlauf giebt dies 1 Stunde $5^5/_{11}$ Minuten $\times$ 2 = 2 Uhr $10^{10}/_{11}$ Minuten; bei dreimaligem Umlauf 1 Stunde $5^5/_{11}$ Minuten $\times$ 3 = 3 Uhr $16^4/_{11}$ Minuten; bei elfmaligem Umgang 1 Stunde $5^5/_{11}$ Minuten $\times$ 11 = 12 Uhr. Die beiden Zeiger werden also in 12 Stunden 11 mal über einander zu stehen kommen. Zum 9ten Male treffen sie 1 Uhr $5^5/_{11}$ Minuten $\times$ 9 = 9 Uhr $49^1/_{11}$ Minuten über einander?

18) Um 6 Uhr bilden die beiden Zeiger einer Uhr eine gerade Linie, um 3 und 9 Uhr einen rechten Winkel; wann findet das wieder zum 1sten, 4ten und 11ten Male statt, und wie oft kann es überhaupt innerhalb 12 Stunden vorkommen?

Steht der große Zeiger auf 12, der kleine auf 6, so bilden beide eine gerade Linie; der große Zeiger durchläuft hierauf die ganzen 60 Minuten, ohne daß jene Stellung wieder eintritt. Der kleine Zeiger ist während dessen auf 7 gekommen; sobald nun der große Zeiger $5^5/_{11}$ Schritte (nach Beisp. 17) über 12 gemacht hat, hat der kleine Zeiger $^5/_{11}$ Schritt über 7, d. i. $5^5/_{11}$ Schritte über 6 gemacht, und beide bilden nun zum 1sten Mal wieder eine gerade Linie, also um 6 + 1 = 7 Uhr und $5^5/_{11}$ Minuten; zum 2ten Mal um 6 + 2 = 8 Uhr und 2 $\times$ $5^5/_{11}$ Minuten = $10^{10}/_{11}$ Minuten; zum 4ten Male um 6 + 4 = 10 Uhr und 4 $\times$ $5^5/_{11}$ Minuten, d. i. $21^9/_{11}$ Minuten; zum 11ten Male um 6 + 11 = 17, d. i. 5 Uhr und 11 $\times$ $5^5/_{11}$ = 60 Minuten, also um 6 Uhr.

Die Zeiger können also in 12 Stunden 11 mal diese Stellung annehmen.

Steht der große Zeiger auf 12 und der kleine auf 3, so bilden beide Zeiger einen rechten Winkel. Der große Zeiger durchläuft nun die ganzen 60 Minuten, ohne daß diese Stellung wieder eintritt; der kleine Zeiger ist dadurch auf 4 gekommen. Macht dieser nun $^5/_{11}$ Schritt über 4, also $5^5/_{11}$ Schritte über 3, so hat auch der große Zeiger $5^5/_{11}$ Schritte über 12 gemacht, und beide Zeiger bilden nun zum 1sten Mal wieder einen rechten Winkel, also um 3 + 1 = 4 Uhr und 1 $\times$ $5^5/_{11}$ Minuten; zum 2ten Mal um 3 + 2 = 5 Uhr und 2 $\times$ $5^5/_{11}$ = $10^{10}/_{11}$ Minuten; zum 4ten Mal um 3 + 4 = 7 Uhr und 4 $\times$ $5^5/_{11}$ = $21^9/_{11}$ Minuten; zum 11ten Mal um 3 + 11 = 14 = 2 Uhr und 11 $\times$ $5^5/_{11}$ = 60 Minuten, also um 3 Uhr. Es können mithin die beiden Zeiger in 12 Stunden 11 mal diese Stellung wieder einnehmen.

Ebenso verhält es sich mit der rechtwinkligen Stellung der beiden Zeiger um 9 Uhr.

19) Einem reitenden Boten, der alle 7 Stunden 9 Meilen macht, wird nach 8 Stunden ein Courier nachgesandt, welcher in 3 Stunden 5 Meilen macht; nach wie vielen Stunden holt derselbe den Boten ein?

Macht der Bote in 7 Stunden 9 Meilen, dann macht er in 1 Stunde $^9/_7$ Meilen, und macht der Courier in 3 Stunden 5 Meilen, dann macht er in 1 Stunde $^5/_3$ Meilen, also:

$$\frac{5}{3}x = \frac{9}{7}(x + 8)$$

$$5x = \frac{27}{7}(x + 8)$$

$$35x = 27x + 216$$

$$35x - 27x = 216$$

$$8x = 216$$

$$x = \frac{216}{8} = 27 \text{ Stunden.}$$

Der Courier macht in 27 Stunden 27 $\times$ $^5/_3$ = 45 Meilen; der Bote macht in 27 + 8 = 35 Stunden 35 $\times$ $^9/_7$ = 45 Meilen. Also treffen sie sich 27 Stunden nach Abgang des Couriers.

20) Ein Gefäß kann durch drei Röhren gefüllt und durch eine Zapfenöffnung geleert werden; durch die erste Röhre wird es in vier Stunden, durch die zweite Röhre in $3^1/_5$ Stunden gefüllt; von der dritten Röhre weiß man nur, daß sie $1^1/_2$ mal mehr Wasser giebt, als durch die Zapfenöffnung abfließt. Wenn nun das Gefäß, welches 80 Kubikfuß Wasser faßt, in $1^3/_5$ Stunden von den drei Röhren gefüllt wird, ungeachtet das Wasser aus der Zapfenöffnung abfließt, wieviel Kubikfuß Wasser gab die dritte Röhre und wieviel Wasser floß durch die Zapfenöffnung ab?

1ste Röhre füllt in 4 Stunden 1 Gefäß, also in 1 Stunde $^1/_4$ Gefäß
2te Röhre füllt in $3^1/_5$ Stunden 1 Gefäß, also in 1 Stunde $^5/_{16}$ Gefäß
zusammen $^9/_{16}$ Gefäß

$^9/_{16}$ Gefäß sind $80 \times \frac{9}{16} = 45$ Kubikfuß in 1 Stunde; in $1^3/_5$ Stunden also $45 \times 1^3/_5 = 72$ Kubikfuß. Sind nun x Kubikfuß Wasser durch die Zapfenöffnung abgeflossen, so sind durch die dritte Röhre $1^1/_2\,x$ oder $^3/_2\,x$ Kubikfuß Wasser zugeflossen, also:

$$72 + {}^3/_2\,x - x = 80$$
$$144 + 3x - 2x = 160$$
$$x = 160 - 144 = 16 \text{ Kubikfuß.}$$

Es sind mithin durch die Zapfenöffnung 16 Kubikfuß Wasser abgeflossen und durch die dritte Röhre $16 \cdot {}^3/_2 = 24$ Kubikfuß zugeflossen.

21) Es sollen 408 Thlr. mit Friedrichsd'or à $5^2/_3$ Thlr. und Dukaten à $3^1/_6$ Thlr. gerade ausbezahlt werden; wie oft kann dies geschehen und wieviel Friedrichsd'or und Dukaten sind jedesmal erforderlich?

Es sind jedesmal x Friedrichsd'or und y Dukaten erforderlich, also:

$$5^2/_3\,x + 3^1/_6\,y = 408$$
$$\frac{17x}{3} + \frac{19y}{6} = 408$$
$$34x + 19y = 2448$$
$$34x = 2448 - 19y$$
$$x = \frac{2448 - 19y}{34}$$
$$x = \frac{2448}{34} - \frac{19y}{34}$$
$$x = 72 - \frac{19y}{34}.$$

Nimmt man nun an:

$y = 1$ mal $34 = 34$, so ist
$x = 72 - 19 = 53$ Friedrichsd'or 34 Dukaten;
$y = 2$ mal $34 = 68$, so ist
$x = 72 - 38 = 34$ Friedrichsd'or 68 Dukaten;
$y = 3$ mal $34 = 102$, so ist
$x = 72 - 57 = 15$ Friedrichsd'or 102 Dukaten.

$y = 4$ mal 34 geht nicht mehr. Es kann mithin diese Zahlung so oft verschieden geschehen, als die mit y verbundene Zahl (hier 19) in der ersten Zahl der rechten Seite (hier 72) ganz enthalten ist, d. i. 3 mal.

Zu bemerken ist, daß diese Art Aufgaben nur dann gelöst werden können, wenn die mit x verbundene Zahl (hier 34) in der ersten Zahl rechts (hier 2448) ohne Bruch aufgeht.

22) Es hat Jemand 2 Tabatieren: legt er in die erste 10 Thlr., so ist sie halb so viel werth wie die zweite; legt er die 10 Thlr. in die zweite, so ist sie 4 mal so viel werth als die erste. Welchen Werth hatte jede?

Ist die eine Tabatiere x Thlr. werth, so ist die andere y Thlr. werth.

Zu zwei unbekannten Zahlen sind immer zwei verschiedene Gleichungen erforderlich; aus der einen wird x oder y entwickelt und der dafür gefundene Werth in die andere Gleichung gesetzt.

Grundgleichungen $\begin{cases} \text{I. } x + 10 = \frac{y}{2} \\ \text{II. } y + 10 = 4x \end{cases}$

Aus I. $x + 10 = \frac{y}{2}$

$2x + 20 = y$

In II. gesetzt $2x + 20 + 10 = 4x$

($2x + 20$ für y) $30 = 4x - 2x$

$2x = 30$

$x = 15$ Thlr.

$y = 2 \,.\, 15 + 20 = 50$ Thlr.

Die eine Tabatiere war also 15, die andere 50 Thlr. werth.

23) Es giebt einen Bruch, der, wenn man vom Zähler 1 abzieht, $^1/_3$, und wenn man vom Nenner 1 abzieht, $^1/_2$ ist; welcher Bruch ist dies?

Ist der Bruch $\frac{x}{y}$, so ist

I. $\frac{x - 1}{y} = {}^1/_3$

II. $\frac{x}{y - 1} = {}^1/_2$

Aus I. $x - 1 = \frac{y}{3}$

$3x - 3 = y.$

Werth von y in II. gesetzt

$\frac{x}{3x - 3 - 1} = {}^1/_2$

$x = \frac{3x - 4}{2}$

$2x = 3x - 4$

$2x - 3x = -4$

$-x = -4$

$x = 4$

Also $x = 4$ und $y = 3 \,.\, 4 - 3 = 9$; mithin ist der Bruch $\frac{4}{9}$.

24) A. und B. besitzen zusammen ein Vermögen von 16500 Thlrn. A. giebt zu einem Handelsgeschäft den 3ten Theil, B. den 5ten Theil seines Vermögens, und Beide behalten gleich viel übrig; wieviel Vermögen hatte Jeder?

Ist das Vermögen des A. x und das des B. y, so bleibt $^1/_3$ von $x = {}^2/_3 x$ und $^1/_5$ von $y = {}^4/_5 y$ übrig; beide Reste sind gleich, also:

I. $^2/_3 x = {}^4/_5 y$

II. $x + y = 16500$

Aus I. $x = {}^3/_2 \,.\, {}^4/_5 = {}^6/_5 y$

$^6/_5 y$ in II. gesetzt $\begin{cases} {}^6/_5 y + y = 16500 \\ 6y + 5y = 82500 \end{cases}$

$y = \frac{82500}{11} = 7500$ Thlr.

B. hatte also 7500 Thlr. und A. $16500 - 7500 = 9000$ Thlr. Es hätte auch aus der 1sten Grundgleichung y statt x entwickelt werden können, dann hätte man zuletzt $x = 9000$ Thlr. erhalten.

25) A., B. und C. wollen 4000 Thlr. zu einem Geschäft zusammenlegen; dies kann geschehen, wenn A. sein ganzes Vermögen, B. $^1/_9$ und C. $^1/_7$ des seinigen giebt; oder wenn B. sein ganzes Vermögen, A. $^1/_{16}$ und C. $^1/_{14}$ des

seinigen giebt; oder wenn C. sein ganzes Vermögen, A. $^1/_4$ und B. $^1/_9$ des seinigen giebt. Wieviel Vermögen hat Jeder?

Das Vermögen von A. sei x, von B. y und von C. z.

Bei drei unbekannten Zahlen müssen auch drei verschiedene Grundgleichungen sein, damit y und z aus zwei verschiedenen Gleichungen entwickelt und in die dritte gesetzt werden können.

Grundgl. $\text{I. } x + \frac{y}{9} + \frac{z}{7} = 4000$

$$\text{II. } y + \frac{x}{16} + \frac{z}{14} = 4000$$

$$\text{III. } z + \frac{x}{4} + \frac{y}{9} = 4000$$

Erste Gleichung.

I. und III. gleichgestellt und z entwickelt:

$$x + \frac{y}{9} + \frac{z}{7} = z + \frac{x}{4} + \frac{y}{9}$$

$$x - \frac{x}{4} + \frac{y}{9} - \frac{y}{9} = z - \frac{z}{7}$$

$$\frac{3x}{4} = \frac{6z}{7}$$

$$21x = 24z$$

$$z = \frac{21x}{24} = \frac{7x}{8}.$$

Zweite Gleichung.

I. und II. gleichgestellt und daraus y entwickelt; für z wird $\frac{7x}{8}$ gesetzt.

$$x + \frac{y}{9} + \frac{7x}{8 \cdot 7} = y + \frac{x}{16} + \frac{7x}{8 \cdot 14}$$

$$x + \frac{x}{8} - \frac{x}{16} - \frac{x}{16} = y - \frac{y}{9}$$

$$16x + 2x - x - x = 16y - \frac{16y}{9}$$

$$16x = \frac{128y}{9}$$

$$x = \frac{128y}{9 \cdot 16} = \frac{8y}{9}$$

$$9x = 8y$$

$$y = \frac{9x}{8}.$$

Dritte Gleichung.

Den Werth für y und z in I. gesetzt:

$$x + \frac{9x}{8 \cdot 9} + \frac{7x}{8 \cdot 7} = 4000$$

$$x + \frac{x}{8} + \frac{x}{8} = 4000$$

$$8x + x + x = 32000$$

$$10x = 32000$$

A. $= x = 3200$ Thlr.

B. $= y = 3200 \cdot \frac{9}{8} = 3600$ Thlr.

C. $= z = 3200 \cdot \frac{7}{8} = 2800$ Thlr.

XXI. Die Logarithmen und ihre Anwendung.

A. Entstehung der Logarithmen.

§ 212.

Das Produkt aus zwei oder mehreren gleichen Zahlen (Factoren) wird eine Potenz genannt. Die mit sich selbst multiplicirte Zahl (Factor) heißt die Grundgröße oder die Wurzel; diejenige Zahl, welche anzeigt, wie oft die Grundgröße mit sich selbst multiplicirt worden ist, wird der Exponent genannt.

25 ist die 2te Potenz von 5, weil 5, zweimal als Factor gesetzt, $5 \times 5 = 25$ ist; 64 ist die 3te Potenz von 4, weil 4, dreimal als Factor gesetzt, $4 \times 4 \times 4 = 64$ ist. Von der Potenz 25 ist also 5 die Wurzel oder die Grundgröße und 2 der Exponent; von 64 ist 4 die Wurzel und 3 der Exponent.

Um anzudeuten, daß eine Zahl zu einer gewissen Potenz erhoben werden soll, setzt man den Exponenten rechts neben die Zahl; also $5^2 = 5 \times 5 = 25$; $4^3 = 4 . 4 . 4 = 64$; $3^4 = 3 . 3 . 3 . 3 = 81$ u. s. w. Man liest dies: 5 zur 2ten Potenz oder 5 zur zweiten; 4 zur 3ten Potenz oder 4 zur dritten u. s. w. Die 2te Potenz wird auch das Quadrat, die dritte der Kubus und die 4te das Biquadrat genannt.

Will man die Grundgröße oder die Wurzel aus einer Potenz suchen, welches man das Wurzelausziehen oder Radiciren nennt, so setzt man vor die Potenz ein Zeichen (Wurzelzeichen), das dem lateinischen r (von radix, die Wurzel) ähnlich ist. Bei der 2ten Potenz wird das bloße Zeichen geschrieben, bei allen übrigen Potenzen aber noch eine kleine Zahl über das Wurzelzeichen gesetzt, welche der Wurzelexponent genannt wird und anzeigt, die wievielte Wurzel aus der Potenz gezogen werden soll; bei der 2ten Potenz ist der Wurzelexponent 2, welcher aber, wie schon bemerkt, nicht hingeschrieben wird.

§ 213.

a) Wenn man Potenzen mit gleichen Grundgrößen multipliciren soll, so hat man nur nöthig, die Exponenten zu addiren.

$3^2 \times 3^3 = 3^{3+2} = 3^5$

Es ist nämlich:

$3^2 = 9$; $3^3 = 27$, also
$3^5 = 9 \times 27 = 243$ und
$3^5 = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 243$.

b) Wenn man Potenzen mit gleichen Grundgrößen in einander dividiren soll, so hat man nur nöthig, den Exponenten des Divisors von dem des Dividendus zu subtrahiren.

$3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$

Es ist nämlich:

$3^5 = 243$; $3^2 = 9$
$243 : 9 = 27$
$3^3 = 27$.

c) Sollen Potenzen zu Potenzen erhoben werden, so multiplicirt man mit dem neuen Exponenten den Exponenten der Potenz.

$(3^2)^3 = 3^6$ und $(3^3)^2 = 3^6$

Es ist:

$3^2 = 9$ und $9^3 = 729$
$3^3 = 27$, und $27^2 = 729$
$3^6 = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 729$.

d) Soll aus einer Potenz die Wurzel gezogen werden, so dividirt man mit dem Wurzelexponenten den Exponenten der Potenz.

$\sqrt{3^6} = 3^{6/2} = 3^3 = 27$

$\sqrt[3]{3^6} = 3^{6/3} = 3^2 = 9.$

Es ist nämlich nach c, $(3^2)^3 = 3^6$, es muß also auch wieder $\sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 3^{6/3} = 9$ sein; ebenso ist nach c, $(3^3)^2 = 3^6$, es muß also auch wieder $\sqrt{3^6} = 3^3 = 3^{6/2} = 27$ sein.

Aus d sieht man, daß auch ein Bruch als Exponent einer Potenz erscheinen kann, und daß man die Potenz findet, indem man den Nenner des Bruches als Wurzelexponenten, und den Zähler als Exponenten der Potenz betrachtet.

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ und } 32^{2/5} = \sqrt[5]{32^2} = \sqrt[5]{1024} = 4.$$

$^2/_3$ und $^2/_5$ kann man auch als Decimalbrüche, 0,666 und 0,4 schreiben, und dann ist $8^{0,666}$ oder $32^{0,4} = 4$.

Daraus geht hervor, daß man 4 als eine Potenz betrachten kann, von welcher 8 die Wurzel und 0,666 der Exponent, oder 32 die Wurzel und 0,4 der Exponent ist.

§ 214.

Wie in § 213 gefunden ist, daß $4 = 8^{0,666}$ ist, so hat man in ähnlicher Weise für alle Zahlen die Potenzen berechnet, wobei jedoch 10 als die Wurzel oder Grundgröße angenommen worden ist. Danach ist $2 = 10^{0,3010300}$, $3 = 10^{0,4771213}$, $4 = 10^{0,6020600}$ u. s. w.

Diese Arbeit, die schon im Anfange des 17ten Jahrhunderts John Neper, ein Schottländer, und fast um dieselbe Zeit Jobst Byrg, ein Deutscher, sowie etwas später Henry Briggs, ein Engländer, unternommen haben, ist von sehr großem Nutzen für das Rechnen. Man hat deshalb die Exponenten, welche Briggs für die Grundgröße 10 berechnete, und die die Briggs'schen Logarithmen genannt werden, in Tafeln (Logarithmentafeln) zusammengestellt. Die gebräuchlichste Tafel der Art ist die von Vega.

B. Nutzen der Logarithmen.

a) Beim Multipliciren.

§ 215.

435 ist $= 10^{2,6384893}$ und 446 ist $= 10^{2,6493349}$. Da man nun nach a § 213, wenn die Grundgrößen der Potenzen gleich sind, nur die Exponenten zu addiren braucht, um die Potenzen zu multipliciren, so ist:

$435 \times 446 = 10^{2,6384893 + 2,6493349} = 10^{5,2878242}$; es ist aber $10^{5,2878242}$ = der Zahl 194010; mithin ist $435 \times 446 = 194010$.

In den Logarithmentafeln ist die Grundgröße 10 nicht angegeben, weil sie sich von selbst versteht; es sind nur die Exponenten hingeschrieben, welche, wie schon oben gesagt, Logarithmen genannt werden. Daher setzt man für das vorstehende Beispiel nur:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Log. } 435 = 2{,}6384893 \\ \text{Log. } 446 = 2{,}6493349\end{array}\right\}\text{ addirt}$$
$$5{,}2878242$$
$$\text{Num. log. } 5{,}2878242 = 194010.$$

Num log. wird gelesen: numerus logarithmus, d. h. die zu dem Logarithmus gehörige Zahl.

Die bei jedem Logarithmus links vom Komma stehende Ziffer wird die Kennziffer, die rechts stehende die Mantisse genannt. Die Kennziffer zeigt an, wieviel Ziffern die gesuchte Zahl enthalten muß, und zwar immer eine Ziffer mehr als die Kennziffer beträgt. Da nämlich die Grundgröße der Logarithmen 10 ist, so sind die Potenzen der Zahlen unter 10 gleich 0 mit einem Decimalbruch, von 10 bis 99 gleich 1 mit einem Decimalbruch, von 100 bis 999 gleich 2 mit einem Decimalbruch u. s. w. Es ist also die Kennziffer für eine einziffrige Zahl 0, für eine zweiziffrige 1, für eine dreiziffrige 2 u. s. w. Folglich auch umgekehrt: ist die Kennziffer 0, dann muß die zu suchende Zahl aus einer Ziffer (ohne die Decimalen) bestehen; ist die Kennziffer 1, so muß die Zahl aus 2 Ziffern, und bei der Kennziffer 2 aus 3 Ziffern bestehen 2c.

Aus dem Vorstehenden geht hervor:

Wenn zwei Zahlen multiplicirt werden sollen, so sucht man zu jeder den Logarithmus, addirt die beiden Logarithmen und sucht zu der Summe derselben die Zahl; diese ist das Produkt der beiden gegebenen Zahlen.

b) Beim Dividiren.

§ 216.

877030 ist $= 10^{5,9430144}$ und 2345 ist $= 10^{3,3701428}$. Soll die erste Zahl durch die 2te dividirt werden, so darf man nur, nach b § 213, die Exponenten der Potenzen subtrahiren, also:

$877030 : 2345 = 10^{5,9430144 - 3,3701428} = 10^{2,5728716}$. Es ist aber $10^{2,5728716} = 374$, also ich auch $877030 : 2345 = 374$.

Die Grundzahl 10 fortgelassen, giebt:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Log. } 877030 = 5{,}9430144 \\ \text{Log. } 2345 = 3{,}3701428\end{array}\right\}\text{ subtrahirt}$$
$$2{,}5728716$$
$$\text{Num. log. } 2{,}5728716 = 374.$$

Aus Vorstehendem geht hervor:

Wenn 2 Zahlen in einander dividirt werden sollen, so sucht man zu beiden den Logarithmus und zieht den des Divisors von dem des Dividendus ab; der Differenz-Logarithmus in eine Zahl verwandelt, giebt den gesuchten Quotienten.

c) Beim Potenziren.

§ 217.

348 ist $= 10^{2,5415792}$. Soll nun 348 oder, was dasselbe ist, $10^{2,5415792}$ zur dritten Potenz erhoben werden, so darf man, nach c § 213, nur den Exponenten der Potenz mit 3 multipliciren; dies giebt:

$10^{2,5415792 \times 3} = 10^{7,6247376}$; $10^{7,6247376}$ ist aber $= 42144192$; also ist $348^3 = 42144192$.

Die Grundzahl 10 fortgelassen, giebt:

$$\text{Log. } 348 = 2,5415792 \times 3$$
$$7,6247376$$
$$\text{Num. log. } 7,6247376 = 42144192 = 348^3.$$

Daraus geht hervor:

Will man eine Zahl zu irgend einer Potenz erheben, so sucht man zu der Zahl den Logarithmus, multiplicirt diesen mit dem gegebenen Exponenten und sucht zu dem daraus entstehenden Logarithmus die Zahl, welche die Potenz der gegebenen Zahl ist.

d) Beim Radiciren.

§ 218.

2460375 ist $= 10^{6,3910013}$. Soll nun aus 2460375 die 3te Wurzel gezogen werden, so ist nach d. § 213 $\sqrt[3]{2460375} = \sqrt[3]{10^{6,3910013}} = 10^{\frac{6,3910013}{3}} = 10^{2,1303338}$; $10^{2,1303338}$ ist aber $= 135$; also ist $\sqrt[3]{2460375} = 135$.

Die Grundgröße 10 fortgelassen, giebt:

$$\text{Log. } 2460375 = 6,3910013 : 3$$
$$2,1303338$$
$$\text{Num. log. } 2,1303338 = 135.$$

Daraus folgt:

Soll aus einer Zahl die Wurzel gezogen werden, so sucht man den Logarithmus zu der Zahl, dividirt diesen durch den Wurzelexponenten und sucht zu dem Quotient-Logarithmus die Zahl, welche die Wurzel der gegebenen Zahl ist.

C. Gebrauch der Vega'schen Logarithmentafel.

§ 219.

Wer die Vega'sche Logarithmentafel besitzt, der kann in derselben zwar auch über ihren Gebrauch das Nöthige lesen, aber da dort viel mehr gesagt ist, als dem vorliegenden Zwecke nach zu wissen nöthig ist, Manchem auch wohl das Gesagte nicht gleich verständlich genug erscheint, so ist im Folgenden nicht allein das Verfahren gezeigt, wie der Logarithmus aus der Zahl und umgekehrt die Zahl aus dem Logarithmus gesucht wird, sondern auch wie die Multiplication, die Division, die Potenzirung und Radicirung nach der Vega'schen Logarithmentafel speciell ausgeführt wird.

a) Bei der Multiplication.

§ 220.

1) Will man die Zahlen 4783746 und 5456894 mit einander multipliciren, so sucht man zuerst in der Vega'schen Tafel Seite 81 die Zahl 4783 in der mit N bezeichneten Spalte und schreibt den daneben etwas höher stehenden ersten Theil der Mantisse 679 nieder; vor dieselbe, durch ein Komma getrennt, wird die Kennziffer 6 gesetzt, weil die Zahl 4783746 aus 7 Ziffern besteht (§ 215). In der Zahl 4783746 folgt nun nach 4783 die 7. Man sieht in der Logarithmentafel (Seite 81) oben die Zahlen 0 bis 9; in der Spalte 7 geht man herunter, bis man mit 4783 in gleiche Linie kommt, und findet hier die Zahl 7639, welche der vorhin gefundenen 679 zugefügt wird, so daß also jetzt der Logarithmus 6,6797639 ist. In der Zahl 4783746 folgt nun die 4; für diese findet man in der Spalte P. P. (Proportionaltheile) den Proportionaltheil 36; er wird zu

6,6797639 addirt
36; dies giebt den
Logarithmus 6,6797675.

In der gegebenen Zahl folgt jetzt die 6; für 6 findet man in der Spalte P. P. den Proportionaltheil 54, welcher so zu dem vorigen Logarithmus addirt wird, daß eine Ziffer rechts heraustritt, also:

6,6797675
54. Der richtige Logarithmus
ist demnach 6,67976804.

Enthält die gegebene Zahl noch mehrere Ziffern, so wird für jede folgende Ziffer der Proportionaltheil so hinzu addirt, wie es für die 6 geschehen ist, d. h. bei zwei und drei Ziffern des Proportionaltheils rückt immer eine Ziffer rechts heraus; besteht jedoch der Proportionaltheil nur aus einer Ziffer, so wird diese rechts angehängt.

In derselben Weise sucht man den Logarithmus für 5456894, Seite 95 der Logarithmentafel:

für 5456 = 6,736 (Kennziffer 6 vorgesetzt)
8 = - 9380 (Spalte 8)
9 = 72 } Spalte P. P.
4 = 32 }
Log. 5456894 = 6,73694552 dazu nach § 215 der vorhin gefundene
Logarithmus 6,67976804 giebt
Logarithmus 13,41671356.

Zu diesem Logarithmus findet man die Zahl in folgender Art:

Man läßt die Kennziffer außer Acht und sucht in der Logarithmentafel unter den vorgedruckten drei ersten Ziffern der Mantisse die Zahl 416, welche man Seite 38 findet; eben da sucht man in den Spalten daneben die folgenden Ziffern 71356. Diese sind genau nicht vorhanden, dagegen findet sich in der Spalte 4 die nächst niedere Zahl 7071, welche von 71356 abgezogen wird. Für die Mantisse 4167071 gilt nun die links in der Spalte N (numerus) in gleicher Höhe mit 7071 stehende Zahl 2610, und da 7071 in der Spalte 4 steht,

26104. 7071 von 71356 abgezogen, giebt die Differenz 64, welche, in der Spalte P. P. gesucht, nicht vorhanden ist, dagegen die nächst niedere 50, und diese giebt die Zahl 3, die der vorhin gefundenen 26104 zugefügt wird. 50 von 64 läßt 14, und 6 von oben giebt 146; 146 in der Spalte P. P. gesucht, ist nicht vorhanden, die niedere 134 giebt die Zahl 8, welche wieder der vorhin gefundenen 261043 zugefügt wird; 134 von 146 läßt 12, und da oben weiter keine Ziffer vorhanden ist, so hängt man der 12 eine Null an; 120 in der Spalte P. P. gesucht, ist nicht vorhanden, dagegen 116, welche die Zahl 7 giebt; für den folgenden Rest 4 mit der angehängten Null 40, nimmt man den nächst höheren Proportionaltheil 50, der die Zahl 3 giebt.

```
41671356
   7071    = 26104
     64
     50    =      3
     146
     134   =       8
      120
      116  =        7
        40
        50 =         3
           261043873
```

In dieser Weise kann man noch lange fortfahren Zahlen zu suchen, indem man jedem Reste eine Null anhängt; man thut dies gewöhnlich aber nur bis zur 7ten oder 8ten Stelle, welche man nach dem nächst höheren Proportionaltheil bestimmt, weil von da ab die gefundenen Zahlen nicht mehr ganz richtig sind. Da nun aber die Kennziffer des Logarithmus 13 ist, so muß die zu suchende Zahl aus 14 Ziffern bestehen, es müssen also den gefundenen 9 Ziffern noch 5 Nullen angehängt werden, was die Zahl 26104387300000 giebt. Es wird indeß sogleich Jedem auffallen, daß das Produkt hinten Nullen hat, also nicht richtig sein kann; dasselbe ist auch wirklich nicht das genaue Produkt, wie man es durch die Multiplication beider Factoren erhält, denn diese giebt 26104394844924. Man sieht also, daß die 7te Stelle schon nicht mehr stimmt; sie würde jedoch noch stimmen, wenn man bei der Differenz 146 statt 134 den nächst höheren Proportionaltheil 150 genommen hätte, der die Zahl 9 giebt. Die übrigen 7 Ziffern wären dann Nullen.

So große ganze Zahlen zu multipliciren, ohne daß dabei zugleich auch eine Division stattfände, kommt höchst selten vor; sie sind hier nur angenommen, um recht ausführlich zu zeigen, wie mit den Proportionaltheilen zu verfahren ist. Dagegen kommen Decimalbrüche mit so vielen Ziffern sehr häufig vor, und dann ist das Multipliciren derselben durch Logarithmen fast immer mit der wirklichen Multiplication übereinstimmend und viel richtiger, als wenn man die Decimalbrüche nach dem Verfahren § 82 abkürzt.

2) Die beiden Decimalbrüche 243,5768 und 36,4684 sollen mit einander multiplicirt werden.

Man läßt die Kommas außer Acht und betrachtet die Decimalbrüche als ganze Zahlen, indem man mit ihnen ebenso, wie es vorhin gezeigt worden ist, verfährt; nur wird die Kennziffer bei ihnen nicht nach allen Ziffern, wie bei den ganzen Zahlen, sondern nur nach der Anzahl Ziffern, aus der die Ganzen der Decimalbrüche bestehen, bestimmt.

```
(Seite 34.) Log. 2435   = 2,386 (Kennziffer 2 von 243 Ganze § 215.)
                   7    =     6238
                   6    =      107
                   8    =      143
             2435768    = 2,38663593
```

(Seite 58.) Log. 3646 = 1,561 (Kennziffer 1 von 36 Ganze § 215.)
8 = 9119
4 = 48
364684 = 1,5619167 } addirt
Dazu von oben 2,38663593 }
(Seite 163.) Num. log. 3,94855263
5499 = 88828
27
24 = 5
33
29 = 6
40 = 8
8882,8568

Das Produkt beider Decimalbrüche durch die Multiplication gefunden, giebt 8882,8562.

3) Die beiden Decimalbrüche 1079,2868 und 10,465746 sollen mit einander multiplicirt werden.

Man sucht zu den Zahlen, die vorn eine **Eins** mit einer **Null** haben, den Logarithmus Seite 181 bis 201, weil die Logarithmen hier ein genaueres Resultat geben, als Seite 6 und 7.

(Seite 201.) Log. 10792 = 3,0331 (Kennziffer 3 für 1079 Ganze.)
8 = 3413
6 = 241
8 = 322
10792868 = 3,033136862

(Seite 195.) Log. 10465 = 1,0197 (Kennziffer 1 für 10 Ganze.)
7 = 6828
4 = 166
6 = 249
10465746 = 1,019770189
Dazu von oben 3,033136862
(Seite 8.) Num. log. 4,052907051
8862 = 11295
208
194 = 5
145
116 = 3
291
310 = 8
11295,538

Das Produkt beider Decimalbrüche durch die Multiplication gefunden, giebt ebenfalls 11295,538.

b) Bei der Division.

§ 221.

Das Aufsuchen der Logarithmen zu den gegebenen Zahlen, und umgekehrt, das Aufsuchen der Zahlen zu den gefundenen Logarithmen geschieht ebenso, wie es bei der Multiplication gezeigt worden ist, nur daß hier nicht wie dort die Logarithmen addirt werden, sondern nach § 216 der Logarithmus des Divisors von dem des Dividendus abgezogen wird, worauf dann die zu der Differenz gesuchte Zahl den Quotienten giebt.

1) Sollen die beiden Zahlen 4783746 und 5456894 erst mit einander multiplicirt und das Produkt dann durch 8765498 dividirt werden, so ist nach § 220:

Log. 4783746 = 6,67976804 (addirt)
Log. 5456894 = 6,73694552
13,41671356 (subtrahirt)
(Seite 161.) Log. 8765498 = 6,94277660
(Seite 45.) Num. log. 6,47393696 = 2978084.

Die wirklich ausgeführte Multiplication und Division giebt ebenfalls 2978084; man sieht also, daß da, wo bei der Multiplication großer Zahlen auch die Division vorkommt, die Anwendung der Logarithmen von großem Vortheile ist.

2) Der Decimalbruch 576,83 soll durch den Decimalbruch 95,877 dividirt werden.

(Seite 101.) Log. 576,83 = 2,7610478 (subtrahirt)
(Seite 177.) Log. 95,877 = 1,9817144
(Seite 106.) Num. log. 0,7793334 = 6,016353.

Die Kennziffer 0 giebt eine Ziffer als Ganze (§ 215). Dasselbe Resultat erhält man bei der wirklichen Division.

c) Bei der Potenzirung.

§ 222.

Das Potenziren mittelst Logarithmen ist vortheilhaft bei 3=ziffrigen Zahlen zur 2ten Potenz und bei allen Decimalbrüchen. Bei 3=ziffrigen Zahlen zur 3ten Potenz und bei 4= und mehrziffrigen Zahlen zur 2ten und 3ten Potenz ist es nicht immer anzuwenden, wenn man die Potenz ganz genau haben will, weil nach § 220 die 8te, oft schon die 7te Stelle nicht mehr richtig ist. Dagegen wird man immer Logarithmen anwenden, wenn der Exponent der Potenz eine hohe einziffrige oder eine zwei= oder mehrziffrige Zahl ist.

1) 535 soll zur 2ten Potenz erhoben werden, d. i. 535^2.

(Seite 4.) Log. 535 = 2,7283538 × 2 (§ 217.)
(Seite 43.) Num. log. 5,4567076 = 286225.

Da die Kennziffer 5 ist, so bilden sämmtliche 6 Ziffern die ganze Zahl. 535 × 535 giebt, multiplicirt, ebenfalls 286225.

2) 3848 soll zur 2ten Potenz erhoben werden, d. i. 3848^2.

(Seite 62.) Log. 3848 = $\underline{3{,}5852351} \times 2$ (§ 217.)

(Seite 15.) Num. log. 7,1704702 = 14807107

3848×3848 giebt 14807104; es weicht die 8te Stelle also um 3 ab.

3) 342 soll zur 3ten Potenz erhoben werden, d. i. 342^3.

(Seite 3.) Log. 342 = $\underline{2{,}5340261} \times 3$ (§ 217.)

(Seite 66.) Num. log. 7,6020783 = 40001692.

$342 \times 342 \times 342$ giebt 40001688; die 7te Stelle differirt also schon um 1.

4) 5,464767 soll zur 2ten Potenz erhoben werden, d. i. $5{,}464767^2$.

(Seite 95.) Log. 5,464767 = $\underline{0{,}73757166} \times 2$ (§ 217.)

(Seite 45.) Num. log. 1,47514332 = 29,86368 oder

= 29,864 (§ 82.)

welches Resultat man durch die langwierige Multiplication des Decimalbruches mit sich selbst ebenfalls erhält.

5) 2,5746 soll zur 12ten Potenz erhoben werden, d. i. $2{,}5746^{12}$.

(Seite 37.) Log. 2,5746 = $\underline{0{,}4107098} \times 12$ (§ 217.)

(Seite 155.) Num. log. 4,9285176 = 84823,78.

2,5746 mit sich selbst 12 mal multiplicirt, giebt dieselbe Zahl.

6) 1,05 soll zur 50sten Potenz erhoben werden, d. i. $1{,}05^{50}$.

(Seite 1.) Log. 1,05 = $\underline{0{,}0211893} \times 50$ (§ 217.)

(Seite 8.) Num. log. 1,0594650 = 11,4674.

Wenn man 1,05 mit sich selbst 50 mal multiplicirt, so erhält man, nach der üblichen Abkürzung, genau dieselbe Potenz.

d) Bei der Radicirung.

§ 223.

Ist die Zahl, aus der die Wurzel gezogen werden soll, eine ganze Zahl, so wird man, wenn dieselbe nur aus 6 Ziffern besteht, beim Ausziehen jeder Wurzel die Logarithmen anwenden; besteht sie aber aus mehr als 6 Ziffern, und man erwartet wieder eine ganze Zahl als Wurzel, so wendet man beim Ausziehen der 2ten und 3ten Wurzel das Verfahren an, welches weiter hinten § 239 gezeigt ist. Ist jedoch aus einem Decimalbruch irgend eine Wurzel zu ziehen, so wendet man immer die Logarithmen an; ebenso bei jeder anderen Zahl, wenn der Wurzelexponent kein Vielfaches von 2 oder 3 ist, also wenn die 5te, 7te, 11te, 13te u. s. w. Wurzel ausgezogen werden soll.

1) Aus 286225 soll die Quadratwurzel (2te Wurzel) gezogen werden, d. i. $\sqrt{286225}$.

(Seite 43.) Log. 286225 = $\underline{5{,}4567076 : 2}$ (§ 218.)
Num. log. 2,7283538 = 535,0.

Also $\sqrt{286225} = 535$. Nach § 239 die Wurzel ausgezogen, giebt ebenfalls 535.

2) Es soll aus 14807104 die 2te Wurzel gezogen werden, d. i. $\sqrt{14807104}$

(Seite 15.) Log. 14807104 = $\underline{7{,}170470117 : 2}$ (§ 218.)
(Seite 62.) Num. log. 3,585235058 = 3847,999.

Nach § 239 die Wurzel ausgezogen, giebt 3848.

3) Es soll die Kubikwurzel (3te Wurzel) aus 40001688 gezogen werden, d. i. $\sqrt[3]{40001688}$.

(Seite 66.) Log. 40001688 = $\underline{7{,}602078257 : 3}$ (§ 218.)
(Seite 54.) Num. log. 2,534026085 = 341,999.

Nach § 243 die 3te Wurzel ausgezogen, giebt 342.

Man sieht aus Beispiel 2 und 3, daß man auch bei größeren Zahlen die 2te und 3te Wurzel richtig trifft, wenn man zuletzt den entstehenden Decimalbruch, sobald er 99 oder 999 ist, als ein Ganzes annimmt.

4) Die 12te Wurzel soll aus 84823,78 gezogen werden, d. i. $\sqrt[12]{84823{,}78}$.

(Seite 155.) Log. 8482378 = $\underline{4{,}92851761 : 12}$ (§ 218.)
(Seite 37.) Num. log. 0,41070980 = 2,5746, welches die genaue 12te Wurzel aus vorstehendem Decimalbruch ist.

5) Die 50ste Wurzel soll aus 11,4674 gezogen werden, d. i $\sqrt[50]{11{,}4674}$.

(Seite 8.) Log. 114674 = $\underline{1{,}0594650 : 50}$ (§ 218.)
(Seite 7.) Num. log. 0,0211893 = 1,05.

1,05 ist die genaue 50ste Wurzel aus vorstehendem Decimalbruch.

D. Anwendung der Logarithmen.

a) Regeldetri mit Logarithmen.

§ 224.

1) Für 3 Groß 5 Dtzd. 7 Stück zahlt man 29 Thlr. 17 Sgr. 5 Pf.; was kosten 12 Groß 8 Dtzd. 3 Stück?

3 Groß 5 Dtzd. 7 Stück
× 12 (+ 5)
41 × 12 (+ 7)
499 Stück.

29 Thlr. 17 Sgr. 5 Pf.
× 30 (+ 17)
887 × 12 (+ 5)
10649 Pf.

12 Groß 8 Dtzd. 3 Stück
× 12 (+ 8)
152 Dtzd.
× 12 (+ 3)
1827 Stück.

Ansatz nach § 111 $\frac{10649 \cdot 1827}{449}$.

(Seite 198.) Log. 10649 = 4,02730883 } addirt
(Seite 22.) Log. 1827 = 3,2617385 }
7,28904733 } subtrahirt
(Seite 3.) Log. 499 = 2,6981005 }
(Seite 63.) Num. log. 4,59094683 = 38989,43 Pf.
: 12
3249 Sgr. 1 Pf.
: 30
108 Thlr. 9 Sgr. $1^{43}/_{100}$ Pf.

2) Für 47 Thlr. 19 Sgr. 7 Pf. kauft man 76 Pfd. 36 Neuloth; was wird man für 7 Ctr. 88 Pfd. 5 Neuloth zahlen müssen?

47 Thlr. 19 Sgr. 7 Pf.
× 30 (+ 19)
1429 Sgr.
× 12 (+ 7)
17155 Pf.

76 Pfd. 36 Neuloth
× 50
3800
36
3836 Neuloth.

7 Ctr. 88 Pfd. 5 Neuloth
788 × 50
39400 + 5
39405 Neuloth.

Ansatz nach § 111. $\frac{17155 \cdot 39405}{3836}$

(Seite 20.) Log. 17155 = 4,2343907 } addirt
(Seite 64.) Log. 39405 = 4,5955513 }
8,8299420 } subtrahirt
(Seite 62.) Log. 3836 = 3,5838786 }
(Seite 21.) Num. log. 5,2460634 = 176223,3 Pf. : 12
= 14685 Sgr. 3 Pf.
: 30
489 Thlr. 15 Sgr. $3^{3}/_{10}$ Pf.

3) 7 Ballen 6 Rieß 18 Buch 13 Bogen Druckpapier haben 114 Thlr. 23 Sgr. 7 Pf. gekostet; was werden von derselben Sorte Papier 9 Ballen 7 Rieß 13 Buch 18 Bogen kosten?

7 Ball. 6 Rieß 18 Buch 13 Bogen.
76 Rieß
—— × 20 (+ 18)
1538 Buch
—— × 25 (+ 13)
38463 Bogen.

114 Thlr. 23 Sgr. 7 Pf.
—— × 30 (+ 23)
3443 Sgr.
—— × 12 (+ 7)
41323 Pf.

9 Ballen 7 Rieß 13 Buch 18 Bogen
97 Rieß
—— × 20 (+ 13)
1953 Buch
—— × 25 (+ 18)
49843 Bogen.

Ansatz nach § 111. $\frac{41323 \,.\, 49843}{38463}$

(S. 68.) Log. 41323 = 4,6161918 } addirt
(S. 85.) Log. 49843 = 4,6976042 }
9,3137960 } subtrahirt
(S. 62.) Log. 38463 = 4,5850432 }
(S. 93.) Num. log. 4,7287528 = 53549,2 Pf. : 12
4462 Sgr. 5 Pf.
—— : 30
148 Thlr. 22 Sgr. $5\frac{1}{5}$ Pf.

b) Zinsrechnung mit Logarithmen.

§ 225.

1) Wieviel Zinsen bringen 1253 Thaler zu $3\frac{1}{2}$ % in 9 Monaten 13 Tagen?

(9 Monate 13 Tage sind 283 Tage.)

Ansatz nach § 183. $\frac{1253 \,.\, 7 \,.\, 283}{100 \,.\, 2 \,.\, 360} = \frac{8771 \,.\, 283}{72000}$

(S. 161.) Log. 8771 = 3,9430491 } addirt
(S. 3.) Log. 283 = 2,4517864 }
6,3948355 } subtrahirt
(S. 2.) Log. 72000 = 4,8573325 }
Num. log. 1,5375030 = 34,4749 Thlr.
= 34 Thlr. 14 Sgr. $2\frac{241}{250}$ Pf.

(Für 72000 wird der Logarithmus von 72 mit der Kennziffer 4 genommen.)

2) 2953 Guld. zu $4^3/_4$ % bringen in 11 Monaten 7 Tagen wieviel Zinsen?

(11 Monate 7 Tage = 337 Tage.)

Ansatz nach § 183. $\frac{2953 \,.\, 19 \,.\, 337}{100 \,.\, 4 \,.\, 360}$ (= 144000).

(S. 45.)	Log. 2953 =	3,4702634	addirt
(S. 2.)	Log. 19 =	1,2787536	
(S. 3.)	Log. 337 =	2,5276299	
		7,2766469	subtrahirt
(S. 2.)	Log. 144000 =	5,1583625	
(S. 12.)	Num. log.	2,1182844 = 131,306 = 131 Gld. $18^9/_{25}$ Kr.	

Aus vorstehenden beiden Beispielen, verglichen mit den Beispielen § 183, sieht man, daß schon bei der leichten Zinsrechnung, wo die Groschen nicht berücksichtigt werden und das Jahr zu 360 Tagen angenommen wird, eine bedeutende Erleichterung eintritt, wenn man mit Logarithmen rechnet; noch mehr zeigt sich diese, wenn die Groschen mit berücksichtigt werden müssen und das Jahr zu 365 Tagen gerechnet wird, wie es bei allen Behörden und in England auch im Geschäftsverkehr der Fall ist.

3) 375 Thlr. 13 Sgr. stehen vom 1sten April bis 8ten November zu $4^1/_3$ % aus; wieviel betragen die Zinsen, wenn die Monate nach ihren Tagen und das Jahr zu 365 Tagen angenommen wird? (375 Thlr. 13 Sgr. = 11263 Sgr.)

(Vom 1sten April bis 8ten November sind 221 Tage.)

Ansatz nach § 183. $\frac{11263 \,.\, 13 \,.\, 221}{100 \,.\, 3 \,.\, 365}$ (= 109500).

(S. 8.)	Log. 11263 =	4,0516541	addirt
(S. 2.)	Log. 13 =	1,1139434	
(S. 2.)	Log. 221 =	2,3442923	
		7,5099898	subtrahirt
(S. 7.)	Log. 109500 =	5,0394141	
(S. 45.)	Num. log.	2,4705757 = 295,512 Sgr.	
		= 9 Thlr. $25^{512}/_{1000}$ Sgr. = 9 Thlr. 25 Sgr. 6 Pf.	

4) 8475 Thlr. 27 Sgr. haben vom 2ten Januar 1860 bis 17ten Juli 1866 zu $4^3/_5$ % ausgestanden; wieviel betragen die Zinsen, wenn die Monate nach ihren Tagen und das Jahr zu 365 Tagen gerechnet wird?

(Vom 2ten Januar bis 17ten Juli sind 197 Tage, dazu 6 Jahre à 365 Tagen = 2190 Tage, macht zusammen 2387 Tage; 8475 Thlr. 27 Sgr. sind 254277 Sgr.)

Ansatz nach § 183 $\frac{254277 \,.\, 23 \,.\, 2387}{100 \,.\, 5 \,.\, 365}$ (= 182500).

(S. 36.)	Log. 254277 =	5,4053071	addirt
(S. 2 oder 32.)	Log. 23 =	1,3617278	
(S. 33.)	Log. 2387 =	3,3778524	
		10,1448873	subtrahirt
(S. 22.)	Log. 182500 =	5,2612629	
(S. 138.)	Num. log.	4,8836244 = 76493,47 Sgr.	
		= 2549 Thlr. 23 Sgr. 6 Pf.	

c) Gesellschaftsrechnung mit Logarithmen.

§ 226.

1) 3 Maurermeister A. B. und C. erhalten 2365 Thlr. zur Auszahlung an ihre Leute. A. hat 23 Gesellen 27 Tage, B. 25 Gesellen 29 Tage und C. 26 Gesellen 33 Tage zur Arbeit gestellt; wieviel erhält jeder Maurermeister?

27 × 23 = 621; 25 × 29 = 725; 26 × 33 = 858.

621 + 725 + 858 = 2204. Nach § 158.

Ansatz für A. $\frac{621 \,.\, 2365}{2204}$

Log. 621 = 2,7930916 } addirt
Log. 2365 = 3,3738311 }
6,1669227 } subtrahirt
Log. 2204 = 3,3432116 }
Num. log. 2,8237111
= 666,363
= 666 Thlr. 10 Sgr. 11 Pf.

Ansatz für B. $\frac{725 \,.\, 2365}{2204}$

Log. 725 = 2,8603380 } addirt
wie bei A. = 3,3738311 }
6,2341691 } subtrahirt
wie bei A. = 3,3432116 }
Num. log. 2,8909575
= 777,960
= 777 Thlr. 28 Sgr. 9 Pf.

Ansatz für C. $\frac{858 \,.\, 2365}{2204}$

Log. 858 = 2,9334873
wie bei A. = 3,3738311
6,3073184
wie bei A. = 3,3432116
Num. log. 2,9641068
= 920,676
= 920 Thlr. 20 Sgr. 4 Pf.

Es erhält demnach:

A.	666	Thlr.	10	Sgr.	11	Pf.
B.	777	„	28	„	9	„
C.	920	„	20	„	4	„
	2365	Thlr.	—	Sgr.	—	Pf.

2) Drei Kaufleute A. B. und C. haben zu einem gemeinschaftlichen Handel hergegeben: A. 2540 Thlr. am 13ten Januar 1863, B. 3480 Thlr. am 27sten Juni 1863 und C. 4530 Thlr. am 10ten September 1863. Am 8ten Juli 1864 ergiebt sich ein Gewinn von 3746 Thlrn.; wieviel erhält jeder von dem Gewinn, wenn das Jahr zu 365 Tagen und die Monate nach ihren Tagen gerechnet werden?

Vom 13ten Januar 1863 bis 8ten Juli 1864 sind 541 Tage; vom 27sten Juni 1863 bis 8ten Juli 1864 sind 376 Tage; vom 10ten September 1863 bis 8ten Juli 1864 sind 301 Tage.

A. 2540 × 541 = 1374140
B. 3480 × 376 = 1308480
C. 4530 × 301 = 1363530
4046150

Ansatz für A. $\frac{137414 \cdot 3746}{404615}$

Log. 137414 = 5,1380310
Log. 3746 = 3,5735678
8,7115988
Log. 404615 = 5,6070420
Num. log. 3,1045568
= 1272,20
= 1272 Thlr. 6 Sgr.

Ansatz für B. $\frac{130848 \cdot 3746}{404615}$

Log. 130848 = 5,1167672
wie bei A. = 3,5735678
8,6903350
wie bei A. 5,6070420
Num. log. 3,0832930
= 1211,42
= 1211 Thlr. 12 Sgr. 7 Pf.

Ansatz für C. $\frac{136353 \cdot 3746}{404615}$

Log. 136353 = 5,1346647
wie bei A. = 3,5735678
8,7082325
wie bei A. = 5,6070420
Num. log. 3,1011905
= 1262,38
= 1262 Thlr. 11 Sgr. 5 Pf.

Es erhält also:

A.	1272 Thlr.	6 Sgr.	
B.	1211 „	12 „	7 Pf.
C	1262 „	11 „	5 „
	3746 Thlr.	— Sgr.	— Pf.

3) Durch einen Brand haben 4 Hausbesitzer an ihren Grundstücken Schaden gelitten, und zwar A. 765 Thlr., B. 834 Thlr., C. 648 Thlr und D. 574 Thlr. Das Grundstück des A. war vor dem Brande 8000 Thlr., das von B. 12000 Thlr., das von C. 6000 Thlr. und das von D. 2000 Thlr. werth. Es gehen durch milde Beiträge 2374 Thlr. ein; wieviel erhält jeder von diesen?

Es hat verloren:

24000

A. $\frac{765}{8000}$	3	—	2295
B. $\frac{834}{12000}$	2	—	1668
C. $\frac{648}{6000}$	4	—	2592
D. $\frac{574}{2000}$	12	—	6888
			13443

Ansatz für A. $\frac{2295 \cdot 2374}{13443}$

Log. 2295 = 3,3607827
Log. 2374 = 3,3754807
6,7362634
Log. 13443 = 4,1284962
Num log. 2,6077672
= 405,291
= 405 Thlr. 8 Sgr. 9 Pf.

Ansatz für B. $\frac{1668 \cdot 2374}{13443}$

Log. 1668 = 3,2221960
wie bei A. = 3,3754807
6,5976767
wie bei A. = 4,1284962
Num. log. 2,4691805
= 294,565
= 294 Thlr. 17 Sgr.

Ansatz für C. $\frac{2592 \cdot 2374}{13443}$

Log. 2592 = 3,4136350
wie bei A. = 3,3754807
6,7891157
wie bei A. = 4,1284962
Num. log. 2,6606195
= 457,741
= 457 Thlr. 22 Sgr. 3 Pf.

Ansatz für D. $\frac{6888 \,.\, 2374}{13443}$

Log. 6888 = 3,8380931
wie bei A. = 3,3754807
7,2135738
wie bei A. = 4,1284962
Num. log. 3,0850776
= 1216,403
= 1216 Thlr. 12 Sgr.

Es erhält demnach:

A.	405	Thlr.	8	Sgr.	9	Pf.
B.	294	„	17	„	—	„
C.	457	„	22	„	3	„
D.	1216	„	12	„	—	„
	2374	Thlr.	—	Sgr.	—	Pf.

d) Münz- Maß- und Gewichtsrechnung mit Logarithmen.

§ 227.

1) Wieviel Mark Banco erhält man in Hamburg für 8373 Silberrubel? (1 Rubel = 1 Thlr. 2 Sgr. 3,7 Pf. = 32 Sgr. $3^{7}/_{10}$ Pf. = $387^{7}/_{10}$ Pf.; 1 Mark Banco = 12 Sgr. 4 Pf. = 148 Pf.)

? Mark = 8373 Rubel
1 = $387^{7}/_{10}$ Pf.
148 = 1 Mark
1480 3877 . 8373

Log. 3877 = 3,5884958
Log. 8373 = 3,9228811
7,5113769
Log. 1480 = 3,1702617
Num. log. 4,3411152
= 21933,87
= 21933 Mrk. 14 Schill. Bco.

2) 353 englische Quarters sind wie viele schwedische Korntonnen?

100 Hekto = 34,390 engl. Quarters
100 do. = 79,602 schwd. Kornt.

34,390 engl. Qu. geb. 79,602 schw. Kornt.
353 „ „ „ ?

$$\frac{79{,}602 \,.\, 353}{34{,}390} = \frac{39{,}801 \,.\, 353}{17{,}195}$$

Log. 39,801 = 1,5998940
Log. 353 = 2,5477747
4,1476687
Log. 17,195 = 1,2354022
Num. log. 2,9122665
= 817,084
= $817^{1}/_{10}$ schwd. Kornt.

3) Wie viele russische Pud sind 7847 nordamerikanische Pfund? (1 russ. Pud = 40 Pfd., 1 Pfd. = 409,51 Gramm; 1 nordamerikanisches Pfund = 453,59 Gramm.)

? Pud = 7847 nordamerik. Pfund
1 = 453,59 Gramm
409,51 = 1 russ. Pfund
40 = 1 Pud.
16380,40 7847 . 453,59

Log. 7847 = 3,8947037
Log. 453,59 = 2,6566635
6,5513672
Log. 16380,40 = 4,2143246
Num. log. 2,3370426
= 217,291
= 217 Pud 11 Pfd. $61^{2}/_{5}$ Solotnik.

e) Wechselrechnung mit Logarithmen.

§ 228.

1) A. in Berlin ersucht B. in Hamburg für ihn in Amsterdam $7363\frac{1}{2}$ Gulden zu bezahlen, 1 % Spesen zu berechnen und den Betrag auf ihn zu trassiren; wieviel hat A. zu zahlen, wenn der Cours in Hamburg $36\frac{1}{3}$ und in Berlin $151\frac{1}{8}$ ist?

? Thlr. pr. — $7363\frac{1}{2}$ Guld.	Log. 14727 = 4,1681143
$36\frac{1}{3}$ — 40 Mrk. Bco.	Log. 1209 = 3,0824263
100 — 101 „ (Spesen)	Log. 101 = 2,0043214
300 — $151\frac{1}{8}$ Thlr.	9,2548620
436000 14727 . 1209 . 101	Log. 436000 = 5,6394865
	Num. log. 3,6153755
	= 4124,54
	= 4124 Thlr. $16\frac{1}{5}$ Sgr.

2) A. in Leipzig ersucht B. in Frankfurt a. M. 5453 Francs von C. in Paris für ihn einzuziehen, $1\frac{1}{6}$ % Spesen zu berechnen und den Betrag ihm zu remittiren; wieviel erhält A. in Leipzig, wenn der Cours Frankfurt—Paris $94\frac{5}{6}$ und Frankfurt—Leipzig $58\frac{1}{6}$ ist?

? Thlr. sächs. — 5453 Frcs.	Log. 5453 = 3,7366355
200 — $94\frac{5}{6}$ Guld.	Log. 569 = 2,7551123
$101\frac{1}{6}$ — 100 Guld.	Log. 349 = 2,5428254
100 — $58\frac{1}{6}$ Thlr.	9,0345732
728400 5453 . 569 . 349	Log. 728400 = 5,8623699
	Num. log. 3,1722033
	= 1486,63
	= 1486 Thlr. 19 Sgr.

3) A. in Paris hat an B. in Hamburg 3487 Mrk. Bco. zu zahlen. A. ersucht B., auf Berlin zu $152\frac{1}{3}$ zu trassiren und sein Conto damit auszugleichen. Die Deckung nach Berlin macht A. zu 367. In Hamburg sind $\frac{2}{3}$ % Spesen, in Berlin $\frac{5}{6}$ % Spesen und $\frac{1}{3}$ % Courtage entstanden; außerdem treten noch 5 Francs Porto in Paris hinzu; wie hoch kommen dem A. die 3487 Mark Banco zu stehen?

? Frcs. — 3487 Mrk. Bco.	Log. 3487 = 3,5424519
100 — $100\frac{2}{3}$ Mrk. Spesen.	„ 605 = 2,7817554
300 — $152\frac{1}{3}$ Thlr. preuß.	„ 457 = 2,6599162
100 — $100\frac{5}{6}$ Thlr. Spesen.	„ 367 = 2,5646661
100 — $100\frac{1}{3}$ Thlr. Courtage.	„ 302 = 2,4800069
100 — 367 Frcs.	„ 301 = 2,4785665
4860000000000 3487 × 605	16,5073630
× 457 × 367	Log. 4860000000000 = 12,6866363
× 302 × 301	Num. log. 3,8207267
	= 6618 Frcs.
	+ 5 Frcs. Porto = 6623 Frcs.

Zu 4860000000000 wird nur der Logarithmus von 4860 (Seite 83) gesucht und demselben die Kennziffer 12 vorgesetzt. (§ 215.)

f) Waarenrechnung mit Logarithmen.

§ 229.

1) Ein Kaufmann in Frankfurt a. M. bezieht aus Amsterdam 20587 Pond Reis, das Pond zu 10 Cent, mit 3 Monaten Ziel oder 12 % Disconto; die Spesen betragen im Ganzen 13 %, und für Tara und Gutgewicht werden $1^{1}/_{3}$ % gerechnet. Wieviel kostet der Reis, wenn die Zahlung nach 3 Monaten in österr. Papieren erfolgt und Frankfurt—Wien $109^{2}/_{3}$, Amsterdam—Wien $32^{1}/_{2}$ notirt ist?

? südd. Guld	—	20587 Pond
1	—	10 Cent
100	—	1 Guld.
100	—	$98^{2}/_{3}$ Guld. (wegen Gutgewicht und Tara § 176)
$32^{1}/_{2}$	—	30 österr. Guld.
100	—	$109^{2}/_{3}$ südd. Guld.
100	—	113 do. do. wegen Spesen
6500 . 15000		20587 . 296 . 329 . 113

Log. 20587 = 4,3135931
" 296 = 2,4712917
Log. 15000 = 4,1760913 " 329 = 2,5171959
" 6500 = 3,8129134 " 113 = 2,0530784
7,9890047 11,3551591
= 7,9890047
Num. log. 3,3661544
= 2323,56 Gulden
= 2323 Gulden 34 Kreuzer.

2) A. in Wien kauft von B. in Paris 637 Meter Seidenzeug für $2866^{1}/_{2}$ Francs und erhält, weil er gleich bezahlt, $6^{1}/_{2}$ % Rabatt. Die Werthspesen betragen $8^{1}/_{2}$ %, die Gewichts- und allgemeine Spesen $10^{1}/_{3}$ %. Die Zahlung erfolgt in Berliner Papieren. Wie theuer kann A. die Elle in Wien verkaufen, wenn Wien—Berlin $163^{2}/_{3}$, Paris—Berlin $376^{1}/_{2}$ notirt ist; wenn ferner eine österr. Elle gleich 0,77894 Meter ist und 33 % an der Waare verdient werden sollen?

? österr. Guld.	—	1 österr. Elle
1	—	0,77894 Meter.
637	—	$2866^{1}/_{2}$ Frcs.
100	—	$93^{1}/_{2}$ " (Rabatt)
$376^{1}/_{2}$	—	100 Thlr. preuß.
100	—	$163^{2}/_{3}$ österr. Guld.
100	—	$118^{5}/_{6}$ " " (Spesen)
100	—	133 " " (Gewinn)
1274 . 75300000000000		38947 . 713 . 637 . 491 . 187 . 133.

Log. 38947 = 4,5904740
" 713 = 2,8530895
" 637 = 2,8041394
" 491 = 2,6910815
" 187 = 2,2718416
" 133 = 2,1238516
Log. 1274 = 3,1051694 17,3344776
Log. 75300000000000 = 13,8767950
16,9819644
Num. log. 0,3525132
= 2,25171 Guld.
= $2^{1}/_{4}$ Gulden.

Für 7530000000000 wird nur der Logarithmus von 753 oder 7530 gesucht und die Kennziffer 13 vorgesetzt.

g) Die Zinseszins-Rechnung mit Logarithmen.

§ 230.

1) Wieviel betragen 500 Thlr. zu 5 % Zins auf Zins nach 34 Jahren?

Um zu finden, wie hoch ein Capital, das auf Zinseszinsen aussteht, in gewissen Jahren herangewachsen ist, multiplicirt man (nach § 193) 1,04 bei 4 %, 1,05 bei 5 %, 1,06 bei 6 % u. s. w. so oft mit sich selbst, als Jahre gegeben sind, d. h. man erhebt diese Zahl zu einer Potenz, deren Exponent die Zahl der Jahre ist, und multiplicirt dann das Ergebniß mit dem angelegten Capital. Also:

$$1{,}05^{34} \times 500$$

$$1{,}05^{34} = \text{Log. } 1{,}05 \times 34 \text{ (§ 217)}$$

$$\text{Log. } 1{,}05 = 0{,}0211893 \times 34$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ 0{,}7204362$$

$$\text{Log. } 500 = 2{,}6989700$$

$$\text{Num. log. } 3{,}4194062 = 2626{,}675$$

$$= 2626 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr. } 3 \text{ Pf.}$$

Wenn dieselbe Aufgabe § 193 Beisp. 1, nach der Tabelle daselbst gerechnet, $2627\frac{1}{2}$ Thlr. giebt, so liegt dies in dem Umstande, daß die Tabelle nur bis 3 Decimalen berechnet ist, also nicht ganz genau sein kann; das hier mittelst Logarithmen gerechnete Ergebniß ist das richtige. Es muß zugleich noch bemerkt werden, daß sämmtliche 6 Tabellen, welche bei der Zinseszinsrechnung § 192 bis 199 aufgestellt sind, sich nicht für die Praxis eignen, weil sie sonst wenigstens mit 6 statt mit 3 Decimalen hätten ausgeführt werden müssen. Jene Tabellen sollen dort nur zeigen, wie man überhaupt Tabellen benutzen kann. Wer nicht oft mit Aufgaben dieser Art zu thun hat, rechnet sie mittelst Logarithmen, und wer viel damit umgeht, kann sich leicht zu jedem Zinsfuß eine richtige Tabelle, nach den bei jenen Tabellen gegebenen Anleitungen, mit Hilfe der Logarithmentafeln auf 6 Decimalen anfertigen.

2) Welches Capital wächst nach 34 Jahren bei 5 % Zins auf Zins zu 2626,675 Thlrn. an?

Ist das Capital x, so ist nach Beispiel 1:

$$1{,}05^{34} \times x = 2626{,}675$$

$$\text{also } x = \frac{2626{,}675}{1{,}05^{34}}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Log. } 2626{,}675 = 3{,}4194062 \\ \text{Log. } 1{,}05 = 0{,}0211893 \times 34 = 0{,}7204362 \end{array}\right\} \text{subtrahirt}$$

$$\text{Num. log. } 2{,}6989700 = 500 \text{ Thlr.}$$

3) Zu welchem Zinsfuß steht ein Capital von 500 Thlrn. aus, wenn es nach 34 Jahren Zins auf Zins zu 2626,675 Thlr. angewachsen ist?

Für den Ausdruck 1,04 oder 1,05 oder 1,06 u. s. w. setzt man x; dann ist nach Beispiel 1:

$$x^{34} \times 500 = 2626{,}675$$
$$x^{34} = \frac{2626{,}675}{500}$$
$$x = \sqrt[34]{\frac{2626{,}675}{500}}$$
$$x = \frac{\text{Log. } 2626{,}675 - \text{Log. } 500}{34}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \text{Log. } 2626{,}675 = 3{,}4194062 \\ \text{Log. } 500 \phantom{{}={}} = 2{,}6989700 \end{array}\right\} \text{subtrahirt}$$
$$0{,}7204362 : 34$$
$$\text{Num. log. } 0{,}0211893 = 1{,}050 = 1{,}05,$$

also ist x = 1,05; folglich der Zinsfuß 5 %.

4) Nach wie vielen Jahren ist ein Capital von 500 Thlrn. bei 5 % Zins auf Zins zu 2626,675 Thlrn. angewachsen?

Sind die Jahre x, so ist nach Beispiel 1:

$$1{,}05^x \times 500 = 2626{,}675$$
$$1{,}05^x = \frac{2626{,}675}{500}$$
$$\text{Log. } 1{,}05 \times x = \text{Log. } 2626{,}675 - \text{Log. } 500$$
$$x = \frac{\text{Log. } 2626{,}675 - \text{Log. } 500}{\text{Log. } 1{,}05}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Log. } 2626{,}675 = 3{,}4194062 \\ \text{Log. } 500 = 2{,}6989700 \end{array}\right\} (\text{Log. } 1{,}05 = 0{,}0211893)$$
$$0{,}7204362 : 0{,}0211893 = 34$$
$$635679$$
$$847572 \qquad x = 34 \text{ Jahre.}$$
$$847572$$

5) Nach wie vielen Jahren ist ein Capital von 500 Thlrn. zu $4^1/_2$ % Zins auf Zins zu einem 3 mal so großen Werth, also zu 1500 Thlrn. angewachsen?

Sind die Jahre x, so ist nach Beispiel 1:

$$1{,}045^x \times 500 = 1500$$
$$1{,}045^x = \frac{1500}{500} = 3$$
$$\text{Log. } 1{,}045 \times x = \text{Log. } 3$$
$$x = \frac{\text{Log. } 3}{\text{Log. } 1{,}045}$$

Log. 3 = 0,4771213 | also:
Log. 1,045 = 0,0191163 | 0,4771213 : 0,0191163 = 24,958 Jahre
= 24 Jahre $11^1/_2$ Monat.

6) Wie groß ist das Capital, das zu 5 % Zins auf Zins in 6 Jahren denselben Werth hat, welchen 1500 Thlr. zu 3 % Zins auf Zins in 8 Jahren haben?

Ist das unbekannte Capital x, so erhält man nach Beisp. 1 die Gleichung:

$$1{,}05^6 \times x = 1{,}03^8 \times 1500$$

$$x = \frac{1{,}03^8 \times 1500}{1{,}05^6}$$

$$x = \text{Log. } 1500 + (8 \times \text{Log. } 1{,}03) - (6 \times \text{Log. } 1{,}05)$$

$$\begin{array}{lrl} & \text{Log. } 1500 = 3{,}1760913 & \\ \text{Log. } 1{,}03 = \underline{0{,}0128372} \times 8 & & \text{addirt} \\ \phantom{\text{Log. } 1{,}03 = {}} 0{,}1026976 & \text{———} \underline{0{,}1026976} & \\ & 3{,}2787889 & \\ \text{Log. } 1{,}05 = \underline{0{,}0211893} \times 6 & & \text{subtrahirt} \\ \phantom{\text{Log. } 1{,}05 = {}} 0{,}1271358 & \text{———} \underline{0{,}1271358} & \\ & \text{Num. log. } 3{,}1516531 & = 1417{,}92 \\ & & = 1417 \text{ Thlr. } 27 \text{ Sgr. } 7 \text{ Pf.} \end{array}$$

7) Wenn bei der Geburt Christi 1 Pfennig Zins auf Zins zu 5 % angelegt worden wäre, welchen Werth würde derselbe am Schluß des Jahres 1865 haben?

1 Thlr. giebt nach einem Jahre 1,05 Thlr., also giebt 1 Pfennig nach einem Jahre 1,05 Pf. Es würde also der Ansatz nach Beispiel 1 sein:

$$1{,}05^{1865} \times 1 \text{ Pf.} = 1{,}05^{1865}.$$

Dadurch würde man das Ergebniß in Pfennigen erlangen, welches dann noch mit großer Mühe durch 360 dividirt werden müßte, um Thaler zu erhalten. Man dividirt deshalb den vorstehenden Ausdruck gleich durch 360, was den folgenden Ansatz für Thaler giebt:

$$\frac{1{,}05^{1865}}{360}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 1{,}05 = \underline{0{,}0211893} & \times 1865 \\ 1059465 & = 5 \text{ mal Multiplicandus} \\ 1271358 & = 6 \text{ mal Multiplicandus} \\ \underline{3814074} & = 3 \text{ mal voriges Produkt} \\ 39{,}5180445 & \\ \text{Log. } 360 = \underline{2{,}5563025} & \text{subtrahirt} \\ \text{Num. log. } 36{,}9617420 & = 9156762 \ldots\ldots\ldots \text{ Thaler.} \end{array}$$

Da die Kennziffer 36 ist, so muß die zu suchende Zahl aus 37 Ziffern bestehen (§ 215); 36 Nullen mit einer 1 vorn ist 1 Sextillion, also die erste Ziffer 9 mit 36 Nullen giebt 9 Sextillion Thaler, die andern Ziffern geben noch 156762 Quinquillion Thaler, folglich ist der eine Pfennig in 1865 Jahren zu 9 Sextillion 156762 Quinquillion Thaler herangewachsen. Wie es schon mit der Auszahlung von 9 Sextillion Thalern aussieht, ohne die andern Zahlen zu beachten, ist bereits § 193 gesagt worden.

XXII. Die Progressionen und ihre Anwendung.

A. Entwickelung der Formeln.

§ 231.

Schreibt man eine Reihe Zahlen in der Art, daß jede folgende Zahl um ein Gleiches größer ist, wie die vorhergehende, so erhält man eine steigende arithmetische Reihe oder Progression:

1 3 5 7 9 11 13.

Ist die folgende Zahl um ein Gleiches kleiner, als die vorhergehende, so entsteht eine fallende arithmetische Reihe oder Progression:

13 11 9 7 5 3 1.

Die erste Zahl links jeder Progression heißt das erste Glied; es ist bei der steigenden Progression die kleinste, bei der fallenden die größte Zahl. Die letzte Zahl rechts heißt das letzte Glied, welches bei der steigenden Progression die größte, bei der fallenden die kleinste Zahl ist. Diejenige Zahl, um welche jedes folgende Glied steigt oder fällt (2), wird die Differenz genannt.

Setzt man unter eine steigende Progression eine in gleichen Zahlen ausgedrückte fallende Progression,

1	3	5	7	9	11	13
13	11	9	7	5	3	1
14	14	14	14	14	14	14

so geben die über einander stehenden Glieder, wenn sie addirt werden, eine gleiche Summe (14).

Man findet also die Summe sämmtlicher geschriebenen Zahlen beider Progressionen, wenn man das erste Glied (1 oder 13) mit dem letzten Gliede (13 oder 1) addirt und dies mit der Anzahl der Glieder (7) multiplicirt; also: $14 \times 7 = 98$. Ist 98 die Summe aller Glieder beider Progressionen, so ist $\frac{98}{2} = 49$ die Summe der Glieder der einen Progression.

Nennt man nun das erste Glied a, das letzte Glied u, die Anzahl der Glieder n und die Summe S, so ist nach Vorstehendem:

$$S = \frac{n\,(a + u)}{2} = \frac{7\,(1 + 13)}{2} = 7 \times 7 = 49.$$

Leicht erklärlich ist, daß dies Gesetz überall eintreten muß, wo man eine steigende und eine fallende Progression in gleichen Zahlen zusammenstellt.

5	8	11	14	17
17	14	11	8	5
22	22	22	22	22

Es kann deshalb die vorstehende Formel in allen Fällen, wo das erste und letzte Glied nebst der Anzahl der Glieder gegeben ist, sowohl für die steigende als auch für die fallende Progression in Anwendung gebracht werden.

Es kommen aber Fälle vor, bei denen eins der genannten Stücke fehlt und statt dessen die Differenz (d) gegeben ist. In einem solchen Falle muß man aus der Differenz und den gegebenen Stücken das fehlende Stück suchen.

Bei der steigenden Progression ist die Differenz zu jedem Gliede **addirt**, nur nicht zu dem ersten Gliede; bei der fallenden Progression ist die Differenz von jedem Gliede subtrahirt, nur nicht von dem letzten Gliede. Es kommt also in der Progression, wenn die Anzahl der Glieder n ist, die Differenz n — 1 mal vor. Mithin erhält man bei der steigenden Progression das letzte Glied u, wenn man die Differenz d, n — 1 mal nimmt und dazu das erste Glied addirt; bei der fallenden Progression dagegen erhält man das letzte Glied, wenn man die Differenz d, n — 1 mal nimmt und dies von dem ersten Gliede subtrahirt. Es ist also:

bei der steigenden Progression:

$$\text{I. } u = a + (n - 1)d$$

$$(13 = 1 + (7 - 1)\,2)$$

bei der fallenden Progression:

$$\text{II. } u = a - (n - 1)d$$

$$(1 = 13 - (7 - 1)2)$$

Nach § 204 läßt sich nun entwickeln:

für die steigende Progression:

aus I.

$$u = a + (n - 1)d$$
$$u - (n - 1)\,d = a$$
$$\text{also } \mathbf{a} = u - (n - 1)d$$

$$u = a + (n - 1)d$$
$$u - a = (n - 1)d$$
$$nd - d = u - a$$
$$nd = u - a + d$$
$$\text{also } \mathbf{n} = \frac{u - a + d}{d}$$

$$u = a + (n - 1)d$$
$$u - a = (n - 1)d$$
$$\frac{u - a}{n - 1} = d$$
$$\text{also } \mathbf{d} = \frac{u - a}{n - 1}.$$

für die fallende Progression:

aus II.

$$u = a - (n - 1)d$$
$$u + (n - 1)d = a$$
$$\text{also } \mathbf{a} = u + (n - 1)d$$

$$u = a - (n - 1)d$$
$$u + (n - 1)\,d = a$$
$$u + nd - d = a$$
$$nd = a - u + d$$
$$\text{also } \mathbf{n} = \frac{a - u + d}{d}$$

$$u = a - (n - 1)d$$
$$u + (n - 1)d = a$$
$$(n - 1)d = a - u$$
$$\text{also } \mathbf{d} = \frac{a - u}{n - 1}.$$

Dies zusammengestellt giebt folgende zu merkende Formeln:

Bei der steigenden Progression:

$$S = \frac{n\,(a + u)}{2} \text{ oder}$$
$$S = \frac{n}{2}\,(a + u) \text{ oder}$$
$$S = n\,\frac{(a + u)}{2}$$
$$\mathbf{u} = a + (n - 1)d$$
$$\mathbf{a} = u - (n - 1)d$$
$$\mathbf{n} = \frac{u - a + d}{d}$$
$$d = \frac{u - a}{n - 1}.$$

Bei der fallenden Progression:

$$S = \frac{n\,(a + u)}{2} \text{ oder}$$
$$S = \frac{n}{2}\,(a + u) \text{ oder}$$
$$S = n\,\frac{(a + u)}{2}$$
$$\mathbf{u} = a - (n - 1)d$$
$$\mathbf{a} = u + (n - 1)d$$
$$\mathbf{n} = \frac{a - u + d}{d}$$
$$\mathbf{d} = \frac{a - u}{n - 1}.$$

B. Anwendung der Progressionen.

§ 232.

1) Ein achteckiger Gasometer soll mit Schieferplatten gedeckt werden; jede der 8 Seiten des Daches erfordert unten 30 Platten, nimmt in jeder folgenden Lage nach oben um eine Platte ab und endet in der Spitze mit einer Platte. Wie viele Schieferplatten sind zu dem Dache erforderlich?

Wenn oben eine und unten 30 Platten liegen, so ist die Anzahl der Lagen (bei der Differenz 1) $n = \frac{u - a + d}{d} = \frac{30 - 1 + 1}{1} = 30.$

Also $S = \frac{n}{2}(a + u) = \frac{30}{2}(1 + 30) = 15 . 31 = 465$ Schieferplatten zu einer Seite des Daches und

$465 \times 8 = 3720$ Schieferplatten zu den 8 Seiten des Daches.

2) Ein Tabackshändler hat 3 Schichten holländischen Taback in runden Packeten à 1 Pfd. hinter einander so gelegt, daß in der unteren Lage jeder Schicht 25 Packete, in jeder folgenden Lage 1 Packet weniger und oben 1 Packet liegt; wieviel Pfund Taback hat er so aufgeschichtet?

Wenn die Differenz und das erste Glied 1 ist, so ist immer, wie in Beispiel 1, die Anzahl der Glieder gleich dem letzten Gliede, also $n = 25$; demnach ist:

$$S = \frac{n\,(a + u)}{2} = \frac{25\,(1 + 25)}{2} = 25 \times 13 = 325 \text{ Pfund}$$

in einer Schicht und

$325 \times 3 = 975$ Pfund in den 3 Schichten.

3) Die vorige Aufgabe bleibt; nur hat der Tabackshändler von der 1sten Schicht so viele Packete verkauft, daß die oberste Lage dieser Schicht nur noch 18 beträgt; wieviel Taback ist noch vorhanden?

Wenn die oberste volle Lage 18 beträgt, so ist eine Schicht, deren untere Lage 17 beträgt, verkauft, also:

$$S = \frac{n\,(a + u)}{2} = \frac{17\,(1 + 17)}{2} = 17 . 9 = 153 \text{ Pfund}$$

sind verkauft, mithin $975 - 153 = 822$ Pfund noch vorhanden.

Oder: die dritte Schicht hat oben 18, unten 25 Packete,

$$\text{also } n = \frac{u - a + d}{d} = \frac{25 - 18 + 1}{1} = 8$$

$$S = \frac{n}{2}(a + u) = \frac{8}{2}(18 + 25) = 4 \times 43 = 172 \text{ Pfd.}$$

dazu die 2 Schichten = 650 „

giebt als vorhanden 822 Pfd.

4) Es zählt Jemand 50 Thalerstücke neben einander hin und legt über jeden Thaler, außer den beiden an den Enden, einen andern Thaler; so fährt er fort, in jeder Lage 2 Thlr. weniger zu zählen, bis er oben mit 4 Thalern endigt. Wie viele Thaler hat er hingezählt? ($a = 4$, $u = 50$, $d = 2$.)

$$n = \frac{u - a + d}{d} = \frac{50 - 4 + 2}{2} = 24$$

$$S = \frac{n}{2}(a + u) = \frac{24}{2}(4 + 50) = 12 \,.\, 54 = 648 \text{ Thlr.}$$

5) Es wird ein Brunnen gegraben. Für den ersten Fuß werden 2 Thlr. und für jeden folgenden Fuß $^1/_3$ Thlr. mehr gezahlt; der Brunnen wird 90 Fuß tief; was kostet das Ausgraben desselben?

$$a = 2;\ n = 90;\ d = {}^1/_3$$

$$u = a + (n - 1)\, d = 2 + (90 - 1)\, {}^1/_3 = 2 + 89 \,.\, {}^1/_3 = 2 + 29^2/_3 = 31^2/_3.$$

$$S = \frac{n}{2}(a + u) = \frac{90}{2}(2 + 31^2/_3) = 45 \,.\, 33^2/_3 = 1515 \text{ Thlr.}$$

6) Es nimmt sich Jemand vor, 1 Jahr in der Weise zu sparen, daß er am ersten Tage einen Pfennig und jeden folgenden Tag einen Pfennig mehr zurücklegt; wieviel hat er nach 365 Tagen gespart?

$$a = 1;\ u = 365;\ n = 365 \text{ (nach Beispiel 1 und 2)}$$

$$S = n\left(\frac{a + u}{2}\right) = 365\left(\frac{1 + 365}{2}\right) = 365 \,.\, 183 = 66795 \text{ Pf.}$$

: 12

5566 Sgr. 3 Pf.

: 30

185 Thlr. 16 Sgr. 3 Pf.

7) Ein Herr miethet einen Bedienten unter der Bedingung, daß er den ersten Monat 15 Thlr. und jeden folgenden Monat 5 Sgr. mehr erhalten soll, bis er auf 25 Thlr. gekommen ist. Nach wie vielen Monaten hat der Bediente die 25 Thlr. erreicht und wieviel Lohn hat er bis dahin im Ganzen erhalten?

$$a = 15;\ u = 25;\ d = {}^1/_6\ (5 \text{ Sgr.} = {}^1/_6 \text{ Thlr.})$$

$$n = \frac{u - a + d}{d} = \frac{25 - 15 = {}^1/_6}{{}^1/_6} = 10^1/_6 : {}^1/_6 = \frac{61 \,.\, 6}{6 \,.\, 1} = 61.$$

In 61 Monaten oder in 5 Jahren 1 Monat hat er die 25 Thlr. erreicht.

$$S = n\left(\frac{a + u}{2}\right) = 61\left(\frac{15 + 25}{2}\right) = 61 \,.\, 20 = 1220$$ Thlr. Lohn hat der Bediente in den 61 Monaten erhalten.

8) Es verkauft Jemand 97 Säcke Waare, die durch Feuchtigkeit gelitten hatten, aber nach und nach durch eine sorgfältige Behandlung verbessert wurden. Für den ersten Sack bekam er 5 Thlr. und für jeden folgenden Sack 1 Sgr. 3 Pf. mehr; wieviel hat er für den 97sten Sack erhalten und wieviel im Ganzen eingenommen?

$a = 5;\ n = 97;\ d = \frac{1}{24}$ Thlr.

$u = a + (n-1)\,d = 5 + (97-1)\,\frac{1}{24} = 5 + 96\,.\,\frac{1}{24} = 5 + 4 = 9$ Thlr.

hat er für den 97sten Sack erhalten.

$$S = n\,(\frac{a+u}{2}) = 97\,(\frac{5+9}{2}) = 97\,.\,7 = 679 \text{ Thlr.}$$

hat er im Ganzen eingenommen.

9) Ein Fußreisender macht jeden folgenden Tag $\frac{1}{4}$ Meile mehr als den vorhergehenden Tag, so daß er am zwanzigsten Tage 10 Meilen zurücklegt; wie viele Meilen hat er am ersten Tage und in den 20 Tagen gemacht?

$u = 10;\ n = 20;\ d = \frac{1}{4}$

$a = u - (n-1)\,d = 10 - (20-1)\,\frac{1}{4} = 10 - 19\,.\,\frac{1}{4} = 10 - 4\frac{3}{4} = 5\frac{1}{4}$ Meilen hat er den ersten Tag gemacht,

$$S = \frac{n}{2}\,(a+u) = \frac{20}{2}\,(5\frac{1}{4} + 10) = 10\,.\,15\frac{1}{4} = 152\frac{1}{2} \text{ Meilen}$$

hat er in 20 Tagen gemacht.

10) Ein Fußreisender hat $152\frac{1}{2}$ Meilen in der Art zurückgelegt, daß er am ersten Tage $5\frac{1}{4}$ Meilen und jeden Tag ein Gleiches mehr machte, so daß er es am letzten Tage auf 10 Meilen gebracht hatte. Wie viele Tage hat er zu der Reise gebraucht?

$S = 152\frac{1}{2};\ a = 5\frac{1}{4};\ u = 10.$

Da hier n gesucht werden soll, aber d nicht gegeben ist, so muß n aus der Formel $S = \frac{n\,(a+u)}{2}$ gesucht werden, nämlich:

$$S = \frac{n\,(a+u)}{2}$$

$$2\,S = n\,(a+u)$$

$$\frac{2\,S}{a+u} = n,$$

$$\text{also } n = \frac{2\,S}{a+u} = \frac{2\,.\,152\frac{1}{2}}{5\frac{1}{4}+10} = \frac{305}{15\frac{1}{4}} = \frac{305\,.\,4}{61} = 20 \text{ Tage.}$$

11) Ein Fußreisender hat $152\frac{1}{2}$ Meilen in 20 Tagen zurückgelegt. Am ersten Tage machte er $5\frac{1}{4}$ Meilen; wie viele Meilen machte er am 20sten Tage, wenn er täglich ein Gleiches mehr ging?

$S = 152\frac{1}{2};\ a = 5\frac{1}{4};\ n = 20.$

Wie n im vorigen Beispiele, so muß hier u aus der Formel $S = \frac{n\,(a+u)}{2}$ entwickelt werden, nämlich:

$$S = \frac{n\,(a + u)}{2}$$

$$2\,S = n\,(a + u)$$

$$\frac{2\,S}{n} = a + u$$

$$u = \frac{2\,S}{n} - a = \frac{2\,.\,152^1/_2}{20} - 5^1/_4 = \frac{2\,.\,305}{2\,.\,20} - 5^1/_4 = \frac{61}{4} - 5^1/_4$$

$$= 15^1/_4 - 5^1/_4 = 10 \text{ Meilen.}$$

12) Ein Kaufmann hat ein Vermögen von 15000 Thlrn. und verliert im ersten Jahre seines eröffneten Geschäfts 3500 Thlr.; im zweiten Jahre beträgt der Verlust 250 Thlr. weniger und im dritten Jahre wieder 250 Thlr. weniger. Wenn er nun bei einem immer um 250 Thlr. jährlich sich vermindernden Verlust 10 Jahre das Geschäft fortsetzt, wie steht es dann mit seinen Vermögensverhältnissen?

Dies wird nach der fallenden Progression gerechnet, in der gegeben ist:

$a = 3500$ Thlr.; $n = 10$ Jahre; $d = 250$ Thlr.

$$u = a - (n - 1)\,d = 3500 - (10 - 1)\,250 = 3500 - 9\,.\,250$$

$$= 3500 - 2250 = 1250 \text{ Thlr.}$$

$$S = \frac{n}{2}\,(a + u) = \frac{10}{2}\,(3500 + 1250) = 5\,.\,4750 = 23750 \text{ Thlr.}$$

beträgt nach 10 Jahren der Verlust;

23750 Thlr. Verlust — 15000 Thlr. Vermögen läßt 8750 Thlr. Schulden.

XXIII. Die Zeitrechnung.

§ 233.

Die Zeitrechnung lehrt die Zeit finden, welche zwischen zwei gegebenen Tagen liegt oder, wenn die Zeit und der eine Tag gegeben ist, den anderen Tag danach bestimmen. Folgende 3 Fälle bezeichnen dies deutlicher:

1) Es ist der Tag der Geburt und der Todestag gegeben, man will wissen, wie alt Jemand geworden ist.

2) Es ist der Tag der Geburt und das Alter gegeben, man will wissen, wann Jemand gestorben ist.

3) Es ist der Todestag und das Alter gegeben, man will wissen, wann Jemand geboren ist.

Um derartige Aufgaben richtig ansetzen zu können, ist Folgendes zu merken:

Unsere Zeitrechnung wird nach der Geburt Christi bestimmt, d. h. schreiben wir 1865 den 20sten November Nachmittags 3 Uhr 45 Minuten, so sind seit Christi Geburt 1864 Jahre 10 Monate 19 Tage 15 Stunden 45 Minuten vergangen; nämlich 1864 Jahre sind ganz vergangen, das Jahr 1865 aber noch nicht, sondern in demselben erst 10 Monate (Januar bis incl. October); der 20ste November ist auch noch nicht ganz vergangen, sondern nur 19 Tage dieses Monats und da der Tag des Nachts 12 Uhr anfängt, so sind vom 20sten Tage 15 Stunden 45 Minuten bis Nachmittags 3 Uhr 45 Minuten vergangen. (Minuten und Sekunden, im Falle solche gegeben sind, zählen über die Stundenzeit.)

Erster Fall.

1) Es ist Jemand geboren 1813 den 9ten April Morgens 7 Uhr 30 Minuten, gestorben 1862 den 25sten Juni Nachmittags 2 Uhr 52 Minuten; wie alt ist er geworden?

1861 Jahre	5 Mon.	24 Tg.	14 Stund.	52 Min.	} subtrahirt
1812 „	3 „	8 „	7 „	30 „	
49 Jahre	2 Mon.	16 Tg.	7 Stund.	22 Min.	

2) Es ist Jemand geboren 1809 den 28sten September 5 Uhr 36 Minuten Nachmittags und gestorben 1858 den 15ten Juli 4 Uhr 27 Minuten Morgens; wie alt ist er geworden?

	12	30	24	60	
1857 Jahre	6 Mon.	14 Tg.	4 Stund.	27 Min.	} subtrahirt
1808 „	8 „	27 „	17 „	36 „	
48 Jahre	9 Mon.	16 Tg.	10 Stund.	51 Min.	

Wenn geborgt werden muß, so ist bei den Monaten genau darauf zu achten, welchen Monat man borgt, um danach die Anzahl Tage zu nehmen. Im vorstehenden Beispiel wird der 6te Monat, also der Monat Juni geborgt; daher sind 30 Tage als geborgt angenommen.

Zweiter Fall.

Es ist Jemand geboren 1815 den 7ten Mai Nachmittags 3 Uhr und war, als er starb, 35 Jahre 6 Monate 19 Tage 7 Stunden alt; wann ist er gestorben?

1814 Jahre	4 Mon.	6 Tg.	15 Stund.	} addirt
35 „	6 „	19 „	7 „	
1849 Jahre	10 Mon.	25 Tg.	22 Stund.	

Das Ergebniß wird nun in folgender Art umgewandelt (in's Anno verwandelt): 1849 Jahre sind vergangen, also die 10 Monate 25 Tage 22 Stunden fallen in das Jahr 1850; 10 Monate sind vergangen, also die 25 Tage 22 Stunden fallen in den 11ten Monat, d. i. den Monat November; 25 Tage sind vergangen, also die 22 Stunden fallen auf den 26sten Tag und zwar Abends 10 Uhr, weil zwischen 12 Uhr Nachts und 10 Uhr Abends 22 Stunden liegen. Er ist also gestorben 1850 den 26sten November, Abends 10 Uhr.

Dritter Fall.

Es ist Jemand gestorben 1864 den 27sten März Nachmittags 3 Uhr und war 52 Jahre 9 Monate 28 Tage 7 Stunden alt; wann ist er geboren?

	12	29		
1863 Jahre	2 Monate	26 Tage	15 Stunden	} subtrahirt
52 „	9 „	28 „	7 „	
1810 Jahre	4 Monate	27 Tage	8 Stunden.	

Die 2 Monate fallen in das Jahr 1864, ein Schaltjahr, in welchem der 2te Monat (Februar) 29 Tage hat. Nachdem die Umwandlung, wie beim vorigen Beispiel, geschehen ist, ergiebt sich die Zeit der Geburt im Jahre 1811 den 28sten Mai Morgens 8 Uhr.

§ 234.

Nach den drei Fällen des vorigen Paragraphen werden alle anderen Aufgaben der Zeitrechnung gerechnet, nämlich:

1) Es traf Jemand im Jahre 1852 den 12ten Juni Nachmittags 4 Uhr in Newyork ein; derselbe reiste von da wieder ab 1862 den 8ten Mai Morgens 3 Uhr. Wie lange hat er genau in Newyork gelebt?

1861 Jahre	4 Monate	7 Tage	3 Stunden	} subtrahirt
1851 „	5 „	11 „	16 „	
9 Jahre	10 Monate	25 Tage	11 Stunden.	

2) Es hat Jemand am 3ten October 1857 ein Geschäft etablirt und dasselbe 5 Jahre 5 Monate und 5 Tage besessen. Wann hat er das Geschäft aufgegeben?

1856 Jahre	9 Monate	3 Tage	} addirt
5 „	5 „	5 „	
1862 Jahre	2 Monate	8 Tage.	

Im Jahre 1863 den 9ten März gab er das Geschäft auf.

3) Es reiste Jemand am 12ten März 1863 aus Berlin und hatte daselbst 27 Jahre 6 Monate und 16 Tage gelebt. Wann war er nach Berlin gekommen?

	12	28	
1862 Jahre	2 Monate	12 Tage	} subtrahirt
27 „	6 „	16 „	
1834 Jahre	7 Monate	24 Tage.	

Der 2te Monat (Februar) fällt in das Jahr 1863, welches kein Schaltjahr ist, hat also nur 28 Tage.

Er ist mithin nach Berlin gekommen im Jahre 1835 den 24sten August.

Es giebt noch andere Verfahrungsarten, z. B. aus der Anzahl Geburtstage und der Differenz der Tage und Monate von dem letzten Geburtstage, das Alter zu bestimmen, und umgekehrt; da sie aber nicht wesentlich kürzer sind und leicht einen Irrthum zulassen, so wurden sie hier nicht aufgenommen, um so weniger, als Aufgaben der Zeitrechnung nicht sehr oft vorkommen und deshalb immer nach der vorstehenden gründlichen Verfahrungsweise gerechnet werden können.

XXIV. Die Tageszeitrechnung.

§ 235.

Die Erde hat eine kugelförmige Gestalt, und jeder um dieselbe gedachte Kreis, also der Aequator, die Parallelkreise und die diese durchschneidenden Meridiane werden in 360 gleiche Theile, Grade genannt, getheilt. Der erste Meridian, von dem die Grade auf dem Aequator und den Parallelkreisen gezählt werden, wird gewöhnlich über die Insel Ferro angenommen (die Franzosen über Paris, die Engländer über Greenwich). Von diesem Meridian werden **180** Grad östlich die östliche Länge, 180 Grad westlich die westliche Länge genannt. Oft nimmt man auch nur 360 Grad östlicher Länge an.

Die Erde dreht sich von Westen nach Osten in 24 Stunden einmal um ihre Axe. Nimmt man daher die Sonne als stillstehend an, was nach der Eigenbewegung der Fixsterne zwar nicht der Fall ist, in Bezug auf die Erde aber angenommen werden kann, so werden $\frac{360}{24} = 15$ Grad des Erdäquators oder eines Parallelkreises in einer Stunde vor der Sonne vorbeigehen; in 6 Stunden also 90 Grad.

Es werden folglich diejenigen Bewohner der Erde, welche 90 Grad von uns nach Westen wohnen, die gleichen Tageszeiten (Morgen, Mittag, Abend, Mitternacht) 6 Stunden später, und die 90 Grad von uns nach Osten wohnen, 6 Stunden früher haben. Wenn es also bei uns Mittags 12 Uhr ist, wird es in einem Ort, der 90 Grad von uns nach Westen liegt, 6 Uhr Morgens, und wenn er 90 Grad nach Osten liegt, **6** Uhr Abends sein.

Legt nun die Erde in einer Stunde 15 Grad zurück, so gehören zur Zurücklegung eines Grades $^1/_{15}$ Stunde oder 4 Minuten. Also ein Ort, bei dem der Mittag 4 Minuten später eintritt als bei uns, liegt 1 Grad westlicher, und ein Ort, bei dem der Mittag 4 Minuten früher eintritt als bei uns, liegt 1 Grad östlicher.

Hierauf beruht nicht allein die Berechnung der Tageszeiten, sondern auch die davon abhängige Berechnung der Lage der Oerter. Im ersteren Falle hat man nur nöthig, die Grade mit 4 Minuten zu multipliciren, im anderen Falle die Stundenzeit durch 4 zu dividiren.

A. Bestimmung der Tageszeit.

§ 236.

1) Newyork liegt 56° 22′ westlicher Länge, Berlin 31° 3′ östlicher Länge; wann ist in Newyork nach Berliner Uhr Mittag, und welche Zeit zeigt die Newyorker Uhr, wenn es in Berlin Mittag ist?

Newyork liegt $56^0\ 22' + 31^0\ 3' = 87^0\ 25'$ westlich von Berlin; die gleichen Tageszeiten treten also in Newyork später ein als in Berlin.

$$87^0\ 25' \text{ sind } = 87^5/_{12}{}^0 = \frac{1049}{12} \text{ Grad.}$$

$$\frac{1049}{12} \times 4 \text{ Min.} = \frac{1049 \times 4}{12} = 349^2/_3 \text{ Min.} = 5 \text{ Stund. } 49 \text{ Min. } 40 \text{ Sek.}$$

Wenn es also in Berlin 5 Uhr 49 Minuten 40 Sekunden Nachmittags ist, dann ist es in Newyork Mittag, und wenn es in Berlin Mittag ist, dann zeigt die Uhr in Newyork 6 Uhr 10 Minuten 20 Sekunden Morgens; nämlich

	12 Uhr	— Minuten	— Sekunden in Berlin; davon
	5 „	49 „	40 „
bleibt	6 Uhr	10 Minuten	20 Sekunden.

2) Paris liegt 20° östlicher Länge, Peking in China liegt 134° 9′ östlicher Länge; was ist die Uhr in Peking, wenn es in Paris 2 Uhr Nachmittags ist?

Peking liegt 134° 9′ — 20° = 114° 9′ östlich von Paris; also treten in ersteren Ort die gleichen Tageszeiten früher ein, als in letzteren.

$$114^{0}\ 9' \text{ sind } 114^{3}/_{20}{}^{0} = \frac{2283}{20} \text{ Grad.}$$

$$\frac{2283}{20} \times 4 \text{ Min.} = \frac{2283}{5} \text{ Min.} = 456^{3}/_{5} \text{ Min.} = 7 \text{ Stund. } 36 \text{ Min. } 36 \text{ Sek.}$$

2 Stund. + 7 Stund. 36 Min. 36 Sek. = 9 Stund. 36 Min. 36 Sek.

Es ist also in Peking 9 Uhr 36 Minuten 36 Sekunden Abends, wenn es in Paris 2 Uhr Nachmittags ist.

3) Mexiko liegt 81° 26′ westlicher Länge, Philadelphia in Pensylvanien liegt 57° 31′ westlicher Länge; was ist die Uhr in Philadelphia, wenn es in Mexiko 12 Uhr Mittags ist?

Philadelphia liegt 81° 26′ — 57° 31′ = 23° 55′ östlich von Mexiko; die gleichen Tageszeiten treten in ersteren Ort also früher ein, als in letzteren.

$$23^{0}\ 55' \text{ sind } = 23^{11}/_{12}{}^{0} = \frac{287}{12} \text{ Grad.}$$

$$\frac{287}{12} \times 4 \text{ Minuten} = \frac{287}{3} \text{ Min.} = 95^{2}/_{3} \text{ Min.} = 1 \text{ Stunde } 35 \text{ Min. } 40 \text{ Sek.}$$

Es ist also in Philadelphia 1 Uhr 35 Minuten 40 Sekunden Nachmittags, wenn es in Mexiko Mittag ist.

4) Die Alcyone, ein Stern in den Plejaden, um den sich nach Mädler unser Firsternsystem bewegt, steht in jedem Jahre am 1sten Januar Abends 8 Uhr 49 Minuten im Meridian von Berlin; wann steht derselbe Stern nach Berliner Uhr im Meridian von Washington, welches 59° 22′ westlicher Länge liegt, und was ist die Uhr in Washington, wenn jener Stern dort culminirt (im Meridian steht)?

Bei den Sternen findet dasselbe Verhältniß wie bei der Sonne statt; auch bei diesen rückt die Erde in 4 Minuten einen Grad vorbei. Da nun Washington 59° 22′ + 31° 3′ = 90° 25′ westlich von Berlin liegt, so tritt dort der Stern später in den Meridian, und zwar $90^{5}/_{12} \times 4 \text{ Minuten} = \frac{1085}{12} \times 4$ Minuten $= \frac{1085}{3}$ Minuten $= 361^{2}/_{3}$ Minuten = 6 Stunden 1 Minute 40 Sekunden.

8 Stunden 49 Minuten + 6 Stunden 1 Minute 40 Sekunden = 14 Stunden 50 Minuten 40 Sekunden.

Also culminirt die Alcyone nach Berliner Uhr am 2ten Januar, Morgens 2 Uhr 50 Minuten 40 Sekunden in Washington. Da nun aber die Uhr in Washington gegen die Berliner Uhr um 6 Stunden 1 Minute 40 Sekunden zu spät geht, so culminirt die Alcyone auch in Washington nach dortiger Uhr am 1sten Januar Abends 8 Uhr 49 Minuten.

B. Bestimmung der Lage der Oerter.

§ 237.

1) In demselben Augenblick, wo es in Wien 12 Uhr Mittags ist, ist es in Canton in China 6 Uhr 27 Minuten 36 Sekunden Nachmittags; wenn nun Wien 34° 3′ östlicher Länge liegt, unter welchem Grad der Länge liegt Canton?

Da es in Canton Nachmittag ist, wenn es in Wien Mittag ist, so liegt Canton östlich von Wien.

6 Uhr 27 Minuten 36 Sekunden sind $= 6$ Stunden $27^3/_5$ Minuten $= 6^{23}/_{50}$ Stunden; 1 Stunde giebt 15 Grad, also:

$6^{23}/_{50} \times 15$ Grad $= 96^9/_{10}{}^0 = 96^0\ 54'$ liegt Canton östlicher als Wien.

Wien liegt schon $34^0\ 3'$ östlicher Länge, Canton also $96^0\ 54' + 34^0\ 3' = 130^0\ 57'$ östlicher Länge.

2) In Hamburg ist es 10 Uhr Vormittags, in Neu=Orleans (Louisiana in Amerika) in demselben Augenblick 19 Minuten 40 Sekunden über 3 Uhr Morgens; wenn nun Hamburg 27° 37′ östlicher Länge liegt, unter welchem Grad der Länge liegt Neu=Orleans?

Da in Neu=Orleans die gleichen Tageszeiten später eintreten, als in Hamburg, so liegt jener Ort westlich von diesem.

	10	Stunden	—	Minuten	—	Sekunden	in Hamburg; davon ab
	3	„	19	„	40	„	
bleiben	6	Stunden	40	Minuten	20	Sekunden.	

6 Stunden 40 Minuten 20 Sekunden sind $= 6$ Stunden $40^1/_3$ Minuten

$= 6^{121}/_{180}$ Stunden $= \frac{1201}{180}$ Stunden.

$\frac{1201}{180} \times 15$ Grad $= \frac{1201^0}{12} = 100^1/_{12}{}^0 = 100$ Grad 5 Minuten.

Neu=Orleans liegt also von Hamburg

	100	Grad	5	Minuten	westlich; davon ab
	27	„	37	„	östlich für Hamburg
bleibt	72	Grad	28	Minuten	westlich.

Neu=Orleans liegt mithin $72^0\ 28'$ westlicher Länge.

3) In Petersburg, welches 48° östlicher Länge liegt, culminirt der helle Stern erster Größe, Arcturus im Bootes, am 10ten Juni (russisch 29sten Mai), Abends 8 Uhr 55 Minuten. In Jakutsk in Sibirien hat er an demselben Tage, nach Petersburger Uhr, um 2 Uhr 17 Minuten 20 Sekunden Nachmittags culminirt; unter welchem Grad der Länge liegt Jakutsk?

Da in Jakutsk der Stern früher culminirt als in Petersburg, so liegt jener Ort östlich von diesem.

8 Stunden	55	Minuten	—	Sekunden	
2 „	17	„	20	„	
6 Stunden	37	Minuten	40	Sekunden.	

6 Stund. 37 Min. 40 Sek. sind = 6 Stund. $37^2/_3$ Min. = $6^{113}/_{180}$ Stunden $= \frac{1193}{180}$ Stunden.

$$\frac{1193}{180} \times 15 \text{ Grad} = \frac{1193}{12} \text{ Grad} = 99 \text{ Grad } 25 \text{ Minuten.}$$

Jakutsk liegt also 99° 25′ östlich von Petersburg, mithin 99° 25′ + 48° = 147° 25′ östlicher Länge.

4) In jedem Jahre ist am 20sten Februar Abends 8 Uhr 22 Minuten der schönste Fixstern, Sirius, im Meridian von Breslau zu sehen; 2 Stunden 18 Minuten 48 Sekunden später steht er, nach der Breslauer Uhr, im ersten Meridian (Ferro) und wieder 3 Stunden 34 Minuten 36 Sekunden später steht er, nach derselben Uhr, im Meridian von Newport auf Rhode-Island; unter welchem Grade der Länge liegen Breslau und Newport?

Da der Stern in Breslau früher als im ersten Meridian culminirt, so liegt Breslau östlicher Länge, und da der Stern in Newport später als im ersten Meridian culminirt, so liegt Newport westlicher Länge.

2 Stund. 18 Min. 48 Sek. sind = 2 Stund. $18^4/_5$ Min. = $2^{47}/_{150}$ Stund. $= \frac{347}{150}$ Stunden.

$$\frac{347}{150} \times 15 \text{ Grad} = \frac{347}{10} \text{ Grad} = 34^7/_{10} \text{ Grad} = 34 \text{ Grad } 42 \text{ Minuten.}$$

Breslau liegt also 34° 42′ östlicher Länge.

3 Stund. 34 Min. 36 Sek. sind = 3 Stund. $34^3/_5$ Min. = $3^{173}/_{300}$ Stund. $= \frac{1073}{300}$ Stunden.

$$\frac{1073}{300} \times 15 \text{ Grad} = \frac{1073}{20} = 53^{13}/_{20} \text{ Grad} = 53 \text{ Grad } 39 \text{ Minuten.}$$

Newport liegt also 53° 39′ westlicher Länge.

XXV. Das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln.

§ 238.

Was eine Potenz, eine Wurzel u. s. w. ist, ist bereits § 212 gesagt, und § 223 ist auch gezeigt, wie man die Wurzel aus Potenzen mittelst Logarithmen zieht. Hier soll nun gezeigt werden, wie man auch ohne Logarithmen die Quadrat- und Kubikwurzel, so wie die Vielfachen dieser Wurzeln, also die 4te, 6te, 8te, 9te u. s. w. Wurzel aus Potenzen ziehen kann.

A. Ausziehen der Quadratwurzel.

§ 239.

Besteht das Quadrat nur aus 2 Ziffern oder aus 3 niedrigen Ziffern, so findet man die Wurzel, wenn sie eine ganze Zahl ist, leicht nach dem Ein mal Eins: $\sqrt{9} = 3$, $(3 \times 3 = 9)$; $\sqrt{25} = 5$, $(5 \times 5 = 25)$; $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{144} = 12$ u. s. w. Besteht das Quadrat aber aus 3 höheren Ziffern oder aus 4 und mehreren Ziffern, so geschieht das Ausziehen nach einer Formel, die in folgender Art gefunden wird:

Man zerlegt eine zweiziffrige Wurzel, z. B. 24, in 20 und 4 und multiplicirt diese Theile mit einander.

$$\begin{array}{r} 20 + 4 \\ 20 + 4 \\ \hline 4 \,.\, 20 + 4 \,.\, 4 \\ 20 \,.\, 20 + 4 \,.\, 20 \qquad \\ \hline 20^2 + 2 \,.\, 4 \,.\, 20 + 4^2. \end{array}$$

Daraus sieht man, daß das Quadrat einer zweiziffrigen Wurzel zusammengesetzt ist: aus dem Quadrat des ersten Theils (20^2) plus dem doppelten Produkt aus dem ersten und zweiten Theil (2 . 4 . 20) plus dem Quadrat des zweiten Theils (4^2).

Um dies kürzer und allgemeiner auszudrücken, kann man statt des ersten Theils der Wurzel (20) auch a und statt des zweiten Theils (4) auch b setzen, und man erhält dann:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + ab \qquad \\ \hline a^2 + 2ab + b^2. \end{array}$$

Jedes Quadrat einer zweitheiligen (zweiziffrigen) Zahl ist demnach aus den vorstehenden Theilen zusammengesetzt; zieht man daher aus einem gegebenen Quadrat diese Theile nach der Formel heraus, so muß man die Wurzel erhalten.

Da nun jede einziffrige Zahl höchstens 2 Ziffern, eine zweiziffrige Zahl höchstens 4 Ziffern, eine dreiziffrige Zahl höchstens 6 Ziffern ins Quadrat giebt, so theilt man jede Zahl, aus der die Quadratwurzel gezogen werden soll, in Klassen à 2 Ziffern von der rechten zur linken Hand und zieht nach und nach aus jeder Klasse mittelst der Formel die Wurzel.

1) Es soll die Quadratwurzel aus 7225 gezogen werden:

$$\begin{array}{rl} \sqrt{7225} = & 72|25|85 \\ a^2 = & 64 \\ & \overline{825} \\ (2a = & (16) \\ 2ab = & 80 \\ b^2 = & 25 \\ & \overline{825.} \end{array}$$

Man theilt die Zahl durch einen Strich in die beiden Klassen 72 und 25. 72 ist kein Quadrat; das nächste Quadrat ist 64, davon ist die Wurzel 8, welche als erster Theil der Wurzel hinter einen Strich gesetzt wird. Die 64 = a^2 (8^2) wird unter 72 gesetzt und von dieser abgezogen; es bleibt 8, dazu herunter 25, giebt 825. Um nun b zu finden, nimmt man 2a (2 . 8) = 16 und setzt diese so unter 825, daß hinten eine Ziffer frei bleibt, also unter 82; 16 in 82 giebt 5, dies ist b und wird hinten neben die 8 gesetzt; also 2ab = 2 . 8 . 5 = 16 . 5 = 80; nun noch $b^2 = 5^2$ = 25 hinzu, welches so gesetzt wird, daß es mit der hinteren Ziffer der zweiten Klasse abschneidet, giebt zusammen 825.

Es ist also die Wurzel von 7225 = 85.

Man kürzt dies Verfahren in der Praxis dadurch ab, daß man den zweiten Theil (5) erst mit sich selbst und dann weiter mit 16 multiplicirt, so daß 2ab + b^2 = 825 unmittelbar unter 16 kommt. Auch ist nicht nöthig, die 16 (2a) unter 82 zu schreiben, man kann sie auch links vorsetzen, nur muß man dann darauf achten, daß man beim Dividiren die letzte Zahl rechts von der heruntergezogenen Klasse frei läßt. Das vorstehende Beispiel würde hiernach also zu rechnen sein:

$$\begin{array}{rl} \sqrt{7225} = & 72|25|85 \\ a^2 = & 64 \\ (2a = 16) & \overline{825} \\ 2ab + b^2 = & 825 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \sqrt{9801} = & 98|01|99 \\ & 81 \\ & \overline{1701} \\ (18) & 1701 \end{array}$$

§ 240.

Soll die Quadratwurzel aus einer 5-, 6- und mehrziffrigen Zahl gezogen werden, so sucht man zuerst den ersten und zweiten Theil der Wurzel wie in § 239; hat man diese, so betrachtet man beide zusammen als a und verfährt dann mit Anwendung derselben Formel ($a^2 + 2ab + b^2$) in gleicher Art, wie es § 239 gezeigt worden ist.

$$\begin{array}{rl} \sqrt{55696} = & 5|56|96|\overset{a}{\overline{23}}6 \\ a^2 = & 4 \\ (2a = 4) & \overline{156} \\ 2ab + b^2 = & 129 \\ (2a = 46) & \overline{2796} \\ 2ab + b^2 = & 2796. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \sqrt{189225} = & 18|92|25|\overset{a}{\overline{43}}5 \\ & 16 \\ & \overline{292} \\ (8) & 249 \\ & \overline{4325} \\ (86) & 4325. \end{array}$$

Das Quadrat des ersten Theils a^2 kommt nur einmal vor; man hat also bei jeder folgenden Klasse nur 2ab + b^2 abzuziehen.

Hat die Zahl, aus der die Quadratwurzel gezogen werden soll, noch mehrere Ziffern, so werden noch die drei ersten, dann die vier ersten u. s. w. Ziffern der Wurzel als a genommen.

§ 241.

Wenn die Quadratwurzel aus einem Decimalbruch gezogen werden soll, so kommt der erste Theilungsstrich dahin, wo das Komma des Decimalbruchs steht; von diesem Strich nach links werden nun die Ganzen und von dem Strich nach rechts die Decimalen in Klassen à 2 Ziffern getheilt. Fehlt bei den Decimalen zur letzten Klasse eine Ziffer, so wird dafür eine Null hingesetzt. Hierauf zieht man die Wurzel wie bei ganzen Zahlen aus und setzt das Komma in die Wurzel, sobald man mit dem Ausziehen der Wurzel aus den **Ganzen** fertig ist.

$\sqrt{1173,0625} = 11|73|06|25|34,25$

```
         9
       ———
       273
(6)    256
       ————
       1706
(68)   1364
       —————
       34225
(684)  34225.
```

§ 242.

Soll die Quadratwurzel aus einem gewöhnlichen Bruch gezogen werden, so zieht man sie aus dem Zähler und dem Nenner, wenn beide Zahlen vollkommene Quadrate sind. Ist dies nicht der Fall, so verwandelt man den gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch und verfährt wie in § 241.

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$; $\sqrt{\frac{81}{144}} = \frac{9}{12} = {}^3/_4$.

$\sqrt{\frac{9}{100}} = \sqrt{0,09} = 0,3$; $\sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{0,8} = 0,|80|00|00|894 = 0,894\ldots$

```
   64
  ————
  1600
  1521
  —————
   7900
   7136
```

Aus 0,8 läßt sich eine genaue Quadratwurzel nicht ziehen, d. h. es giebt keine Zahl, die, mit sich selbst multiplicirt, genau 0,8 giebt. Man nennt deshalb eine solche Wurzel eine *irrationale*, zum Unterschiede von allen bisherigen *rationalen* Wurzeln. Die irrationale Wurzel wird durch hintergesetzte Punkte bezeichnet, welche andeuten, daß die Wurzel noch mehrere Decimalen erhalten kann.

Aehnlich wie mit 0,8, der man mehrere Nullen angehängt hat, verfährt man auch, wenn ein Rest nach dem Ausziehen der Wurzel übrig bleibt.

$\sqrt{5689} = 56|89|75,42\ldots$

```
          49
         ————
          789
(14)      725
         ————
          6400
(150)     6016
         —————
          38400
(1508)    30164
         ——————
           8236
```

Nachdem die Wurzel 75 ausgezogen ist, bleibt der Rest 64; man hängt diesem nun 2 Nullen als nächste Klasse an und zieht hieraus weiter die Wurzel nach § 241; dem Reste 384 werden wieder 2 Nullen angehängt und so fährt man so lange fort, als man Decimalen in der Wurzel haben will.

B. Ausziehen der Kubikwurzel.

§ 243.

Die 3te Potenz oder den **Kubus** der Zahlen von 1 bis 9 muß man im Kopfe haben oder sich sonst merken; nämlich:

Wurzel.		Kubus.
1	$= 1 \times 1 \times 1 =$	1
2	$= 2 \times 2 \times 2 =$	8
3	$= 3 \times 3 \times 3 =$	27
4	$= 4 \times 4 \times 4 =$	64
5	$= 5 \times 5 \times 5 =$	125
6	$= 6 \times 6 \times 6 =$	216
7	$= 7 \times 7 \times 7 =$	343
8	$= 8 \times 8 \times 8 =$	512
9	$= 9 \times 9 \times 9 =$	729

Um nun aus einer größeren mehrziffrigen Zahl die Kubikwurzel zu ziehen, muß man denselben Weg einschlagen, wie beim Ausziehen der Quadratwurzel, d. h. man muß sehen, wie die Kubikzahl aus der Wurzel zusammengesetzt ist und, darauf basirt, die Wurzel aus dem Kubus ziehen.

$a + b$ mit sich selbst multiplicirt, giebt nach § 239, $a^2 + 2ab + b^2$ und dies nochmals mit $a + b$ multiplicirt, giebt:

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^2 b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2 b + ab^2 \quad\quad \\ \hline a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Nach dieser Formel wird nun, ähnlich wie es bei der Quadratwurzel geschehen ist, die 3te Wurzel aus der gegebenen Zahl gezogen, nur daß man hier die letztere in Klassen zu 3 Ziffern theilt, weil eine höhere einzelne Ziffer schon 3 Ziffern im Kubus giebt.

1) Es soll die 3te Wurzel oder die Kubikwurzel aus 79507 gezogen werden.

$$\begin{array}{rl} \sqrt[3]{79507} = & 79|507 \,|\, 43 \\ a^3 = & 64 \\ \hline & 15507 \\ (3a^2) = & (48) \\ 3a^2 b = & 144 \\ 3ab^2 = & 108 \\ b^3 = & 27 \\ \hline & 15507 \end{array}$$

Zu 79 ist der nächste Kubus 64 und die 3te Wurzel von 64 ist 4; 4 ist also der erste Theil der Wurzel, welche hinter einen Strich gesetzt wird. 64 unter 79 gesetzt und abgezogen, giebt 15; daneben wird die folgende Klasse 507 gesetzt.

Nun ist $a^2 = 16$ (4×4) und $3a^2 = 48$; diese Zahl wird so unter den Rest gesetzt, daß **hinten 2 Ziffern frei bleiben**. In die über 48 stehenden 3 Ziffern (155) dividirt man jetzt mit 48, welches 3 giebt und $= b$ ist, also als zweiter Theil der Wurzel neben 4 gesetzt wird.

$48 \times 3 = 3a^2 b = 144$ wird so unter 48 gesetzt, daß es hinten mit dieser Zahl abschneidet. Nun muß noch $3ab^2 + b^3$ folgen. b^2 ist $= 9$ (3×3) und $3a = 12$, also $3ab^2 = 108$; diese 108 wird so unter das vorige Produkt gesetzt, daß rechts nur noch eine Ziffer von dem obenstehenden Reste frei bleibt. Zuletzt wird $b^3 = 3^3 = 27$ so unter das letzte Produkt gesetzt, daß es hinten rechts mit dem obenstehenden Reste abschneidet. Die 3 letzten Produkte werden hierauf addirt und müssen dem obenstehenden Reste gleich sein, wenn die Wurzel nur aus den beiden gefundenen Ziffern besteht, also eine ganze Zahl ist.

Sind diese drei Produkte jedoch dem oben stehenden Rest nicht gleich, sondern bleibt wieder ein Rest, so verfährt man in ähnlicher Weise, wie es § 242 beim Ausziehen der Quadratwurzel gezeigt ist, nur daß man hier drei Nullen, statt dort 2 Nullen dem Reste anhängt.

§ 244.

Besteht die Zahl, aus der die Kubikwurzel gezogen werden soll, aus 8 oder 9 Ziffern, so ist die Wurzel eine dreiziffrige Zahl. In diesem Falle sucht man wie vorhin die zwei ersten Ziffern der Wurzel und betrachtet diese als a, worauf man dann mit Anwendung der Formel fortfährt, die dritte Ziffer der Wurzel ähnlich zu suchen, wie es beim Ausziehen der Quadratwurzel geschehen ist.

$$\sqrt[3]{82312875} = 82|312|875 \,|\, \overset{a}{\widetilde{43}}5$$

$$64$$

$$18312$$

$$(48)$$

$$\left.\begin{array}{r} 144 \\ 108 \\ 27 \end{array}\right\}$$ addirt = 15507; von 18312 abgezogen giebt 2805, dazu von oben 875.

$$2805875$$

$$(5547)$$

$$\left.\begin{array}{r} 27735 \\ 3225 \\ 125 \end{array}\right\}$$ addirt = 2805875.

Bei 11 oder 12 Ziffern ist die Wurzel eine vierziffrige Zahl; hier werden die ersten drei Ziffern der Wurzel als a genommen u. s. w.

§ 245.

Ist die dritte Wurzel aus einem Decimalbruch zu ziehen, so verfährt man ebenso, wie es in § 243 gezeigt ist, nur daß man den ersten Theilungsstrich dahin setzt, wo das Komma steht, und von da aus, rechts und links, die Zahl in Klassen à 3 Ziffern theilt. Gewöhnlich zieht man jedoch bei einem Decimalbruch die dritte Wurzel mittelst Logarithmen aus.

Soll aus einer Zahl die vierte Wurzel gezogen werden, so zieht man aus derselben erst die Quadratwurzel und dann aus dieser Wurzel wieder die Quadratwurzel. Soll die sechste Wurzel ausgezogen werden, so zieht man erst die Quadratwurzel und aus dieser die dritte Wurzel u. s. w. aus. In der Regel wendet man aber auch hierbei, statt des langwierigen Verfahrens, die Logarithmen an (§ 223).

XXVI. Die Raumgrößenrechnung.

§ 246.

Die Raumgrößenrechnung beschäftigt sich mit der Berechnung der Linien, Flächen und Körper.

Ein Körper hat 3 Ausdehnungen im Raume, nach der Länge, Breite und Höhe oder Dicke.

Die Grenzen eines Körpers sind Flächen, welche 2 Ausdehnungen nach der Länge und Breite haben. Die Grenzen einer Fläche sind Linien, welche nur eine Ausdehnung nach der Länge haben, und die Grenzen einer Linie sind Punkte, die keine Ausdehnung haben.

Flächen, Linien und Punkte sind selbstständig nicht vorhanden, sondern kommen nur an einem Körper vor, doch denkt man sie sich auch abgesondert, für sich bestehend, wenn es nur auf ihre Form ankommt. Auch vom Körper werden bei der Berechnung die physischen Eigenschaften fortgedacht, so daß nur der von ihm eingenommene Raum in Betracht kommt.

A. Linien.

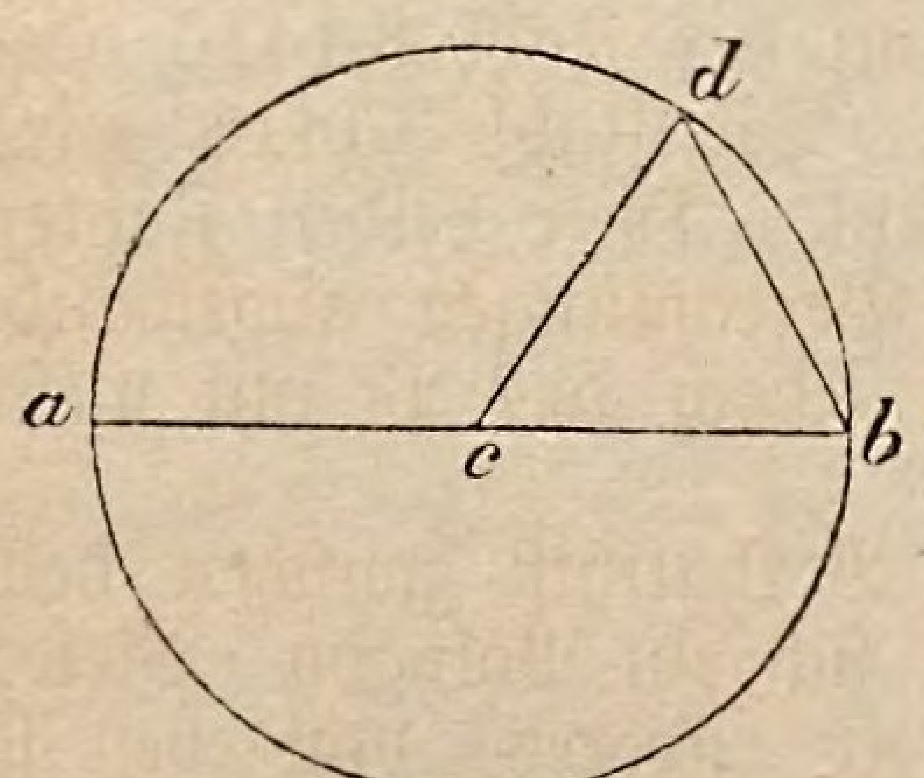
a) Eigenschaften und Eintheilung der Linien.

§ 247.

Denkt man sich einen Punkt fortbewegt, so beschreibt sein Weg eine Linie. Geschieht diese Fortbewegung nach einer immer gleichen Richtung, so entsteht die gerade Linie; ändert der Punkt bei seiner Fortbewegung beständig die Richtung, so entsteht die krumme Linie.

Die Kreislinie ist ebenfalls eine krumme Linie und entsteht in derselben Weise wie diese, hat aber noch die besondere Eigenschaft, daß ihr Anfang und Ende in einander fallen, und daß sie von einem Punkte innerhalb überall gleich weit entfernt ist.

Jede Kreislinie, sie mag groß oder klein sein, wird in 360 gleiche Theile getheilt, die man Grade nennt; jeder Grad hat 60 Minuten, jede Minute 60 Sekunden. Der Punkt c innerhalb der Kreislinie, von dem diese überall gleich weit entfernt ist, wird der Mittelpunkt oder das Centrum, die Linien ac, cb und cd werden die Radien, ab der Durchmesser, die krumme Linie db ein Bogen und die gerade Linie db eine Sehne der Kreislinie genannt. Zwei in einander liegende Kreislinien sind concentrisch, wenn sie einen gleichen Mittelpunkt haben, excentrisch, wenn dies nicht der Fall ist.



Gerade Linien, die eine gleiche Richtung haben, und in allen ihren Punkten gleich weit entfernt von einander bleiben, so weit man sie auch verlängert, nennt man parallele Linien oder Parallelen. Das Zeichen für parallel ist ∦, also Linie ef ∦ gh.



Sind die Linien nicht parallel, so schneiden sie sich entweder unmittelbar, oder wenn sie verlängert werden. Solche Linien, wenn sie eine Lage neben-

einander haben, heißen schiefe Linien und man sagt, sie convergiren, d. h. sie gehen zusammen nach derjenigen Seite, wo sie sich bei der Verlängerung schneiden, und divergiren, d. h. sie gehen auseinander nach der Seite, die der vorigen entgegengesetzt ist. Schneiden sich 2 Linien, so entstehen immer 4 Winkel, von denen weiter unten die Rede ist.

b) Messen und Berechnen der Linien.

§ 248.

Gerade Linien werden durch irgend eine angenommene Einheit, die 1 Meter, 1 Yard, 1 Arschin u. s. w. sein kann, gemessen, indem man einen Maßstab, der eine bestimmte Anzahl dieser Einheiten und ihrer Theile enthält, an die Linie anlegt. Die Maßstäbe sind gewöhnlich von Holz und beim Metermaßstab in Deci, Centi und Milli getheilt. Um auch Zehntelmilli messen zu können, muß der Maßstab mit einem Nonius versehen sein. Besonders die zum Zusammenlegen eingerichteten Maßstäbe sind an den Enden mit Messing beschlagen, um sie gegen das Abnutzen zu schützen. Maßstäbe von Messing oder Eisen sind haltbarer und werfen (biegen) sich nicht, doch bei sehr großer Hitze und Kälte sind sie nicht mehr ganz genau, weil die Hitze sie ausdehnt und die Kälte sie zusammenzieht. Gläserne Maßstäbe wären die besten, allein sie werden für gewöhnliche Messungen nicht angewandt, weil sie zu zerbrechlich und daher zu kostspielig sind.

Um lange Linien auf dem Felde zu messen, bedient man sich der Meßkette, Meßleine oder Meßschnur. Sie sind 5 oder 10 Meter lang und bei der Kette durch Ringe, bei der Leine und Schnur durch andere Merkzeichen in Unterabtheilungen getheilt. Natürlich sind die Messungen mit diesen Werkzeugen nicht ganz genau, daher auch bei wichtigen Messungen, z. B. Gradmessungen, nur Maßstäbe, die sehr häufig von Glas sind, angewandt werden. Um Messungen in dieser Weise ausführen zu können, müssen die Richtungen durch eingesteckte Stangen (Flaggen, Jalons) bezeichnet werden.

Zum Messen der Linien auf dem Papier bedient man sich des Zirkels und gewöhnlich solcher Maßstäbe von Messing, auf denen durch Transversalen 1 Zenti in Milli und Zehntelmilli getheilt ist; mittelst eines Nonius kann man von diesen auch Hundertstelmilli ablesen.

Krumme Linien, wie z. B. die Umfassung der Teiche und Seen, der Berge, Biegungen der Wege und Flüsse, werden in so kleine Theile zerlegt, als nöthig ist, um sie noch als gerade Linien annehmen zu können, die dann gemessen und addirt werden. Kreislinien werden nicht direkt gemessen; man mißt nur ihren Durchmesser und multiplicirt diesen mit der Zahl 3,1416 oder 3,14, wodurch man die Länge der Kreislinie erhält. Die Zahl 3,1416 wird Pi genannt und dafür der griechische Buchstabe π gesetzt. Diese beiden Zahlen für π sind diejenigen, welche bei allen gewöhnlichen Berechnungen angewandt werden; bei sehr genauen Berechnungen nimmt man jedoch das Pi mit mehr Decimalen, welche weiter unten angegeben sind.

Um durch Annäherung oder Approximation das Verhältniß zwischen dem Durchmesser und der Kreislinie zu finden, stelle man sich ein Polygon (Vieleck mit geraden und gleichen Seiten) in den Kreis und ein anderes, von eben so vielen gleichen Seiten um den Kreis beschrieben vor, so ist jeder Kreisbogen größer als die Seite des in den Kreis beschriebenen Vielecks und kleiner als die Seite des um den Kreis beschriebenen Vielecks. Halbirt man die Polygonseiten und setzt diese Verkleinerung derselben dadurch, daß man dem Polygon immer doppelt so viele Seiten giebt, so lange fort, bis die Polygonseite um den Kreis sehr annähernd gleich der in dem Kreise wird, was beim 393210=Eck fast genau erreicht wird, so giebt das Mittel zwischen beiden Polygonseiten die

Länge des eingeschlossenen Kreisbogens, wodurch sich dann die ganze Kreislinie berechnen läßt.

Archimedes (287 v. Chr.) hat aus der berechneten Seite des in und um den Kreis beschriebenen 96=Ecks bereits das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie wie 7 : 22 = 1 : 3,14 gefunden. Andere Griechen gingen später bis 3,141592653, Ludolph von Ceulen aber ging noch weiter, indem er die Zahl Pi bis auf 35 Decimalen, nämlich zu 3,14159265358979323846264338327950288 berechnete. Ludolph von Ceulen, fälschlich von Cöln genannt, war ein geborner Deutscher, Sohn eines Kaufmanns zu Hildesheim, wurde später Professor der Kriegsbaukunst zu Leyden und starb 1610. Obwohl das Pi mit so vielen Decimalen, wie hier angegeben, wohl niemals in Anwendung kommen mag, so kommen doch häufig Fälle vor, wo man es mit mehren Decimalen, als vorn angegeben (3,1416), anwenden muß, um eine große Genauigkeit zu erlangen, so sind z. B. die von dem Verfasser dieses Buches herausgegebenen Quadrat= und Kubik=Tabellen für alle Kreisflächen, volle und hohle Cylinder, Berlin bei Fr. Appelius 1871, in 1000 Beispielen mit 12 Decimalen des Pi berechnet.

Welcher Unterschied durch die verschiedene Größe von Pi in der Berechnung entsteht, geht schon aus den folgenden beiden Beispielen hervor; bei späteren Flächen und Körperberechnungen tritt dies noch mehr hervor.

1) Der Durchmesser einer runden Kapelle beträgt 28 Meter 87 Centi; wie groß ist ihr Umfang?

28,87 × 3,14; 28,87 × 3,1416
= 90 Meter 65 Centi 1,8 Milli. = 90 Meter 69 Centi 7,992 Milli.

2) Der Umfang eines runden Gasometers beträgt 86 Meter 19 Centi 30 Milli; wie groß ist der Durchmesser?

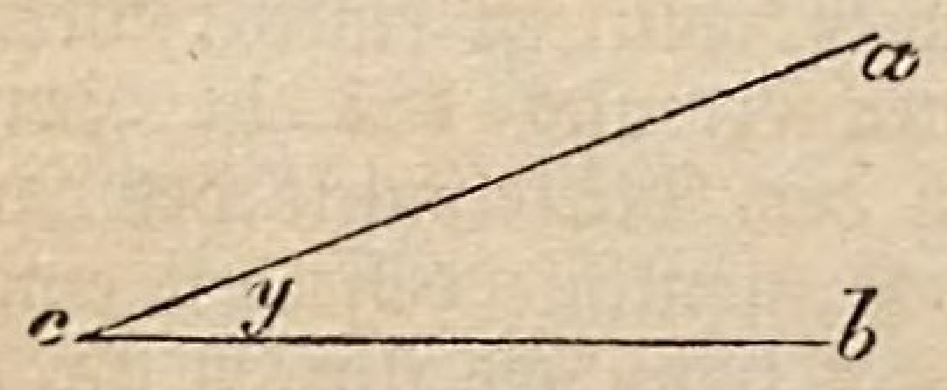
86,1930 : 3,14 = 27,45 Meter. 86,1930 : 3,1416 = 27,435 Meter.

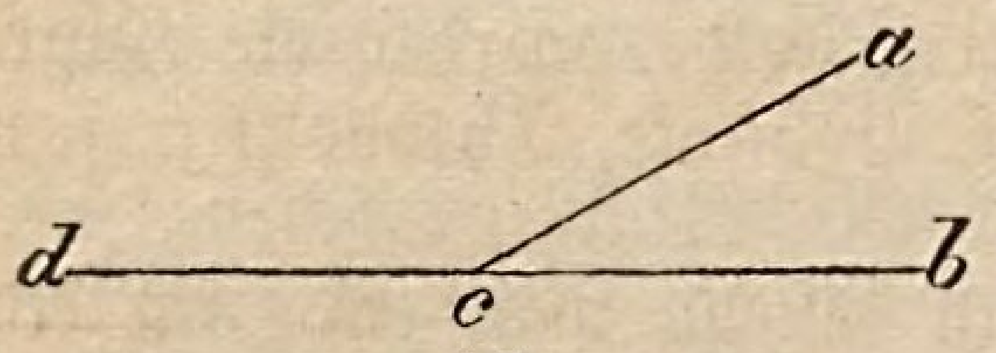
B. Winkel.

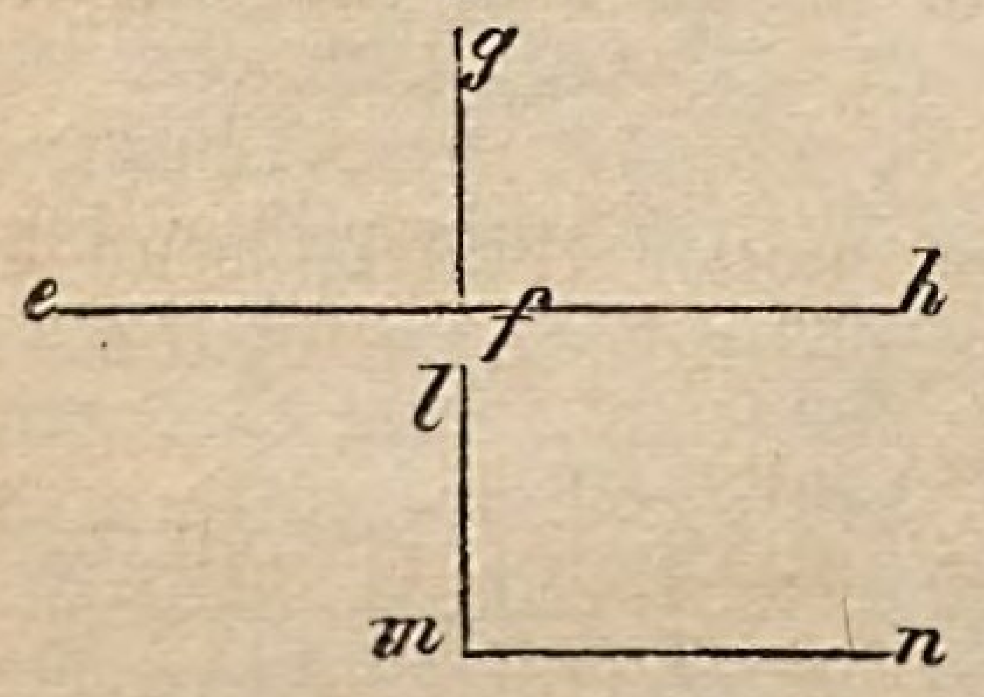
a) Eigenschaften und Benennung der Winkel.

§ 249.

Wenn 2 gerade Linien a c und c b in einem Punkt c zusammenstoßen, so entsteht ein Winkel a c b. Der Punkt c wird die Spitze oder der Scheitelpunkt und die Linien a c und c b werden die Schenkel des Winkels genannt.







Man bezeichnet einen Winkel entweder durch 3 Buchstaben, wobei der Buchstabe an der Spitze in die Mitte kommt, oder man setzt einen Buchstaben zwischen die Schenkel. Der hierneben gezeichnete Winkel heißt also nicht c a b, sondern a c b oder y. Für das Wort Winkel setzt man der Kürze halber auch das Zeichen ∡.

Verlängert man den Schenkel eines Winkels a c b über den Scheitelpunkt hinaus, etwa bis d, so entsteht ein zweiter Winkel a c d, der ein Nebenwinkel von a c b ist; umgekehrt ist a c b auch ein Nebenwinkel von a c d. Nebenwinkel sind also solche Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und bei denen die beiden anderen Schenkel eine gerade Linie bilden.

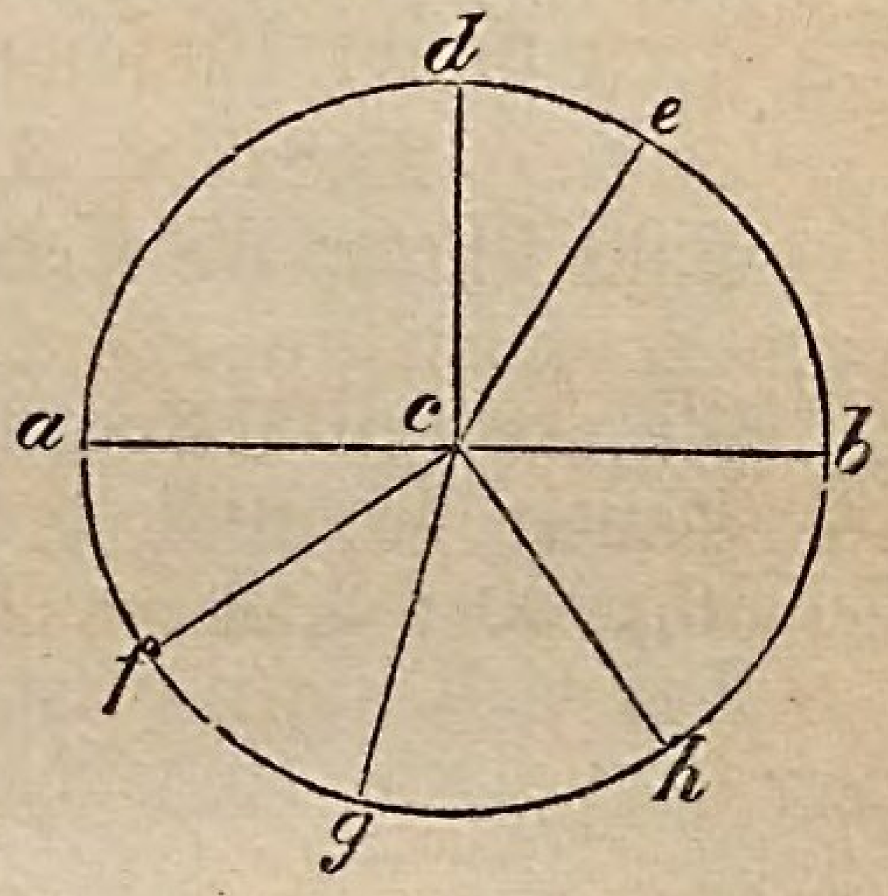
Sind zwei Nebenwinkel gfe und gfh einander gleich, so heißt jeder von ihnen ein rechter Winkel. Ein rechter Winkel (lmn) ist also der eine von zwei gleichen Nebenwinkeln. Das Zeichen für den rechten Winkel ist ein großes lateinisches R.

Die Schenkel eines rechten Winkels werden Senkrechte oder Normalen genannt; man sagt daher, ein Schenkel steht auf dem anderen rechtwinklig, normal oder senkrecht. lm steht also senkrecht auf mn und umgekehrt mn senkrecht auf lm.

§ 250.

Zieht man in einem Kreise den Durchmesser ab und errichtet in c eine Normale auf ab, so sind nach § 249 die beiden Nebenwinkel gleich, und jeder ist ein rechter Winkel. Nach § 247 wird jede Kreislinie in 360 Grade getheilt, also enthält die halbe Kreislinie adb 180 Grade und die viertel Kreislinie da oder db 90 Grad. Es beträgt mithin ein rechter Winkel immer 90 Grad, man mag um den Scheitelpunkt des Winkels einen Kreis schlagen, so groß wie man will, denn jeder Kreis wird in 360 Grade getheilt.

Ein Winkel, der kleiner ist als R, also weniger als 90° hat, wie ecb, wird ein spitzer Winkel genannt; ist er größer als R, d. h. hat er mehr als 90°, so heißt er ein stumpfer Winkel, wie eca. Beide Winkel werden auch, als Gegensatz zum rechten Winkel, schiefe Winkel genannt.



Zieht man aus c mehrere Radien cf, cg, ch, so entstehen mehrere Winkel um den Punkt c, die alle zusammen 360° ausmachen, also = 4 R sind, und da hiernach die Winkel über oder unter dem Durchmesser = 2 R sind, so sind immer alle über einer geraden Linie liegenden Winkel zusammen = 2 R.

b) Messen und Berechnen der Winkel.

§ 251.

Winkel werden im Kleinen, d. h. auf dem Papier, mittelst eines Instruments gemessen, welches man Transporteur nennt, und das in jedem größeren Reißzeuge zu finden ist. Man legt nämlich den Mittelpunkt des Instruments auf die Spitze des Winkels und die innere Kantenlinie desselben einen Schenkel des Winkels entlang; der andere Schenkel zeigt dann die Anzahl Grade an, die der Winkel enthält. Im Großen, d. h. auf dem Felde, werden die Winkel mittelst eines Winkel-Meßinstrumentes, Astrolabium, Boussole, Theodolit u. s. w. gemessen.

Das Berechnen der Winkel ist sehr einfach und besteht meist nur im Addiren und Subtrahiren derselben. Z. B.:

1) Wie groß ist die Summe und die Differenz zweier Winkel, wenn der eine 75 Grad 36 Minuten 8 Sekunden, der andere 65° 48′ 15″ enthält?

	75°	36′	8″	} addirt		75°	36′	8″	} subtrahirt
	65	48	15			65	48	15	
Summa	141°	24′	23″		Differenz	9°	47′	53″	

2) Wie groß ist der eine von zwei Nebenwinkeln, wenn der andere 54° 17′ 38″ ist?

Zwei Nebenwinkel liegen über einer geraden Linie, sind also nach § 249 = 2 R.

$$\begin{array}{r} 2\,R = 180^0 \\ 54^0\ 17'\ 38'' \\ \hline 125^0\ 42'\ 22'' \end{array} \Big\} \text{ subtrahirt}$$

3) Wie groß ist der eine Winkel von den um einen Punkt liegenden Winkeln, wenn alle übrigen zusammen 296° 28′ 56″ betragen?

Alle Winkel um einen Punkt sind = 4 R (§ 250).

$$\begin{array}{r} 4\,R = 360^0 \\ 296^0\ 28'\ 56'' \\ \hline 63^0\ 31'\ 4'' \end{array} \Big\} \text{ subtrahirt}$$

C. Flächen.

a) Eigenschaften und Eintheilung der Flächen.

§ 252.

Eine Fläche heißt eben oder ist eine Ebene, wenn alle in derselben gezogenen Linien gerade Linien sind. Die begrenzenden Linien werden Seiten, die Winkelspitzen Ecken und die Fläche selbst auch eine Figur genannt.

Danach hat man dreiseitige oder dreieckige, vierseitige oder viereckige und vielseitige oder vieleckige Flächen oder Figuren.

Die vielseitigen Flächen oder Figuren werden auch Polygone und die von einer Kreislinie eingeschlossene Ebene oder ebene Fläche wird Kreisfläche, Kreisebene oder Kreis genannt.

1) Die dreiseitigen Flächen oder Dreiecke.

§ 253.

Die Dreiecke werden nach ihren Seiten in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige, und nach ihren Winkeln in rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige Dreiecke getheilt.

Bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle 3 Seiten, beim gleichschenkligen nur 2 Seiten und beim ungleichseitigen ist keine Seite der andern gleich.

Das rechtwinklige Dreieck hat einen rechten Winkel, das stumpfwinklige einen stumpfen Winkel, und beim spitzwinkligen Dreieck sind alle 3 Winkel spitze Winkel. Die Summe der 3 Winkel in jedem Dreieck ist = 2 R = 180°, daher in einem rechtwinkligen Dreieck immer nur ein rechter und in einem stumpfwinkligen Dreieck nur ein stumpfer Winkel sein kann.

In jedem Dreieck liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, und umgekehrt gleichen Winkeln gleiche Seiten. Da nun beim gleichseitigen Dreieck die 3 Seiten gleich sind, so sind auch die 3 Winkel gleich, und weil sie zusammen

$$= 2\,R \text{ sind, so ist jeder } \frac{2\,R}{3} = \frac{180^0}{3} = 60 \text{ Grad.}$$

Beim gleichschenkligen Dreieck sind nur 2 Seiten gleich, also sind die beiden ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich, und da man die 3te, nicht gleiche Seite,

die *Grundlinie* nennt, und die beiden Winkel an dieser Seite liegen, so sind bei jedem gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie gleich. Daraus folgt weiter: wenn in einem Dreieck 2 Winkel gleich sind, so ist dasselbe ein gleichschenkliges.

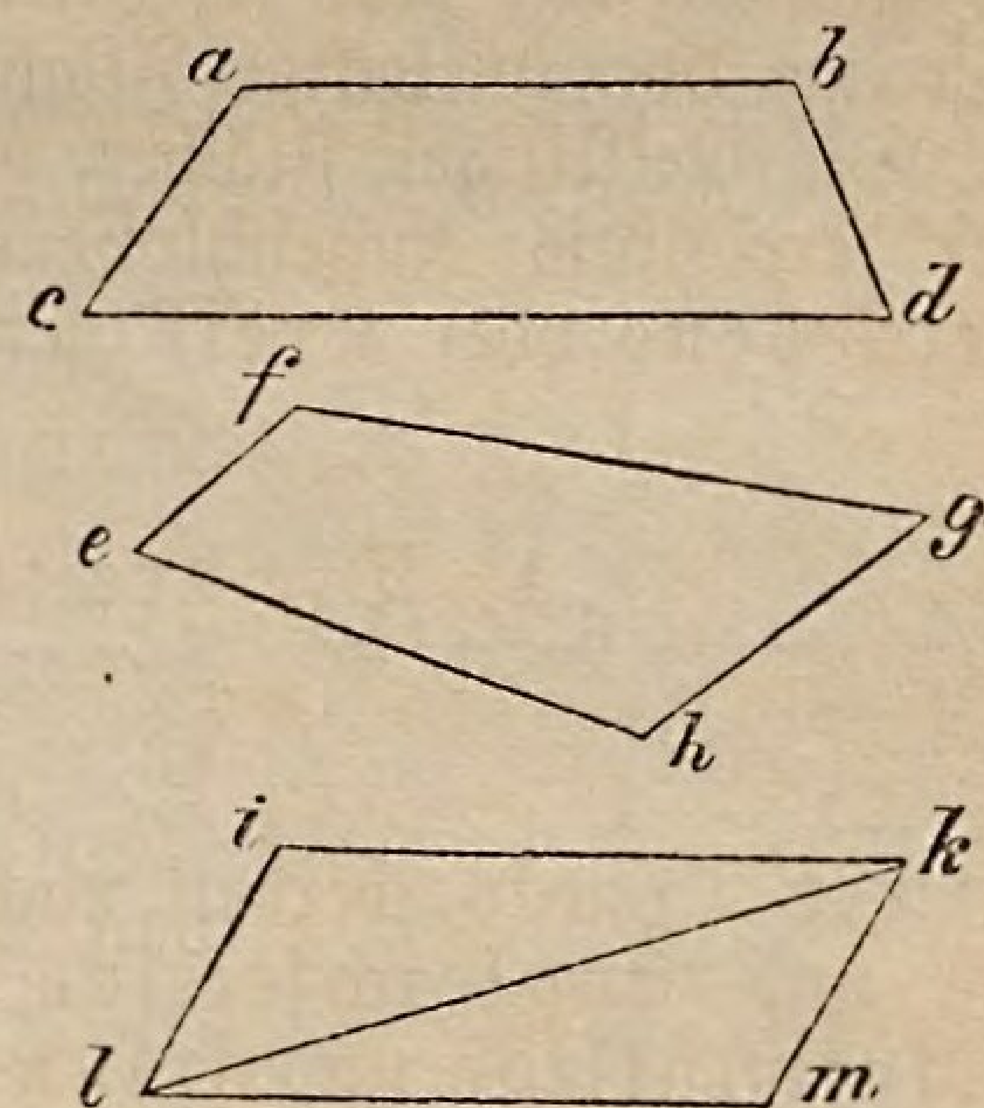
Beim rechtwinkligen Dreieck wird die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die *Hypotenuse*, und die beiden andern Seiten werden die *Katheten* genannt. Das Zeichen für Dreieck ist $\triangle$.

2) Die vierseitigen Flächen oder Vierecke.

§ 254.

Sind die 4 Seiten eines Vierecks *alle gleich*, und die Winkel sind *rechte*, so wird das Viereck ein *Quadrat* genannt; sind nur die *gegenüberliegenden* Seiten *gleich*, und die Winkel sind *rechte*, so heißt es ein *Rechteck* oder *Oblongum*; sind die 4 Seiten *gleich*, und die Winkel sind *schiefe* Winkel, so ist das ein verschobenes Quadrat, eine *Raute* oder ein *Rhombus*; und sind die gegenüberliegenden Seiten gleich, und die Winkel schiefe Winkel, so ist dies ein verschobenes Rechteck oder ein *Rhomboid*. Alle 4 Figuren werden auch *Parallelogramme* genannt, weil die gegenüberliegenden Seiten parallel sind.

Sind in einem Viereck nur zwei gegenüberliegende Seiten parallel, die anderen beiden Seiten nicht, so heißt das Viereck ein *Trapez* oder *Parallel=trapez* a b c d (a b $\#$ c d), und ist keine Seite der anderen parallel, ein *Trapezoid* e f g h.



Verbindet man zwei gegenüberliegende Ecken eines Vierecks durch eine gerade Linie l k, so wird diese die *Diagonale* des Vierecks genannt. Durch dieselbe wird jedes Viereck in 2 Dreiecke getheilt, und da die Summe der Winkel in jedem Dreieck 2 R beträgt (§ 253), so ist die Summe der 4 Winkel in jedem Viereck $= 2 \times 2\,R = 4\,R$.

Bei den Parallelogrammen sind die durch die Diagonale l k entstandenen beiden Dreiecke i l k und l k m einander *gleich*, deshalb sind auch die gegenüberliegenden Winkel in jedem Parallelogramm gleich, also $\measuredangle$ l i k = l m k und i k m = i l m. Daß auch die gegenüberliegenden Seiten in jedem Parallelogramm gleich sein müssen, geht aus § 253 hervor.

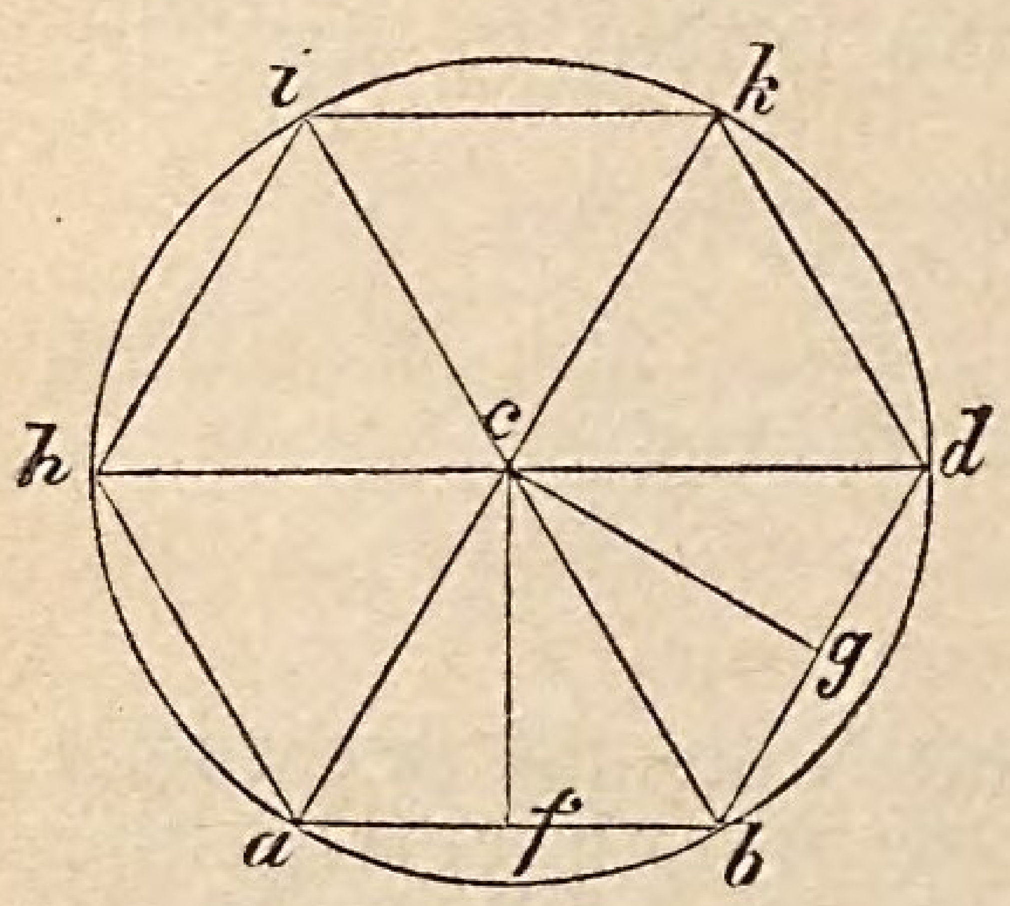
3) Die vielseitigen Flächen oder Vielecke (Polygone).

§ 255.

Jede von mehr als 4 Seiten eingeschlossene Fläche oder Ebene wird ein *Vieleck* oder *Polygon* genannt. Danach giebt es *Fünfecke*, welche 5 Seiten, *Sechsecke*, die 6 Seiten haben, *Siebenecke* mit 7, *Achtecke* mit 8 Seiten x.

Sind alle Seiten gleich, so wird ein solches Polygon ein *reguläres* oder *regelmäßiges*, sind die Seiten ungleich, ein *irreguläres* oder *unregel=mäßiges* Polygon genannt.

Die regulären Polygone sind gewöhnlich in oder um einen Kreis construirt und haben deshalb einen Mittelpunkt, von dem alle Seiten gleich weit entfernt sind. Man findet denselben, wenn man 2 Seiten, etwa a b und b d in f und g halbirt und in den Halbirungspunkten Senkrechte errichtet; da, wo sich diese schneiden, ist der Mittelpunkt c. Zieht man von dem Mittelpunkt Linien nach den Ecken, so entstehen so viele gleichschenklige Dreiecke, als das Polygon Seiten hat. Der Winkel an der Spitze dieser Dreiecke, ∡ d c b oder ∡ b c a, heißt der **Centriwinkel**, und da alle Winkel um einen Punkt = 4 R sind (§ 250), so findet man denselben, wenn man mit der Seitenzahl in 4 R = 360° dividirt. Beim 5=Eck ist er also $\frac{360}{5} = 72^{\circ}$, beim 6=Eck $\frac{360}{6} = 60^{\circ}$, beim 7=Eck $\frac{360}{7} = 51^{\circ}\ 25'\ 42^{6}/_{7}''$ 2c.

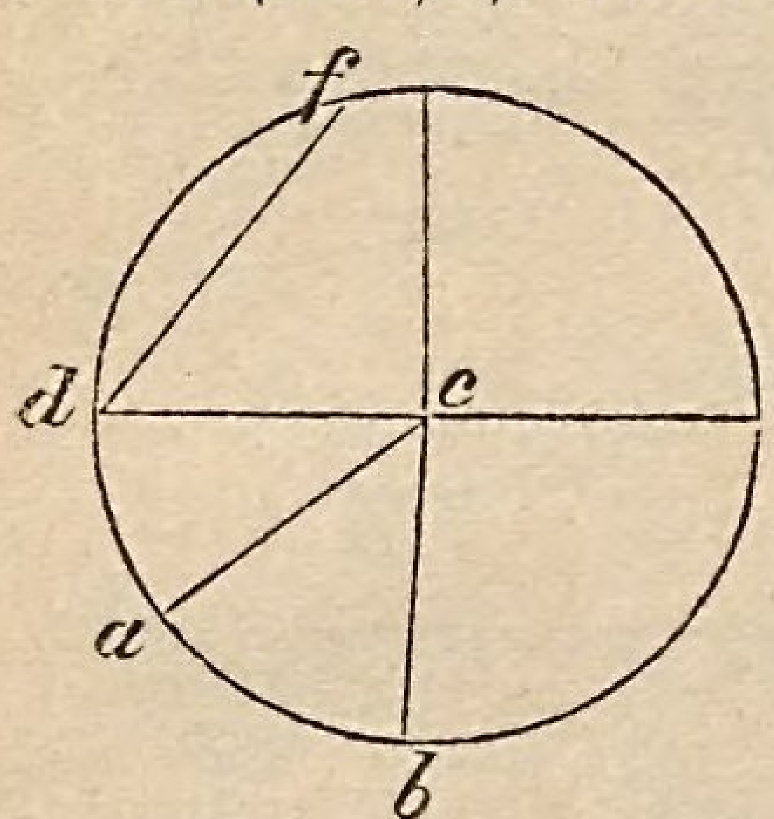


Die beiden Winkel an der Grundlinie jedes dieser gleichschenkligen Dreiecke, wie ∡ c b d und c d b, c b a und c a b, heißen **halbe Polygonwinkel**; zwei nebeneinander liegende bilden den **ganzen** Polygonwinkel a b d, h i k u. s. w., welcher von 2 Seiten des Polygons gebildet wird.

4) Die Kreisfläche oder der Kreis.

§ 256.

Eine von einer Kreislinie (§ 247) eingeschlossene ebene Fläche heißt eine **Kreisfläche**, **Kreisebene** oder ein **Kreis**. Jeder im Kreise gezogene Durchmesser theilt den Kreis in 2 **Halbkreise**, und 2 senkrecht auf einander stehende Durchmesser theilen ihn in 4 **Quadranten** oder Viertelkreise.



Der von 2 Radien a c und c b und dem Bogen a b begrenzte Theil des Kreises heißt ein **Kreisausschnitt** oder **Sector**, und der von der Sehne d f abgeschnittene Theil wird Kreisabschnitt oder **Segment** genannt. Die von 2 concentrischen Kreislinien (§ 247) eingeschlossene Fläche nennt man einen **geometrischen Ring**.

b) Messen und Berechnen der Flächen.

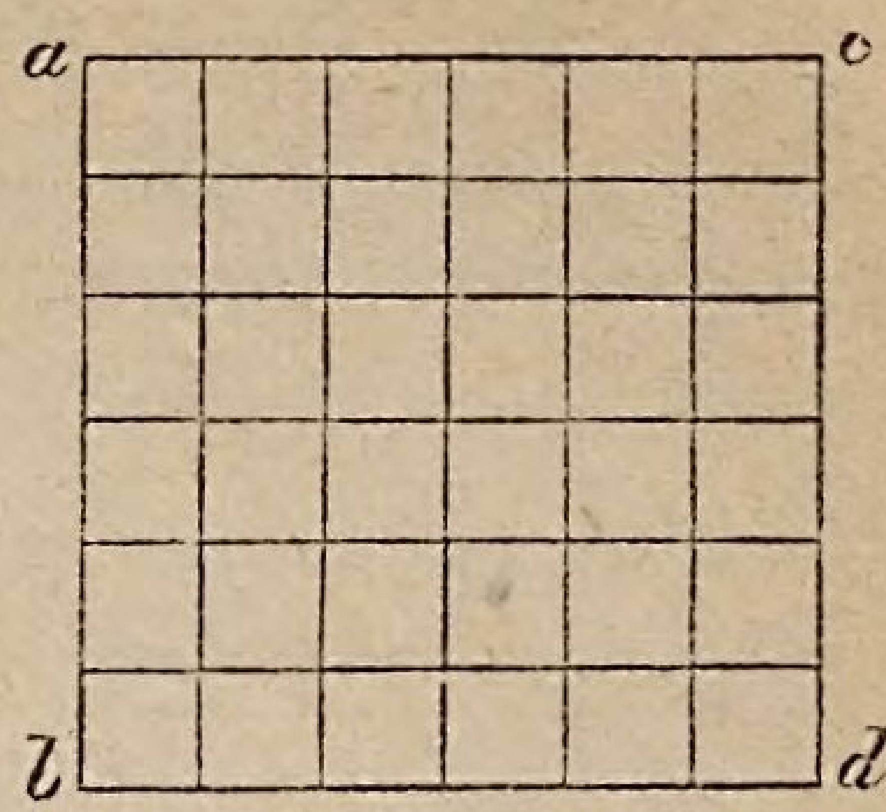
1) Das Quadrat.

§ 257.

Wie bei den Linien, so wird auch bei den Flächen eine Einheit als Maß angenommen, nur daß sie dort eine Linie war und hier eine Fläche sein muß, die man **Quadrat** nennt, weil sie eben so breit als lang ist.

Solche Flächenmaße sind das Quadrat=Meter, das Quadrat=Centi und das Quadrat=Milli.

Soll nun eine Quadratfläche a b c d, die 6 Centi lang und 6 Centi breit ist, ausgemessen werden, so wird ein Quadrat-Centi, das 1 Centi lang und 1 Centi breit ist, an der einen Seite des gegebenen Quadrats sechs mal neben einander gelegt werden können, und da die Fläche auch 6 Centi breit ist, so kann dieselbe Lage noch 5 mal darüber, also im Ganzen 6 mal der Breite nach über einander gelegt werden; es wird mithin die Quadratfläche a b c d 6 × 6 Quadrate à 1 □Centi = 36 Quadrate à 1 □Centi = 36 Quadrat-Centi enthalten. Daraus geht hervor, daß man in der Wirklichkeit ein Quadratmaß nicht gebraucht, sondern sich solches nur denkt und das Produkt aus der Länge und Breite danach benennt. 6 Centi Länge mal 6 Centi Breite geben mithin $6 \times 6 = 6^2 = 36$ Quadrat-Centi. Es wird demnach **der Inhalt eines Quadrats gefunden, wenn man die Seite desselben mit sich selbst multiplicirt.**



§ 258.

Bezeichnet J den Inhalt und s die Seite des Quadrats, so ist:

$J = s^2$ und also auch

$s = \sqrt{J}$, d. h, man findet die Seite aus dem Inhalt, wenn man aus diesem die 2te Wurzel (Quadratwurzel) zieht.

1) Wie groß ist der Inhalt eines Quadrats, dessen Seiten 12 Meter 3 Centi lang sind?

12 Meter 3 Centi sind 1203 Centi.

$J = s^2 = 1203^2 = 1203 \times 1203$

```
     3609
    14436
  1447209 Quadrat-Centi.
```

also J = 144 □Meter 7209 □Centi.

2) Die Seite eines Quadrats ist 2 Meter 75 Centi 3 Milli lang; wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrats?

2 Meter 75 Centi 3 Milli sind 2753 Milli.

$J = s^2 = 2753^2 = 2753 \times 2753$

```
     8259
    13765
   74331
  7579009 Quadrat-Milli
```

also J = 7 □Meter 5790 □Centi 9 □Milli.

3) Der Flächeninhalt eines Quadrats beträgt 13 □Meter 5424 □Centi; wie groß ist die Seite?

13 □Meter 5424 □Centi sind 135424 □Centi.

$s = \sqrt{J} = \sqrt{13|54|24}$ | 368 Centi = 3 Meter 68 Centi.

```
 9
 454
 (6)
 396
  5824
  (72)
  5824
```

4) Ein Quadrat hat 29 □Meter 8116 □Centi Flächeninhalt; wie groß ist die Seite desselben?

29 □Meter 8116 □Centi sind 298116 □Centi

$s = \sqrt{J} = \sqrt{29|81|16}\,|546$ Centi = 5 Meter 46 Centi.

```
 25
 ---
 481
 (10)
 416
 ----
  6516
  (108)
  6516
  ----
```

5) Eine Quadratfläche, die $26^1/_4$ Meter lang und breit ist, soll mit quadratförmigen Granitplatten belegt werden, deren Seitenlänge 75 Centi beträgt; wie viele solcher Platten sind dazu erforderlich?

$26^1/_4 \times 26^1/_4 = \frac{105}{4} \times \frac{105}{4} = \frac{11025}{16}$; $^3/_4 \times {}^3/_4$ Meter $= {}^9/_{16}$ Meter
(75 Centi $= {}^3/_4$ Meter)

$\frac{11025}{16} : \frac{9}{16} = 11025 : 9 = 1225$ Platten.

6) Eine Quadratfläche, deren Seitenlänge 75 Meter beträgt, soll mit Obstbäumen so bepflanzt werden, daß jeder Baum $6^1/_4$ □Meter Bodenraum erhält; wie viele Bäume können auf der Fläche gepflanzt werden?

$75 \times 75 = 5625$ □Meter

$5625 : 6^1/_4 = \frac{5625 \,.\, 4}{25} = 900$ Bäume.

7) Das Quadratmeter Oelfarbeanstrich kostet $12^1/_2$ Sgr.; was wird der Fußboden eines Saales zu streichen kosten, welcher $18^1/_5$ Meter lang und breit ist?

$18^1/_5$ Meter sind 18 Meter 20 Centi = 1820 Centi.

```
 1820 × 1820
 -----------
  36400
 3276
 -------
 3312400 □Centi = 331 □Meter 2400 □Centi = 331,24 □Meter.
 331,24 × 25/2
 ------ : 2
 165,62 × 5
 828,10 × 5
4140,50 Sgr. = 4140,50 : 30
               138 Thlr. 6 Pf. kostet das Streichen des Fußbodens.
```

8) Was wird das Abmähen eines Ackerstücks kosten, welches $95^1/_2$ Meter lang und breit ist, wenn für das Ar abzumähen 15 Sgr. gezahlt werden?

```
  95,5 × 95,5
  ---------- × 5
  4775 × 19
 90725
 -------
 9120,25 □Meter = 91,2025 Ar
                  -------- × 3
                  2736075 × 5
                 1368,0375 Sgr. = 45 Thlr. 18 Sgr.
```

9) Ein Stück Land in Amerika, welches 600 englische Fuß (feet) lang und breit ist, soll 400 Dollars kosten; wieviel beträgt dies auf 1 Ar, wenn 91 Meter = 300 Feet sind?

600 Feet sind 182 Meter; 182 × 182

$$\begin{array}{r} 182 \times 182 \\ \hline \times 2 \\ 364 \times 9 \\ 3276 \quad \\ \hline 33124 \end{array}$$

33124 □Meter = 331,24 Ar.

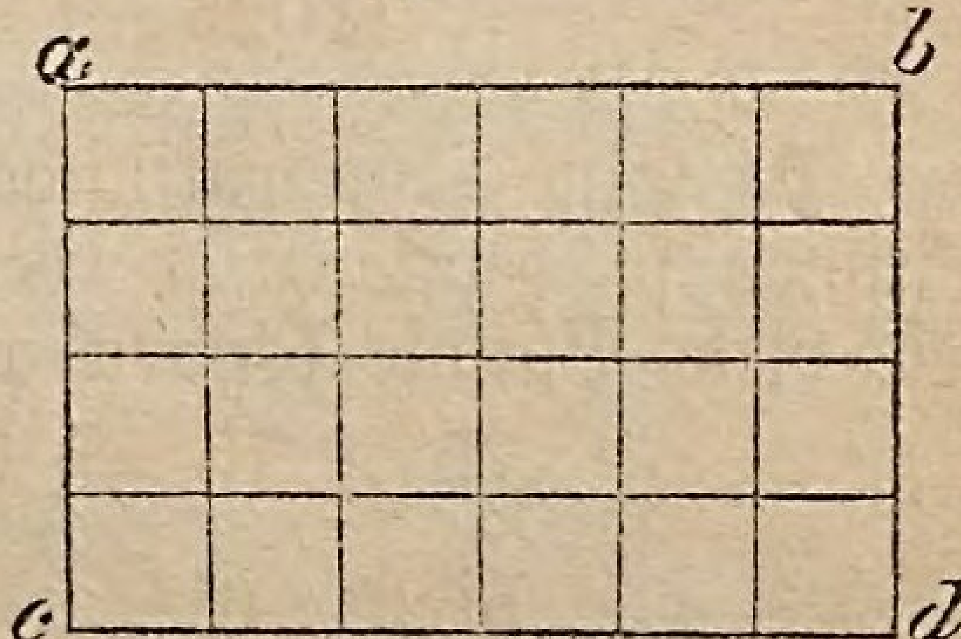
400 Doll. : 331,24 = 40000 : 33124 = 1,207 = 1 Doll. 21 Cents für 1 Ar.

$$\begin{array}{r} 33124 \quad\; \\ \hline 68760 \;\; \\ 66248 \;\; \\ \hline 251200 \\ 231868 \\ \hline 19332 \, .\,. \end{array}$$

2) Das Rechteck.

§ 260.

Ist das Rechteck abcd oder cb 6 Centi lang und 4 Centi breit, so kann man, wie beim Quadrat, 6 Maße à 1 Quadrat-Centi der Länge cd nach neben einander und über diese Lage noch 3 Lagen, im Ganzen 4 solcher Lagen, der Breite bd nach, legen; dies giebt 4 × 6 = 24 Quadrate à 1 □Centi = 24 Quadrat-Centi. **Um also den Inhalt eines Rechtecks zu finden, multiplicirt man die Länge (Grundlinie) mit der Breite (Höhe) und fügt der Zahl das Quadratmaß zu.**



Bezeichnet J den Inhalt, g die lange Seite oder die Grundlinie, h die kurze Seite (Breite oder Höhe), so ist $J = g \,.\, h$; $g = \frac{J}{h}$; $h = \frac{J}{g}$.

1) Wenn in einem Rechteck die Grundlinie 14 Meter, die Höhe 9 Meter beträgt, wie groß ist der Flächeninhalt?

$J = g \,.\, h = 14 \times 9 = 126$ □Meter.

2) Der Inhalt eines Rechtecks beträgt 300 □Meter und die Höhe 12 Meter, wie groß ist die Grundlinie?

$g = \frac{J}{h} = \frac{300}{12} = 25$ Meter.

3) Der Inhalt eines Rechtecks ist 352 □Meter, die Grundlinie 22 Meter, wie groß ist die Höhe?

$h = \frac{J}{g} = \frac{352}{22} = 16$ Meter.

4) Eine Stube ist $5^1/_2$ Meter lang, 5 Meter breit und 3 Meter hoch; in derselben befinden sich 2 Fenster à 2 Meter hoch und 1 Meter breit, und 2 Thüren à $2^1/_4$ Meter hoch und 1 Meter breit; die Stube soll mit Tapeten, die $^1/_2$ Meter breit sind, tapeziert werden. Wieviel Meter Tapeten sind erforderlich, wenn das Stück, welches hinter dem Ofen fehlen kann, zu den Fensterbrüstungen ausreicht?

1 Wand $5^1/_2$ Meter lang und 3 Meter hoch = $16^1/_2$ □Meter; 2 Wände 33 □Met.
1 Wand 5 Meter breit und 3 Meter hoch = 15 □Meter; 2 Wände 30 „
63 □Met.

1 Fenster 2 Meter hoch, 1 Meter breit = 2 □Met.; 2 Fenster 4 □Met.
1 Thür $2^1/_4$ Met. hoch, 1 Meter breit = $2^1/_4$ „ 2 Thüren $4^1/_2$ „ $8^1/_2$ „
bleiben $54^1/_2$ □M.

$54\frac{1}{2}$ □Meter = $\frac{109}{2}$ □Meter : $\frac{1}{2}$ Meter = 109 Meter Tapeten sind erforderlich.

5) Ein Saal, der 26 Meter lang und 20 Meter breit ist, soll mit Brettern gedielt werden, die 41 Centi breit sind; wenn nun für die in die Nuthen greifenden Federn 1 Centi von der Breite jedes Brettes abgeht, wieviel Quadrat-Meter Bretter sind erforderlich, und was kostet die Dielung ohne Arbeitslohn, wenn für je 100 □Meter Bretter 45 Thlr. gezahlt werden?

26 × 20 = 520 □Meter Bodenfläche des Saales;
41 Centi — 1 Centi = 40 Centi Breite der Bretter;

520 □Meter : 0,40 Meter = $\frac{520}{0,40} = \frac{52000}{40}$ = 1300 Meter Bretterlänge.

1300 Meter × 0,41 Meter = 533 Quadrat-Meter Bretter sind erforderlich.

100 □Meter kosten 45 Thlr., also 533 □Meter = $\frac{533 \, . \, 45}{100} = \frac{533 \, . \, 9}{20}$

$= \frac{4797}{20}$ = 239 Thlr. 25 Sgr. 6 Pf. kosten die Bretter der Dielung.

6) Ein Landmann hat 2 Wiesen; die eine ist 36 Meter breit und $42\frac{1}{4}$ Meter lang, die andere ist 4 mal größer und hat die Gestalt eines Quadrats; wie groß ist die Seite dieses Quadrats?

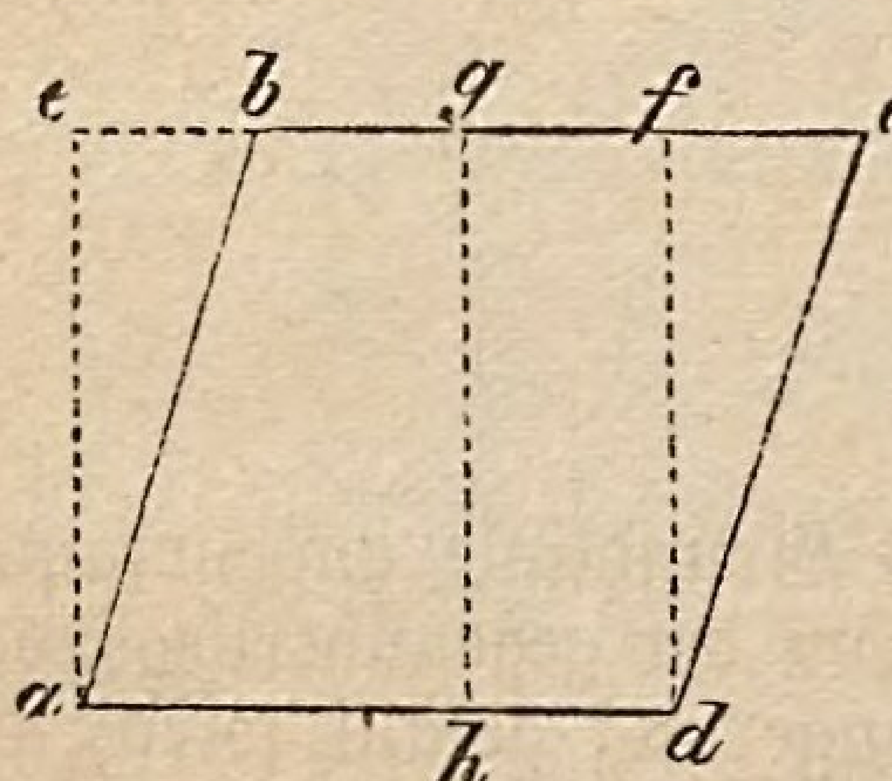
$42\frac{1}{4}$ × 36 = 1521 □Meter; 1521 × 4 = 6084 □Meter.

$\sqrt{6084}$ = 78 Meter ist die Seite des Quadrats.

3) Der Rhombus oder die Raute.

§ 261.

Obgleich die 4 Seiten des Rhombus, wie beim Quadrat, gleich sind, so kann er doch nicht wie dieses ausgemessen und berechnet werden. Errichtet man



an den beiden Enden der Grundlinie ad die Senkrechten fd und ae und verlängert bc nach e, so entstehen 2 Dreiecke, die einander gleich sind, △ eab = fdc. Denkt man sich △ fdc fort und △ eab hinzu, so wird aus dem Rhombus abcd das Rechteck aefd. Man berechnet daher den Inhalt des Rhombus, indem man die Grundlinie ad mit der Höhe fd oder gh, wie beim Rechteck, multiplicirt. Die Höhe ist jede beliebige Senkrechte von der Grundlinie ad zur gegenüber liegenden Seite bc. Es ist also, wenn g die Grundlinie und h die Höhe ist, der Inhalt $J = g \, . \, h$, die Grundlinie $g = \frac{J}{h}$, die Höhe $h = \frac{J}{g}$.

1) Wie groß ist der Inhalt eines Rhombus, wenn die Seite 8 Meter 43 Centi und die senkrechte Höhe 6 Meter 82 Centi ist?

$J = g \, . \, h$ = 8,43 × 6,82 = 57,4926 = 57 □Meter 4926 □Centi.

2) Der Inhalt eines Rhombus beträgt 117,50 □Meter und die senkrechte Höhe 9,4 Meter; wie groß ist die Seite oder Grundlinie?

$g = \frac{J}{h}$ = 117,50 □Meter : 9,4 Meter = 1175 : 94 = 12,5 Meter Höhe.

3) Der Inhalt eines Rhombus ist 132 □Meter 9736 □Centi und die Seite 14 Meter 36 Centi; wie groß ist die Höhe?

$$h = \frac{J}{g} = 132{,}9736 : 14{,}36 = 9{,}26 \text{ Meter Höhe.}$$

4) Eine Baustelle hat die Gestalt eines Rhombus, die Vorderfront (Seite) ist 18,75 Meter, die Tiefe (senkrechte Höhe) 15 Meter; wie groß ist der Flächeninhalt?

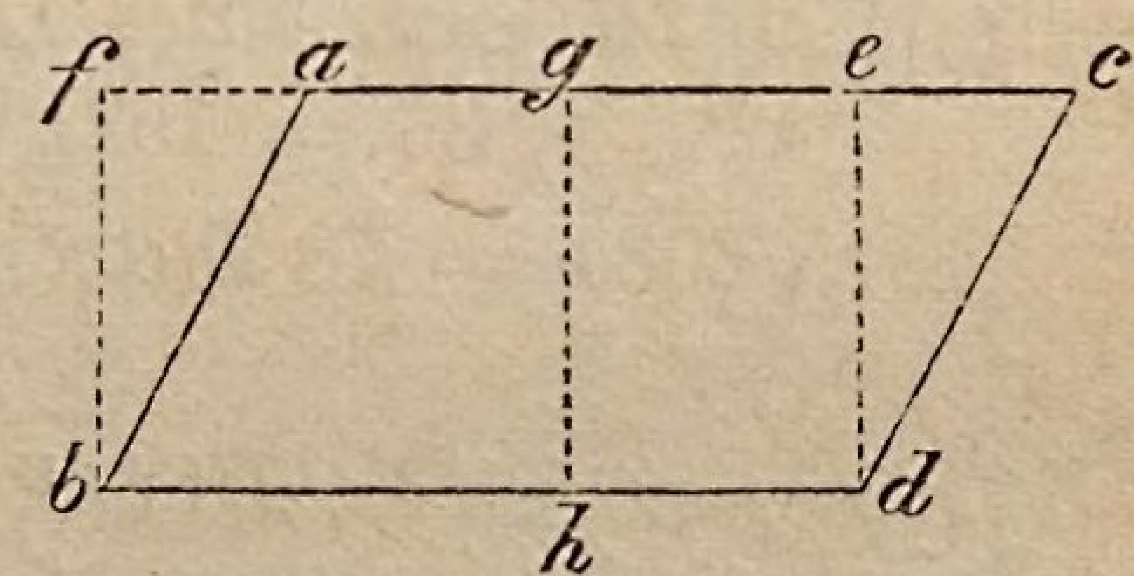
$18{,}75 \times 15 = 281{,}25$ Quadrat-Meter; oder:

$$18^3/_4 \times 15 = \frac{75}{4} \times 15 = \frac{1125}{4} = 281^1/_4 \text{ □Meter} = 281{,}25 \text{ Quadrat-Meter.}$$

4) Das Rhomboid.

§ 262.

Mit dem Rhomboid verhält es sich ebenso wie mit dem Rhombus. Das △ ecd ist gleich dem △ fab; beide compensiren sich (ersetzen sich) und es entsteht das Rechteck fbde, dessen Grundlinie bd und dessen Höhe ed, oder eine andere Senkrechte, etwa gh, ist. Was beim Rechteck und Rhombus über die Ausmessung und Berechnung gesagt ist, gilt auch hier; daher ist: wenn g für die Grundlinie bd, und h für die Senkrechte ed oder gh gesetzt wird,



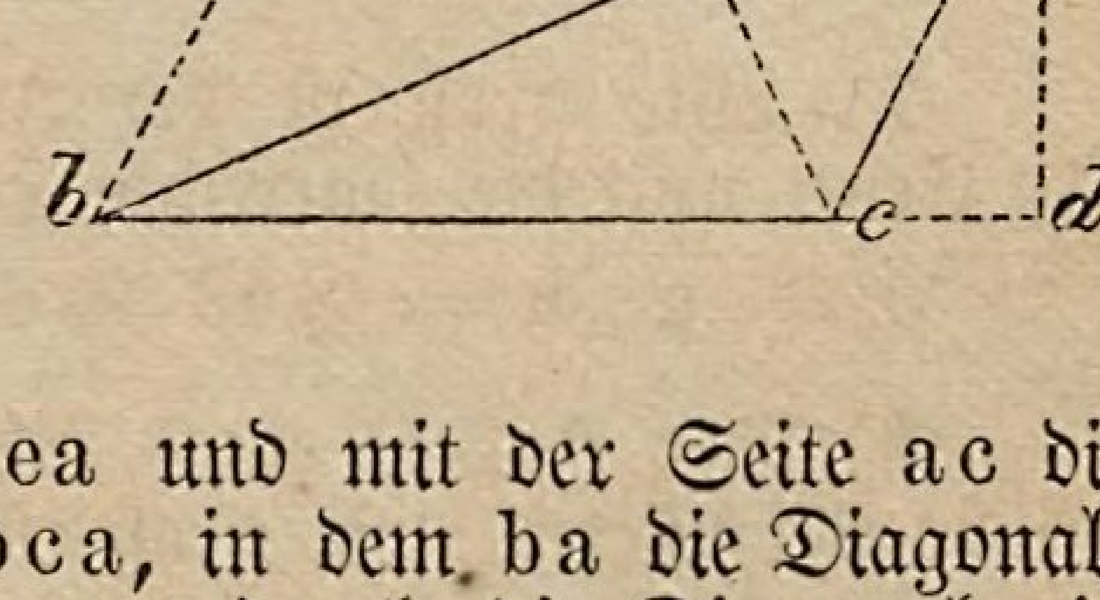
$$J = g \,.\, h, \quad g = \frac{J}{h}, \quad h = \frac{J}{g}.$$

Aufgaben, das Rhomboid betreffend, werden ebenso wie beim Rhombus gerechnet.

5) Das Dreieck.

§ 263.

Bei jedem Dreieck kann eine beliebige Seite als Grundlinie angenommen werden, und dann nennt man die Senkrechte, welche von der gegenüberliegenden Spitze auf diese Seite (Grundlinie) oder deren Verlängerung gefällt wird, die Höhe des Dreiecks. In dem Dreieck abc ist demnach bc die Grundlinie und die Senkrechte ad die Höhe. Es hätte aber auch ab als Grundlinie angenommen werden können und dann wäre die Senkrechte cf die Höhe. Bei einem gleichschenkligen Dreieck wird gewöhnlich die Seite, an der die beiden gleichen Winkel liegen, als Grundlinie angenommen.



Zieht man mit der Seite bc die Parallele ea und mit der Seite ac die Parallele eb, so entsteht das Parallelogramm ebca, in dem ba die Diagonale ist. Nach § 254 wird aber jedes Parallelogramm durch die Diagonale in 2 gleiche Dreiecke getheilt; es ist also △ abc = $^1/_2$ Parallelogramm ebca. Der Flächeninhalt eines jeden Parallelogramms ist, nach § 260 bis 262, gleich

der Grundlinie mal der Höhe; es ist also der Flächeninhalt jedes Dreiecks ebenfalls gleich der Grundlinie mal der Höhe und davon die Hälfte; folglich ist der Inhalt $= \frac{bc \times ad}{2}$ oder, wenn g die Grundlinie und h die Höhe ist,

$$J = \frac{g \,.\, h}{2} = \frac{g}{2} \,.\, h = g \,.\, \frac{h}{2} \text{ und } g = \frac{2\,J}{h},\ h = \frac{2\,J}{g}.$$

1) Die Grundlinie eines Dreiecks beträgt 24 Meter, die Höhe 10 Meter; wie groß ist der Flächeninhalt?

$$J = g \,.\, \frac{h}{2} = 24 \,.\, \frac{10}{2} = 24 \,.\, 5 = 120 \text{ Quadrat-Meter.}$$

2) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist 72 □Meter und die Höhe 8 Meter, wie groß ist die Grundlinie?

$$g = \frac{2\,J}{h} = \frac{72 \,.\, 2}{8} = 18 \text{ Meter.}$$

3) Der Flächeninhalt eines Dreiecks beträgt 182 Quadrat-Meter und die Grundlinie ist 26 Meter; wie groß ist die Höhe?

$$h = \frac{2\,J}{g} = \frac{182 \,.\, 2}{26} = \frac{182}{13} = 14 \text{ Meter.}$$

4) Der Giebel eines Hauses soll, behufs Anbringung einer Firma, ganz mit Oelfarbe gestrichen werden; was kostet dies, wenn für den Quadrat-Meter $12^1/_2$ Sgr. bezahlt wird und der Giebel ein gleichschenkliges Dreieck bildet, dessen Grundlinie 13,5 Meter lang ist und dessen Höhe 5,5 Meter beträgt?

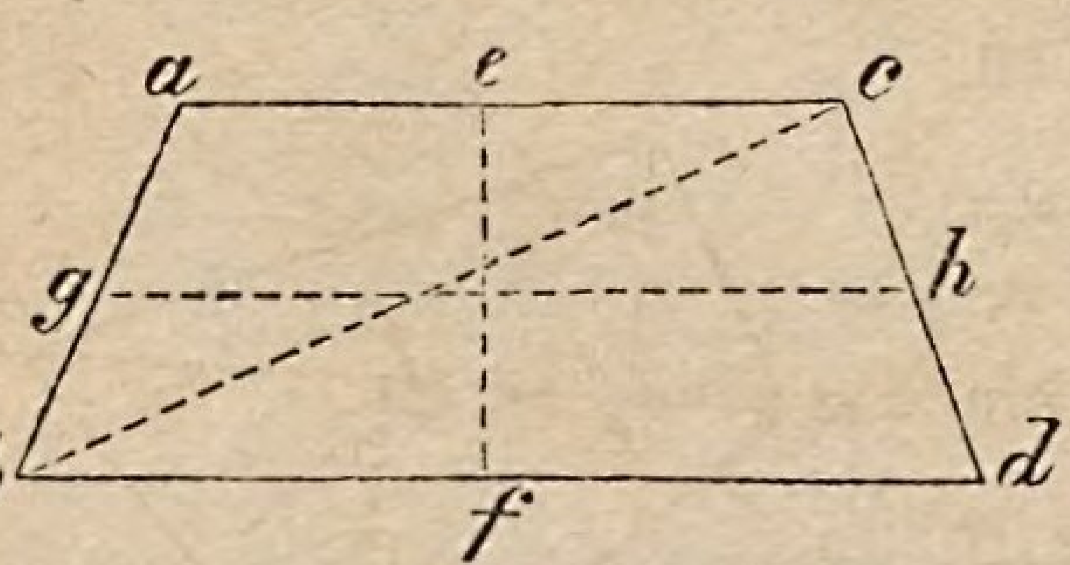
$$J = g \,.\, \frac{h}{2} = 13{,}5 \times \frac{5{,}5}{2} = 13{,}5 \times 2{,}75 = 37{,}125 \text{ Quadrat-Meter Flächeninhalt.}$$

37,125 Quadrat-Meter × 12,5 Sgr. = 464,0625 Sgr. = 15 Thlr. 14 Sgr. 1 Pf.

6) Das Trapez.

§ 264.

Das Trapez, auch Paralleltrapez genannt, a b c d wird durch die Diagonale b c in 2 Dreiecke getheilt, die beide gleiche Höhe e f haben.



Der Inhalt des $\triangle$ a b c ist $\frac{ac \,.\, ef}{2}$ und $\triangle$ c b d $= \frac{bd \,.\, ef}{2}$; beide zusammengenommen, giebt $\frac{ac \,.\, ef}{2} + \frac{bd \,.\, ef}{2} = \frac{ef}{2}$ (a c + b d) oder e f $\left(\frac{ac + bd}{2}\right)$.

Der Inhalt eines Trapez wird also gefunden, wenn man die beiden parallelen Seiten desselben addirt und diese Summe mit der halben Höhe mul-

tiplicirt, oder was dasselbe ist, wenn man die halbe Summe der beiden parallelen Seiten mit der Höhe multiplicirt. Ist k die kurze, l die lange parallele Seite und h die Höhe, so ist:

$$J = \frac{h}{2}(k + l) \text{ oder } J = \frac{k + l}{2} . h.$$

Da die Summe beider parallelen Seiten dividirt durch 2 der Durchschnitt ist, so liegt dieser genau in der Mitte der Höhe; es ist also $gh = \frac{ac + bd}{2}$.

1) Die lange Seite eines Trapez beträgt 24 Meter, die kurze Seite 18 Meter und die Höhe 12 Meter; wie groß ist der Inhalt?

$$J = \frac{l + k}{2} . h = \frac{24 + 18}{2} . 12 = 21 . 12 = 252 \text{ Quadrat-Meter.}$$

2) Die eine Seite eines mit Zink gedeckten Daches ist oben 16 Meter, unten 18 Meter lang und 7 Meter hoch; wieviel Quadrat-Meter enthält das Dach?

$J = \frac{l + k}{2} . h = \frac{18 + 16}{2} . 7 = 17 . 7 = 119$ Quadrat-Meter; beide Seiten des Daches enthalten demnach $119 \times 2 = 238$ Quadrat-Meter.

3) Ein Acker liegt zwischen zwei parallelen Wegen: an dem einen Wege ist derselbe $28\frac{1}{2}$ Meter, am andern Wege 34 Meter breit; die Seiten desselben bilden jedoch gerade Linien. Wenn nun die beiden Wege 120 Meter auseinander liegen, wie groß ist der Acker, und wie breit ist er in der Mitte der Länge?

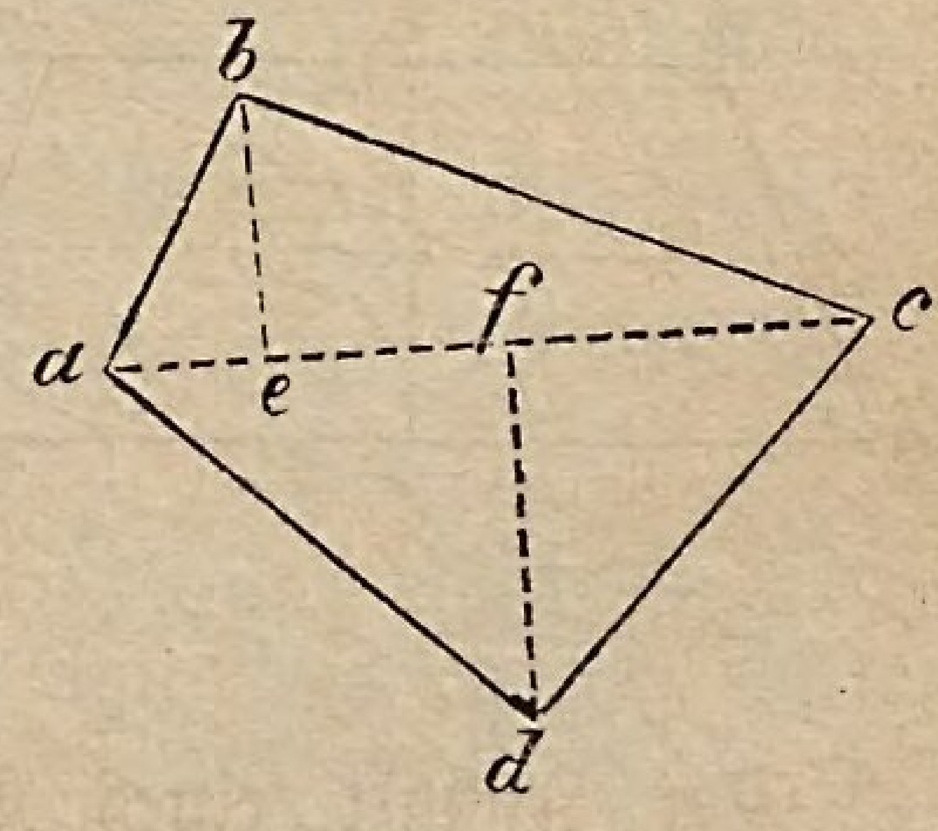
$$J = (l + k) \frac{h}{2} = (34 + 28\tfrac{1}{2}) \frac{120}{2} = 62\tfrac{1}{2} . 60 = 3750 \text{ Quadrat-Meter}$$
$$= 37 \text{ Ar } 50 \text{ Quadrat-Meter Flächeninhalt.}$$

In der Mitte ist der Acker breit $\frac{34 + 28\frac{1}{2}}{2} = \frac{62\frac{1}{2}}{2} = 31\frac{1}{4}$ Meter.

7) Das Trapezoid.

§ 265.

Die Diagonale ac theilt das Trapezoid oder unregelmäßige (irreguläre) Viereck in 2 Dreiecke abc und acd, welche beide in der Diagonale ac eine gleiche Grundlinie haben. Der Inhalt dieser beiden Dreiecke ist nach § 263: $\frac{ac}{2} . be + \frac{ac}{2} . fd = \frac{ac}{2}(be + fd)$ oder $ac\left(\frac{be + fd}{2}\right)$. Wird die eine Höhe h, die andere h^1 und die Diagonale g genannt, dann ist:



$$J = \frac{g}{2}(h + h^1) \text{ oder } = g\left(\frac{h + h^1}{2}\right).$$

1) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Trapezoid, dessen Diagonale 36 Meter, die eine Höhe 16 Meter, die andere 9 Meter beträgt?

$$J = \frac{g}{2}(h + h^1) = \frac{36}{2}(16 + 9) = 18 \,.\, 25 = 450 \text{ Quadrat-Meter}$$
$$= 4 \text{ Ar } 50 \text{ Quadrat-Meter} = 4^1/_2 \text{ Ar.}$$

2) Ein See hat die Form eines unregelmäßigen Vierecks; die Diagonale ist 72 Meter, die eine Höhe 26 Meter, die andere 23 Meter, wieviel Fläche nimmt der See ein?

(Die Maße können sehr leicht durch parallele Linien auf dem Lande gefunden werden.)

$$J = \frac{g}{2}(h + h^1) = \frac{72}{2}(26 + 23) = 36 \,.\, 49 = 1764 \text{ Quadrat-Meter}$$
$$= 17 \text{ Ar } 64 \text{ Quadrat-Meter.}$$

8) Das reguläre Polygon oder das regelmäßige Vieleck.

§ 266.

So viele Seiten ein reguläres Polygon (§ 255) hat, aus so vielen gleichen gleichschenkligen Dreiecken besteht es, die zur Grundlinie die Polygonseite und zur Höhe, hier Apothem genannt, die Senkrechte haben, welche vom Mittelpunkt auf die Polygonseite gefällt wird, d. i. der Radius des in dem Polygon beschriebenen Kreises (cg oder cf in der Figur § 255).

Ist das Apothem gegeben, dann ist die Berechnung des Flächeninhalts sehr einfach; denn es ist, wenn p die Polygonseite und a das Apothem ist, jedes Dreieck $= \frac{a \,.\, p}{2}$ und also bei n Dreiecken der Flächeninhalt $J = \frac{a \,.\, p}{2} \,.\, n$ $= \frac{n \,.\, a \,.\, p}{2}$, die Polygonseite $p = \frac{2\,J}{n \,.\, a}$ und das Apothem $\frac{2\,J}{n \,.\, p}$.

Ist jedoch das Apothem nicht gegeben, sondern statt dessen nur die Seite des Polygons oder der Radius des um das Polygon beschriebenen Kreises, so kann die wirkliche Berechnung nur auf mathematischem Wege geschehen. Um aber doch auch hier aus den gedachten Stücken den Inhalt des Polygons zu finden, ist Folgendes zu merken:

1) Ist die Polygonseite gegeben, so erhebt man diese in's Quadrat und multiplicirt die erhaltene Potenz

beim 5-Eck mit	1,72	beim 9-Eck mit	6,18
„ 6-Eck „	2,60	„ 10-Eck „	7,69
„ 7-Eck „	3,63	„ 12-Eck „	11,19
„ 8-Eck „	4,83		

und man erhält dann den Flächeninhalt des Polygons, wenn auch nicht mathematisch genau, doch nur mit einer geringen Abweichung. Ebenso findet man beim gleichseitigen Dreieck den Flächeninhalt, wenn man eine Seite in's Quadrat erhebt und dies mit 0,43 multiplicirt.

2) Ist der äußere Radius gegeben, so multiplicirt man diesen

beim 5=Eck mit 1,17	beim 9=Eck mit 0,68
„ 7=Eck „ 0,87	„ 10=Eck „ 0,62
„ 8=Eck „ 0,76	„ 12=Eck „ 0,52

und man erhält dann die Seite des Polygons, welche nun in's Quadrat erhoben und mit den ad 1 angegebenen Zahlen multiplicirt, den Inhalt des Polygons geben. Beim 6=Eck ist der Radius gleich der Seite.

1) Die Polygonseite eines 12=Ecks ist 2 Meter 50 Centi, das Apothem 4 Meter 66 Centi; wie groß ist der Inhalt?

$$J = \frac{n\,p\,a}{2} = \frac{12 \,.\, 2{,}5 \,.\, 4{,}66}{2} = 6 \,.\, 2{,}5 \,.\, 4{,}66 = 6 \,.\, 11{,}65$$

$$= 69{,}90 = 69 \;\square\text{Meter } 9000 \;\square\text{Centi} = 69{,}9 \;\square\text{Meter.}$$

2) Der Inhalt eines 10=Ecks beträgt 69 □Meter 3000 □Centi; das Apothem 4 Meter 62 Centi; wie groß ist die Polygonseite?

$$p = \frac{2\,J}{n \,.\, a} = \frac{2 \,.\, 69{,}30}{10 \,.\, 4{,}62} = \frac{6{,}93}{2{,}31} = 3 \text{ Meter.}$$

3) Der Inhalt eines 8=Ecks ist 67 □Meter 9500 □Centi und die Polygonseite 3 Meter 75 Centi; wie groß ist das Apothem?

$$a = \frac{2\,J}{n \,.\, p} = \frac{2 \,.\, 67{,}95}{8 \,.\, 3{,}75} = \frac{67{,}95}{4 \,.\, 3{,}75} = \frac{13{,}59}{4 \,.\, 0{,}75} = \frac{13{,}59}{3}$$

$$= 4{,}53 \text{ Meter} = 4 \text{ Meter } 53 \text{ Centi.}$$

4) Von einem 7=Eck beträgt der Radius des umschriebenen Kreises 5 Meter 74 Centi 7,2 Milli; wie groß ist der Inhalt?

Beim 7=Eck ist der Multiplicator 0,87, also 5,7472 Meter $\times$ 0,87 = 5,000064 Meter = 5 Meter Polygonseite; 5 Meter in's Quadrat = 25 □Meter; 25 mal Multiplicator 3,63 Meter = 90,75 □Meter = 90 □Meter 7500 □Centi = $90^3/_4$ □Meter Inhalt.

5) Die Seite eines 6=Ecks ist 6 Meter lang; wie groß ist der Inhalt des Polygons?

6 Meter in's Quadrat = 36 □Meter; der Multiplicator ist 2,60, also:
36 $\times$ 2,60 = 93,60 = 93 □Meter 6000 □Centi Inhalt.

6) Der Boden einer 8=eckigen Kapelle soll mosaikartig gepflastert werden; wenn nun die Seite des 8=Ecks $3^1/_2$ Meter, das Apothem $4^1/_2$ Meter beträgt und das Quadratmeter 1 Thlr. $7^1/_2$ Sgr. kosten soll, was kostet die Pflasterung?

$$J = \frac{n\,p\,a}{2} = \frac{8 \,.\, 3^1/_2 \times 4^1/_2}{2} = 4 \times {}^7/_2 \times {}^9/_2 = 4 \times {}^{63}/_4 = 63 \;\square\text{Meter.}$$

63 □Meter $\times$ $1^1/_4$ Thlr. = $78^3/_4$ Thlr. kostet die Pflasterung.

7) Die Seite eines 12=eckigen Gasometers ist 3 Meter lang, wieviel Flächeninhalt nimmt der Gasometer ein?

Beim 12=Eck ist der Multiplicator 11,19 und 3 $\times$ 3 = 9, also:
9 $\times$ 11,19 = 100,71 □Meter = 100 □Meter 7100 □Centi.

8) Aus einem Baumstamm, der 1 Meter im Durchmesser hat, soll eine 8=eckige Mühlwelle gehauen werden; wie groß ist die Seite dieses 8=Ecks?

Der Multiplicator ist 0,76 und der Radius 50 Centi.

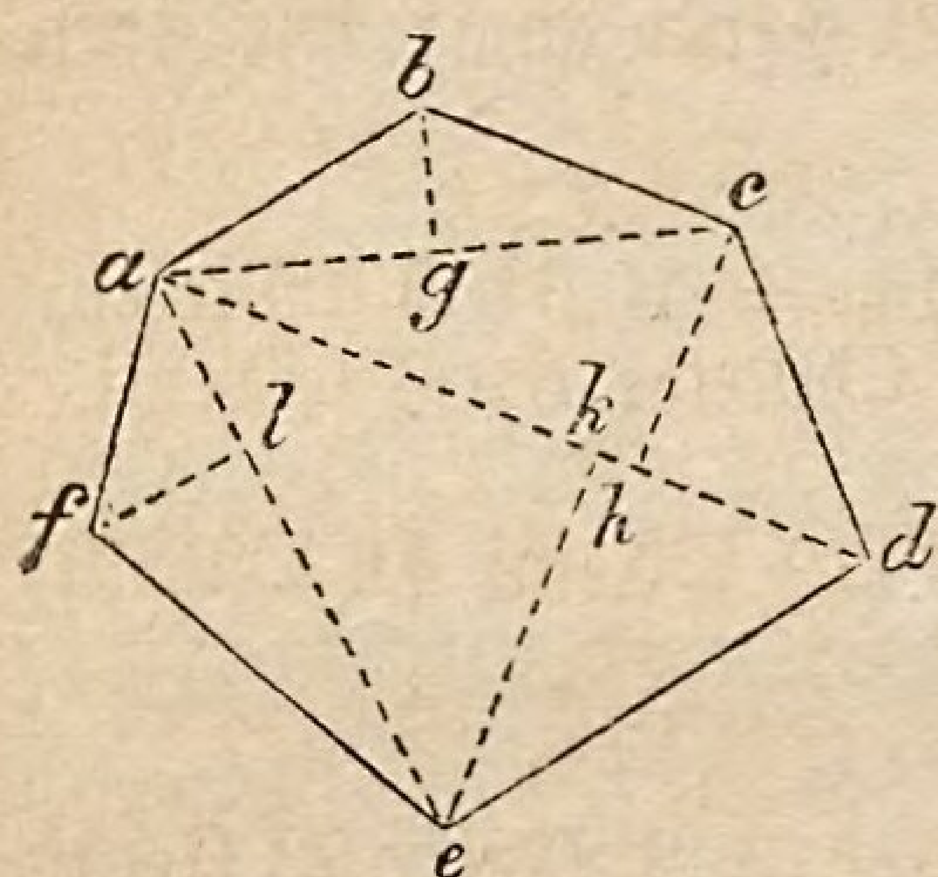
50 Centi × 0,76 = 38 Centi ist die Seite des 8=Ecks.

9) Das irreguläre Polygon.

§ 267.

Das irreguläre Polygon oder unregelmäßige Vieleck wird wie das Trapezoid behandelt, d. h. man zieht Diagonalen und berechnet die Dreiecke, deren Inhalt zusammen den Inhalt des Polygons geben. Oft kommen bei solchen Polygonen auch reguläre Figuren vor, wie z. B. bei dem irregulären 5=Eck einer Hausgiebelfront, welches in ein Rechteck und ein gleichschenkliges Dreieck zerlegt werden kann. Allgemeine Formeln lassen sich daher bei solchen Polygonen nicht geben, sondern man muß bei jedem zusehen, in welche Figuren es am besten zerlegt werden kann. Am meisten kommt die Zerlegung in Dreiecke vor. Z. B.: Eine Wiese hat die Gestalt eines unregelmäßigen 6=Ecks; wie groß ist ihr Flächeninhalt?

In derselben ist gegeben:



die Diagonale	a c	= 20	Meter	40	Centi
	a d	= 24	„	60	„
	a e	= 23	„	80	„
die Höhe	b g	= 4	„	80	„
	c h	= 9	„	20	„
	e k	= 12	„	80	„
	f l	= 4	„	60	„

$$\triangle\, abc = \frac{ac \,.\, bg}{2} = \frac{20{,}4 \,.\, 4{,}8}{2} = 10{,}2 \,.\, 4{,}8 = 48{,}96 \;\square\text{Meter}$$

$$\triangle\, acd = \frac{ad \,.\, ch}{2} = \frac{24{,}6 \,.\, 9{,}2}{2} = 12{,}3 \,.\, 9{,}2 = 113{,}16 \;\text{„}$$

$$\triangle\, ade = \frac{ad \,.\, ek}{2} = \frac{24{,}6 \,.\, 12{,}8}{2} = 12{,}3 \,.\, 12{,}8 = 157{,}44 \;\text{„}$$

$$\triangle\, aef = \frac{ae \,.\, fl}{2} = \frac{23{,}8 \,.\, 4{,}6}{2} = 23{,}8 \,.\, 2{,}3 = 54{,}74 \;\text{„}$$

374,30 □Meter

= 374 □Meter 3000 □Centi.

10) Die Kreisebene oder der Kreis.

§ 268.

Denkt man sich die Kreislinie (§ 247) aus vielen sehr kleinen geraden Linien zusammengesetzt, deren jede die Grundlinie, und der Radius des Kreises die Höhe eines Dreiecks ist, so geben sämmtliche Dreiecke den Inhalt eines äußerst vielseitigen regulären Polygons, dessen Umfang gleich der Kreislinie ist.

Der Inhalt eines Polygons ist, nach § 266, $\frac{n p a}{2}$. Setzt man statt des Umfanges n p die Kreislinie $2 r \pi$ oder $d \pi$ (§ 248) und statt der Höhe (Apothem) a den Radius r, so erhält man für den Kreis: $J = \frac{n p a}{2} = \frac{2 r \pi . r}{2} = \frac{2 r^2 \pi}{2} = r^2 \pi$ oder, da r = ½ Durchmesser d ist, $J = \frac{d \pi . d}{2 \quad 2} = \frac{d^2 \pi}{4.}$

Ist der Inhalt gegeben:

$$J = r^2 \pi \quad \text{oder} \quad J = \frac{d^2 \pi}{4}, \text{ so ist}$$

$$r^2 = \frac{J}{\pi} \quad \text{und} \quad d^2 = \frac{4 J}{\pi}; \text{ folglich}$$

der Radius $r = \sqrt{\frac{J}{\pi}}$, der Durchmesser $d = \sqrt{\frac{4 J}{\pi}} = 2 \sqrt{\frac{J}{\pi}}$.

1) Der Radius eines Kreises ist 2 Meter 30 Centi lang; wie groß ist der Inhalt des Kreises? (π nur zu 3,14 gerechnet.)

$J = r^2 \pi = 2{,}3^2 . 3{,}14 = 5{,}29 . 3{,}14 = 16{,}6106$ □Mtr. = 16 □Mtr. 6106 □Cti.

2) Der Durchmesser eines Kreises ist 4 Meter 60 Centi lang; wie groß ist der Inhalt des Kreises?

$J = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{4{,}6^2 . 3{,}14}{4} = \frac{21{,}16 . 3{,}14}{4} = 5{,}29 . 3{,}14 = 16{,}6106$ □Meter = 16 □Meter 6106 □Centi.

3) Der Inhalt eines Kreises beträgt 25 □Meter 1479 □Centi 46 □Milli; wie groß ist der Radius?

$r = \sqrt{\frac{J}{\pi}} = \sqrt{\frac{25{,}147946}{3{,}14}} = \sqrt{8{,}0089} = 2{,}83$ Meter = 2 Meter 83 Centi.

4) Der Inhalt eines Kreises beträgt 16 □Meter 6106 □Centi; wie groß ist der Durchmesser?

$d = \sqrt{\frac{4 J}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 . 16{,}6106}{3{,}14}} = \sqrt{21{,}16} = 4{,}6$ Meter = 4 Meter 60 Centi.

§ 269.

Der Umfang oder die Peripherie eines Kreises ist nach § 248 = $2 r \pi$ oder $d \pi$. Setzt man p für die Peripherie, so ist $p = 2 r \pi$ oder $d \pi$.

Ist die Peripherie gegeben:

$$2 r \pi = p \quad \text{oder} \quad d \pi = p, \text{ so ist}$$

der Radius $r = \frac{p}{2 \pi}$, der Durchmesser $d = \frac{p}{\pi}$.

1) Die Peripherie eines Kreises beträgt 40 Meter 19 Centi 2 Milli; wie groß ist der Radius?

$r = \frac{p}{2 \pi} = \frac{40{,}192}{6{,}28} = 6{,}4$ Meter = 6 Meter 40 Centi.

2) Die Peripherie eines Kreises beträgt 26 Meter 37 Centi 6 Milli; wie groß ist der Durchmesser?

$$d = \frac{p}{\pi} = \frac{26{,}376}{3{,}14} = 8{,}4 \text{ Meter} = 8 \text{ Meter } 40 \text{ Centi.}$$

3) Das Vorderrad eines Wagens legt bei 100 Umdrehungen genau 329 Meter 70 Centi Weges zurück; wie groß ist der Durchmesser des Rades?

329,7 : 100 = 3,297 ist eine Umdrehung, also auch der Umfang des Rades.

$$d = \frac{p}{\pi} = \frac{3{,}297}{3{,}14} = 1{,}05 = 1 \text{ Meter } 5 \text{ Centi Durchmesser des Rades.}$$

4) Ein Stirnrad soll 36 Zähne erhalten, die mit ihren Mitten genau 9,42 Centi auseinander stehen; wie groß muß der Halbmesser des Rades sein?

$$9{,}42 \times 36 = 339{,}12 \text{ Centi Umfang des Rades.}$$

$$r = \frac{p}{2\pi} = \frac{339{,}12}{2 \,.\, 3{,}14} = \frac{169{,}56}{3{,}14} = 54 \text{ Centi.}$$

5) Ein Kammrad, welches 2 Meter im Durchmesser hat, soll 40 Zähne à 5 Centi Stärke erhalten; wie weit müssen diese im Lichten auseinandergestellt werden?

$p = d\pi = 2 \times 3{,}14 = 6{,}28$ Meter Umfang; 40 Zähne à 5 Centi = 200 Centi = 2 Meter.

6,28 Meter — 2 Meter = 4,28 Meter; 4,28 Meter : 40 Zähne = 0,107 Meter = 10 Centi 7 Milli Zwischenräume.

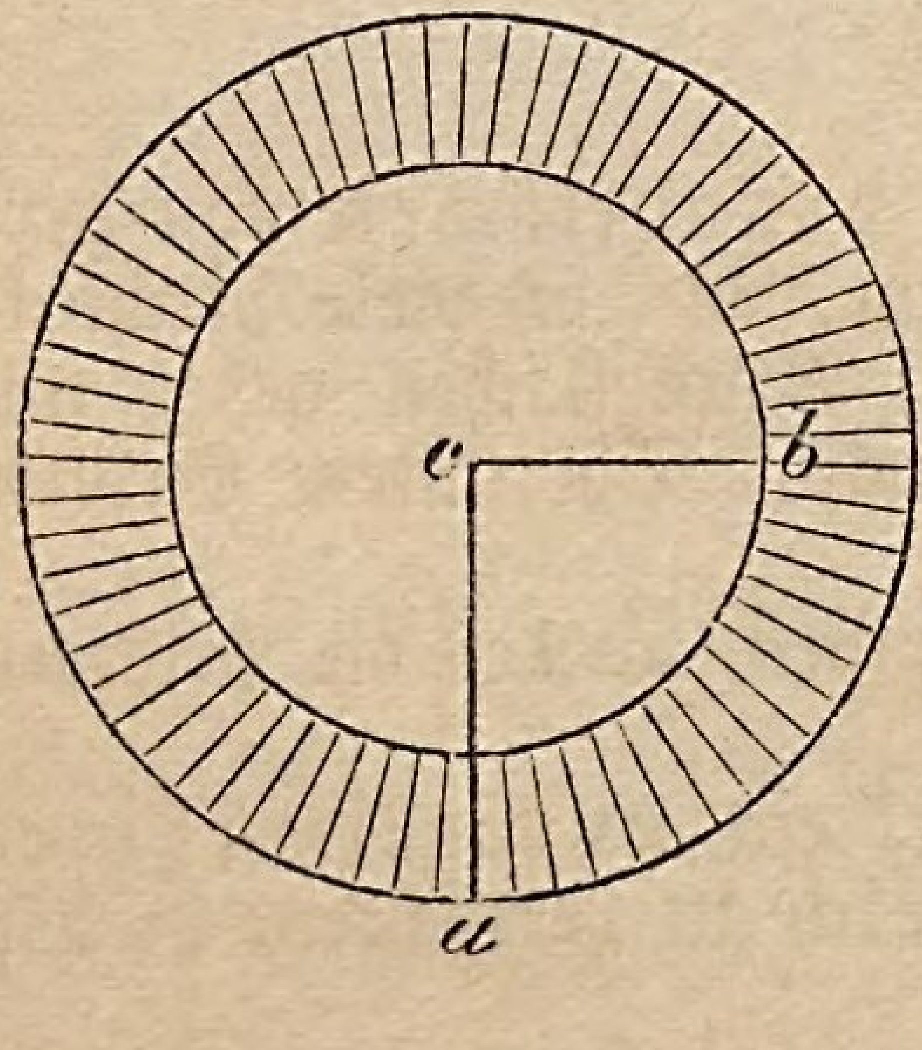
6) Ein Rad von 2 Meter Durchmesser, welches 48 Zähne enthält, soll einem kleineren Rade eine 4 mal schnellere Bewegung geben; wie groß muß der Radius dieses kleineren Rades sein?

Soll die Bewegung 4 mal schneller sein, so erhält das kleine Rad nur $\frac{48}{4} = 12$ Zähne, die eben so weit wie die des großen Rades auseinander stehen müssen; es muß also der Umfang $\frac{1}{4}$ so groß wie der des großen Rades sein. Folglich ist auch der Durchmesser $\frac{1}{4}$ so groß, d. i. 50 Centi; der Radius ist demnach 25 Centi.

§ 270.

Der Inhalt eines geometrischen Ringes (Kreisringes) § 256 wird gefunden, wenn man von dem Inhalt der ganzen Kreisfläche den Inhalt des innern, als Kreisfläche gedachten Raumes abzieht. Setzt man R für den Radius c a und r für den Radius c b, so ist:

$$J = R^2\pi - r^2\pi = \pi\,(R^2 - r^2) \text{ und daraus ist:}$$



$$J = \pi\,(R^2 - r^2)$$
$$\frac{J}{\pi} = R^2 - r^2$$
$$R^2 - r^2 = \frac{J}{\pi}$$
$$R^2 = \frac{J}{\pi} + r^2$$
$$R = \sqrt{\frac{J}{\pi} + r^2}$$

der große Radius.

$$J = \pi\,(R^2 - r^2)$$
$$\frac{J}{\pi} = R^2 - r^2$$
$$\frac{J}{\pi} + r^2 = R^2$$
$$r^2 = R^2 - \frac{J}{\pi}$$
$$r = \sqrt{R^2 - \frac{J}{\pi}}$$

der kleine Radius.

1) Der große Radius eines geometrischen Ringes beträgt 3 Meter 60 Centi, der kleine Radius 2 Meter 40 Centi; wie groß ist der Flächeninhalt?

$$J = \pi (R^2 - r^2) = 3{,}14 (3{,}6^2 - 2{,}4^2) = 3{,}14 (12{,}96 - 5{,}76)$$
$$= 3{,}14 \,.\, 7{,}20 = 22{,}608 = 22 \text{ □Meter } 6080 \text{ □Centi.}$$

2) Ein geometrischer Ring ist 50 Centi breit, der innere Radius 1 Meter; wie groß ist der Inhalt des Ringes?

1 Meter + $^1/_2$ Meter = $1^1/_2$ Meter ist der große Radius.

$$J = \pi (R^2 - r^2) = 3{,}14 (1^1/_2{}^2 - 1^2) = 3{,}14 (^9/_4 - ^4/_4) = 3{,}14 \times \frac{5}{4}$$
$$= \frac{15{,}70}{4} = 3{,}925 \text{ □Meter} = 3 \text{ □Meter } 9250 \text{ □Centi.}$$

3) Der Inhalt eines geometrischen Ringes beträgt 22,608 □Meter, der große Radius ist 3,6 Meter; wie groß ist der kleine Radius?

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{J}{\pi}} = \sqrt{3{,}6^2 - \frac{22{,}608}{3{,}14}} = \sqrt{12{,}96 - 7{,}20} = \sqrt{5{,}76}.$$
$$= 2{,}4 = 2 \text{ Meter } 40 \text{ Centi.}$$

4) Der Inhalt eines geometrischen Ringes ist 5 □Meter 4950 □Centi, der kleine Radius 1,5 Meter; wie groß ist der äußere Radius?

$$R = \sqrt{\frac{J}{\pi} + r^2} = \sqrt{\frac{5{,}4950}{3{,}14} + 1{,}5^2} = \sqrt{1{,}75 + 2{,}25} = \sqrt{4} = 2 \text{ Mtr.}$$

D. Die Körper.

a) Eigenschaften und Eintheilung der Körper.

§ 271.

Diejenigen Körper, welche die Grundformen aller Gegenstände darstellen, bei denen aber die physischen Eigenschaften fortgedacht und nur ihre Ausdehnungen im Raume in Betracht gezogen werden, heißen *mathematische Körper*, und wenn nur ebene Flächen und gerade Linien oder Kreislinien sie begrenzen, *geometrische Körper*.

Diese geometrischen Körper sind: das Prisma, der Cylinder, die Pyramide, der Kegel und die Kugel.

1) Das Prisma.

Ein Prisma ist ein Körper, der aus 2 gleichen *Grundflächen* von verschiedener Form und aus einer *Mantelfläche* besteht, die so viele Rechtecke bildet, als jede Grundfläche Seiten hat. Die beiden Grundflächen geben mit der Mantelfläche zusammen die Oberfläche des Prismas. Die untere Grundfläche wird auch die *Basis* genannt.

Nach der Anzahl Seiten, welche die Grundflächen haben, werden die Prismen in 3, 4, 5, 6 u. s. w.-seitige getheilt.

Wenn nicht besonders gesagt ist, daß das Prisma ein *unregelmäßiges* ist, so sind die Seiten der Grundflächen immer als *gleich* zu betrachten, so daß

bei einem vierseitigen Prisma die Grundflächen Quadrate, bei einem dreiseitigen Prisma gleichseitige Dreiecke sind. Sind die Grundflächen Parallelogramme, so heißt ein solches Prisma ein Parallelepipedon oder Parallelepipedum, und wenn die Grundflächen und jede Mantelfläche ein Quadrat ist, oder (was dasselbe ist) wenn die Höhe des Prismas gleich der Seite des Quadrats der Grundfläche ist, so wird dasselbe ein Würfel oder Kubus genannt.

2) Der Cylinder.

Denkt man sich die Grundfläche des Prismas als ein Polygon von sehr vielen und sehr kleinen Seiten, so wird aus dem Prisma der Cylinder, dessen Grundflächen Kreise sind, und dessen runde Mantelfläche aus vielen sehr schmalen Rechtecken zusammengesetzt gedacht werden kann. Wird dieselbe aufgerollt, so bildet sie ein Rechteck, dessen Grundlinie die Kreislinie, und dessen Höhe die Höhe des Cylinders ist. Die beiden Kreisflächen und die Mantelfläche geben zusammen die Oberfläche des Cylinders.

3) Die Pyramide.

Eine Pyramide ist ein Körper, dessen Grundfläche jede beliebige Fläche mit gleichen Seiten ist, und dessen Mantelfläche aus so vielen gleichschenkligen Dreiecken besteht, als die Grundfläche Seiten hat. Die Dreiecke sind alle gleich, und ihre Spitzen treffen in einen Punkt, welcher die Spitze der Pyramide heißt, zusammen. Die aus dieser Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte giebt die Höhe der Pyramide. Nach der Figur der Grundfläche giebt es dreiseitige, vierseitige und mehrseitige Pyramiden.

Bei jeder dieser Pyramiden kann man sich, durch einen mit der Grundfläche parallelen Schnitt, einen oberen Theil derselben entfernt denken, und man behält dann den unteren Theil als abgekürzte oder abgestumpfte Pyramide übrig.

4) Der Kegel.

Nimmt man die Grundfläche der Pyramide als ein Polygon an, welches sehr viele und sehr kleine Seiten hat, so wird aus der Pyramide der Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis ist, und dessen Mantelfläche aufgerollt ein gleichschenkliges Dreieck bildet, das zur Grundlinie die Kreislinie der Grundfläche und zur Höhe die schräge Seitenlänge des Kegels hat.

Denkt man sich, wie bei den Pyramiden, einen oberen Theil des Kegels, durch einen mit der Grundfläche parallelen Schnitt, entfernt, so erhält man den abgekürzten oder abgestumpften Kegel.

5) Die Kugel.

Ein Körper, der von einer krummen Oberfläche begrenzt wird, die in allen ihren Theilen von einem Punkt innerhalb gleich weit entfernt ist, wird eine Kugel genannt. Jede Linie, welche zwei Punkte der Oberfläche verbindet und durch den Mittelpunkt geht, heißt, wie bei dem Kreise, ein Durchmesser, und jede Linie vom Centrum zur Oberfläche der Kugel ist ein Radius. Außerdem sind noch folgende Benennungen bei der Kugel zu merken:

Kugeloberfläche ist die ganze, die Kugel umgebende Fläche.

Kugelcalotte oder Kugelkappe sind die beiden Theile der Kugeloberfläche, welche durch eine um die Kugel gezogene Kreislinie entstehen. Die Kugelcalotte kann also gleich, kleiner oder größer als die halbe Oberfläche sein.

Gürtel oder Zone ist ein Theil der Kugeloberfläche, welcher zwischen zwei um die Kugel gezogenen Kreislinien liegt.

Kugelausschnitt ist ein Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, und dessen Grundfläche eine Calotte ist.

Kugelabschnitt ist ein von der Kugel abgeschnittenes Stück, das als Begrenzungsflächen eine Calotte und eine Kreisfläche hat.

Kugelschicht oder körperliche Zone ist ein Theil der Kugel, welcher zwischen 2 Kreisflächen liegt und dessen Mantelfläche die vorerwähnte Zone ist.

Kugelkeil ist ein Theil der Kugel, welcher zwischen zwei, einen Winkel bildenden und im Durchmesser zusammenstoßenden Halbkreisen liegt, der also von diesen beiden Flächen und dem zwischen diesen liegenden Theil der Kugeloberfläche begrenzt wird.

b) Ausmessung und Berechnung der Körper.

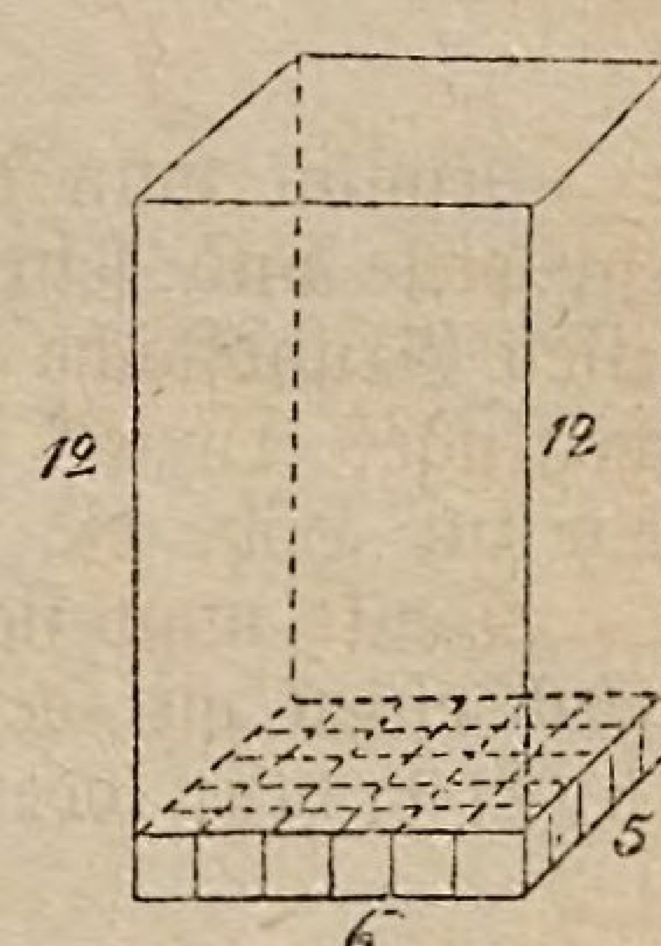
1) Das Prisma.

§ 272.

Wie bei den Linien eine Linie, bei den Flächen eine Fläche, so muß bei den Körpern ein Körper als Einheit zum Maß genommen werden.

Die Einheit zum Messen der Körper, mag sie ein Milli, ein Centi oder ein Meter sein, ist ebenso breit und hoch, wie sie lang ist, und heißt 1 Kubik-Milli, 1 Kubik-Centi, 1 Kubik-Meter.

Soll ein Prisma, das in der Grundfläche 6 Centi lang und 5 Centi breit ist, und dessen Höhe 12 Centi beträgt, ausgemessen werden, so wird 1 Kubik-Centi in der Länge der Grundfläche 6 mal neben einander gelegt werden können und da die Grundfläche 5 Centi breit ist, so kann das Kubik-Centi 5 mal der Breite nach gelegt werden; es enthält also die untere Schicht $5 \times 6 = 30$ Kubik-Centi. Da ferner das Prisma 12 Centi hoch ist, so kann diese Schicht noch 11 mal, im Ganzen 12 mal über einander gelegt werden, und dies giebt $30 \times 12 = 360$ Kubik-Centi als Inhalt des Prismas.



Man sieht hieraus, daß man im Allgemeinen bei einem Prisma den Quadratinhalt der Grundfläche mit der Höhenzahl zu multipliciren hat, um den Kubikinhalt desselben zu erhalten. Es ist also der Inhalt J eines jeden Prismas, wenn G die Grundfläche und h die Höhe ist. $J = G \cdot h$.

Ist die Grundfläche ein Quadrat, und wird die Seite a genannt, so ist $J = a^2 h$.

Ist die Höhe gleich der Seite des Quadrats der Grundfläche, also das Prisma ein Kubus oder Würfel, so ist $J = a^2 \cdot a = a^3$.

Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, also das Prisma ein Parallelepipedum, und die eine Seite der Grundfläche wird a, die andere b genannt, dann ist $J = a \cdot b \cdot h$.

Die Oberfläche jedes Prismas besteht aus dem Quadratinhalt der beiden Grundflächen plus den Quadratinhalt der Rechtecke, aus denen die Mantelfläche zusammengesetzt ist (§ 271, 1).

1) Wie groß ist der Kubikinhalt eines dreiseitigen Prismas, wenn die Seite der Grundfläche (Grundflächenkante) 2 Meter 20 Centi und die Höhe 4 Meter beträgt?

Beim gleichseitigen Dreieck ist nach § 266 der Multiplicator 0,43.

2 Meter 20 Centi = $2^1/_5$ Meter = $\frac{11}{5}$ Meter; $(\frac{11}{5})^2 = \frac{121}{25}$; $\frac{121}{25} \times 0{,}43$
= 2,0812 Meter Grundfläche.

2,0812 Meter $\times$ 4 = 8,3248 = 8 Kubik-Meter 324 Kubik-Deci 800 Kubik-Centi.

2) Die Grundfläche eines Prismas ist ein 8-Eck, dessen Seite 80 Centi lang ist, die Höhe ist 3 Meter 5 Centi; wie groß ist der Inhalt des Prismas?

Nach § 266 ist der Multiplicator beim 8-Eck 4,83; 80 Centi = 0,8 Meter; $0{,}8^2 \times 4{,}83 = 0{,}64 \times 4{,}83 = 3{,}0912$ □Meter Grundfläche.

$J = G \,.\, h = 3{,}0912 \times 3{,}05 = 9{,}428160$ Kubik-Meter = 9 Kubik-Meter 428 Kubik-Deci 160 Kubik-Centi.

3) Die Grundflächenkante eines vierseitigen Prismas ist 1 Meter 10 Centi lang, die Höhe 2 Meter 80 Centi; wie groß ist der Kubikinhalt des Prismas?

$J = a^2 h = 1{,}10^2 \times 2{,}80 = 1{,}21 \times 2{,}80 = 3{,}3880$ = 3 Kubik-Meter 388 Kubik-Deci.

4) Wie groß ist der Kubikinhalt eines Würfels, dessen Kante (Seite) 1 Meter 20 Centi lang ist?

$J = a^3 = 1{,}20^3 = 1{,}728$ Kubik-Meter = 1 Kubik-Meter 728 Kubik-Deci, oder:

$J = a^3 = (1^1/_5)^3 = (\frac{6}{5})^3 = \frac{216}{125} = 1{,}728$ Kubik-Meter = 1 Kubik-Meter 728 Kubik-Deci.

5) Wie groß ist der Kubikinhalt eines Parallelepipedums, dessen Grundfläche 80 Centi und 1 Meter 5 Centi Seitenlänge hat, und dessen Höhe 6 Meter beträgt?

$J = a \,.\, b \,.\, h = 0{,}80 \times 1{,}05 \times 6 = 5{,}0400$ Kubik-Meter = 5 Kubik-Meter 40 Kubik-Deci.

6) Eine Mauer soll 50 Meter lang, 36 Centi stark und 2 Meter hoch aus Ziegelsteinen gefertigt werden, die mit dem hinzugerechneten Verbindungskalk 25 Centi lang, 13 Centi breit und 7 Centi stark anzunehmen sind; wie viele Steine sind zu der Mauer erforderlich?

$J = G \,.\, h$

Mauer { G = 50 Meter $\times$ 0,36 Meter = 18 □Meter
G . h = 18 □Mtr. $\times$ 2 Mtr. = 36 Kubik-Mtr. Inhalt d. Mauer.

Stein { G = 0,25 Meter $\times$ 0,13 Meter = 0,0325 □Meter
G . h = 0,0325 $\times$ 0,07 Mtr. = 0,002275 Kubik-Meter Inhalt eines Steins.

Der Kubikinhalt der Mauer dividirt durch den Kubikinhalt eines Steins giebt die Anzahl Steine.

36 Kub.-Mtr. : 0,002275 Kub.-Mtr. = 36000000 : 2275 = $15824^1/_5$
= 15825 Steine.

7) Zu einer Decklage sind 12 Balken à $12^1/_2$ Meter Länge, 47 Centi Breite und 39 Centi Dicke erforderlich; was kosten diese 12 Balken, wenn das Kubikmeter mit 13 Thlr. veranschlagt ist?

$G = 0{,}47 \times 0{,}39 = 0{,}1833$ Quadrat-Meter; $h = 12{,}50$ Meter
$J = G \,.\, h = 0{,}1833$ Quadrat-Meter $\times\ 12{,}50 = 2{,}29125$ Kubikmeter Inhalt eines Balkens.

$2{,}29125 \times 12 = 27{,}495$ Kubik-Meter Inhalt der 12 Balken.

$27{,}495 \times 13 = 357{,}435$ Thlr. = 357 Thlr. 13 Sgr. kosten die Balken.

8) Ein Würfel von Granit hat 1 Meter 5 Centi Seitenlänge; wie schwer ist derselbe, wenn das Kubik-Deci Granit 2,7 Kilogramm wiegt?

$J = a^3 = 1{,}05^3 = 1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05 = 1157{,}625$ Kubik-Deci.

$1157{,}625 \times 2{,}7 = 3125{,}5875$ Kilogramm = 62 Ctr. 51 Pfd. $8^3/_4$ Neuloth.

9) Es soll ein sechseckiger Behälter von Eisenblech ohne Oberboden gefertigt werden; wieviel Blech ist dazu erforderlich, wenn die Seite des Sechsecks 80 Centi und die Höhe $2^1/_2$ Meter betragen soll?

Nach § 266 ist der Multiplicator beim 6-Eck 260;

$0{,}80^2 \times 2{,}60 = 0{,}64 \times 2{,}60 = 1{,}6640$ Quadrat-Meter Inhalt der Grundfläche.

6 Rechtecke à $2^1/_2$ Meter $\times\ 0{,}80$ Meter $= 2{,}50 \times 0{,}80 \times 6 = 12$ Quadrat-Meter Inhalt der Umfangsfläche.

12 Qu.-Meter + 1,6640 Qu.-Meter = 13,664 Qu.-Meter = 13 Quadrat-Meter 6640 Quadrat-Centi Blech ist erforderlich.

2) Der Cylinder.

§ 273.

Der kubische Inhalt des Cylinders ist, wie der des Prismas, gleich dem Produkt aus der Grundfläche mal der Höhe, d. i. $J = G \,.\, h$.

Ist der Radius der Grundfläche gegeben, so ist $G = r^2\,\pi$, also:

$J = r^2 \,.\, \pi \,.\, h$. Daraus ist:

der Radius

$$r^2 \,.\, \pi \,.\, h = J$$

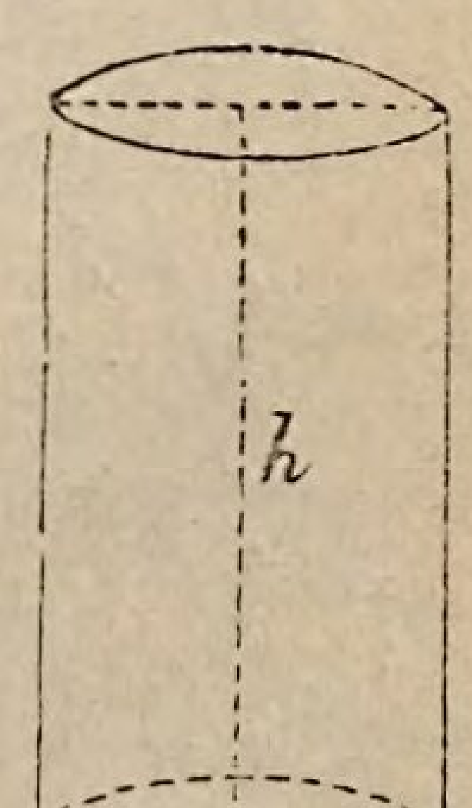
$$r^2 = \frac{J}{\pi\, h}$$

$$r = \sqrt{\frac{J}{\pi\, h}}$$

die Höhe

$$h \,.\, r^2\pi = J$$

$$h = \frac{J}{r^2\pi}.$$



Die Oberfläche besteht aus der des Mantels und der beiden Grundflächen, und da die des Mantels nach § 271 gleich der Peripherie der Grundfläche mal der Höhe des Cylinders ist, so ist

$$J = 2 r \pi h + 2 r^2 \pi = 2 r \pi (h + r).$$

1) Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Cylinders, dessen Durchmesser 78 Centi und dessen Höhe 5 Meter beträgt? (Radius = 39 Centi.)

$$J = r^2 . \pi . h = 0{,}39^2 \times 3{,}14 \times 5 = 0{,}39 \times 0{,}39 \times 3{,}14 \times 5$$
= 2,38797 Kubik-Meter = 2 Kubik-Meter 387,97 Kubik-Deci.

2) Der Kubikinhalt eines Cylinders beträgt $392^1/_2$ Kubik-Deci und die Höhe 2 Meter; wie lang ist der Radius? (2 Meter = 20 Deci.)

$$r = \sqrt{\frac{J}{\pi h}} = \sqrt{\frac{785}{2 . 3{,}14 . 20}} = \sqrt{\frac{157}{25{,}12}} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5 \text{ Deci}$$
= 25 Centi.

3) Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist $392^1/_2$ Kubik-Deci und der Radius 25 Centi; wie groß ist die Höhe? (25 Centi = 2,5 Deci.)

$$h = \frac{J}{r^2 \pi} = \frac{785}{2 . 2{,}5^2 . 3{,}14} = \frac{785}{2 . 2{,}5 . 2{,}5 . 3{,}14} = \frac{785}{39{,}25} = \frac{78500}{3925}$$
= 20 Deci = 2 Meter.

4) Der Durchmesser eines Cylinders beträgt 64 Centi, die Höhe 5 Meter; wie groß ist die Oberfläche? (Radius 32 Centi = 0,32 Meter.)

$$O = 2 r \pi (h + r) = 2 \times 0{,}32 \times 3{,}14 (5 + 0{,}32) = 0{,}64 \times 3{,}14 \times 5{,}32$$
= 10,691072 Qu.-Meter = 10 Qu.-Meter 6910 Qu.-Centi 72 Qu.-Milli.

5) Ein cylindrisches Gefäß ist im Lichten (im Innern gemessen) 1 Meter hoch und 62 Centi weit; wieviel Liter Wasser faßt dasselbe? (Radius 31 Centi, Höhe 100 Centi.)

$$J = r^2 \pi h = 31^2 \times 3{,}14 \times 100 = 31 \times 31 \times 314 = 961 \times 314$$
= 301754 Kubik-Centi Inhalt;

1 Liter = 1000 Kubik-Centi, also:

301754 : 1000 = 301,754 Liter = 3 Hekto $1^3/_4$ Liter.

6) Ein Kübel soll $2^1/_2$ Hekto Wasser fassen und 1 Meter hoch sein; wieviel muß er im Durchmesser haben?

$2^1/_2$ Hekto à 100 Liter = 250 Liter à 1000 Kub.-Centi = 250000 Kubik-Centi.

$$r = \sqrt{\frac{J}{\pi h}} = \sqrt{\frac{250000}{3{,}14 . 100}} = \sqrt{\frac{250000}{314}} = \sqrt{796{,}1783}$$
= 28,217 Centi Radius = 56 Centi 4,4 Milli Durchmesser.

Log. 250000	= 5,3979400
Log. 3,14	= 2,4969296
	2,9010104 : 2
Num. log.	1,4505052 =

28,217 Centi Radius = 56 Centi 4,4 Milli Durchmesser.

7) Eine blecherne Büchse soll genau 4 Liter Eingemachtes fassen und 15 Centi im Durchmesser haben; wie hoch muß sie sein? (4 Liter = 4000 Kubik-Centi, Radius = 7,5 Centi.)

$$h = \frac{J}{r^2 \pi} = \frac{4000}{7{,}5^2 \,.\, 3{,}14} = \frac{4000}{56{,}25 \,.\, 3{,}14} = \frac{16}{0{,}7065} = \frac{16000}{7065} = 22{,}647 \text{ Centi}$$
$$= 22 \text{ Centi } 6{,}5 \text{ Milli.}$$

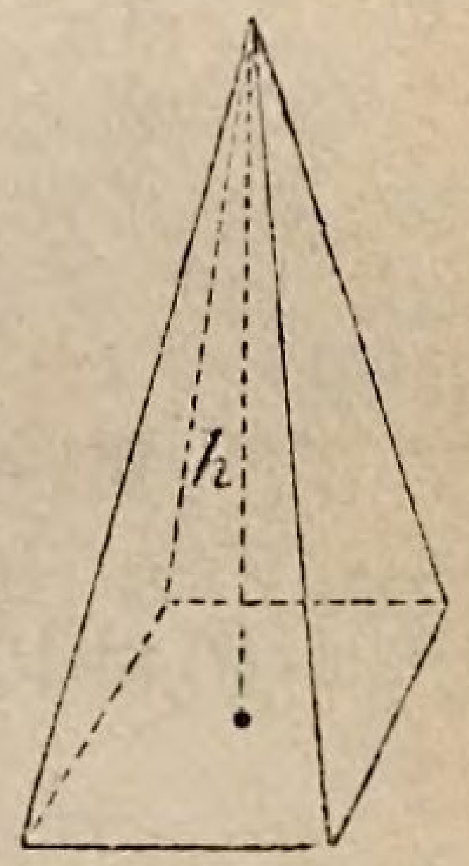
8) Es sollen 100 Blechbüchsen à 4 Liter gefertigt werden, die 15 Centi im Durchmesser haben und 22,65 Centi hoch sind; wieviel Blech ist dazu, mit Ober- und Unterboden, erforderlich?

$$O = 2 r \pi \,(h + r) = 2 \,.\, 7{,}5 \,.\, 3{,}14 \,(22{,}65 + 7{,}50)\; 100$$
$$= 15 \,.\, 3{,}14 \,.\, 3015 = 15 \,.\, 9467{,}10 = 142006{,}50 \text{ Centi}$$
$$= 14 \;\square \text{Meter } 2006{,}5 \;\square \text{ Centi.}$$

3) Die Pyramide.

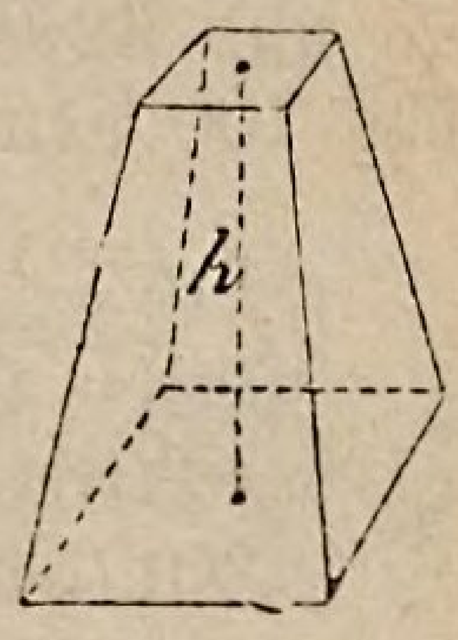
§ 274.

Jede Pyramide ist der 3te Theil eines Prismas, das mit derselben gleiche Grundfläche und Höhe hat. Ist also der körperliche Inhalt des Prismas $= G \,.\, h$, so ist der der Pyramide $= \frac{G \,.\, h}{3}$.



Man kann sich davon überzeugen, wenn man 3 Pyramiden und 1 Prisma mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen aus einer gleichen Masse fertigt; es wiegen dann die 3 Pyramiden zusammen so viel, als das Prisma allein.

Der Inhalt einer abgekürzten Pyramide wird gefunden, wenn man die untere Grundfläche (F), die obere Schnittfläche (f) und die Wurzel aus dem Produkt beider Flächen addirt und diese Summe mit $^1/_3$ der Höhe multiplicirt; also ist:



$$J = \frac{h}{3} (F + f + \sqrt{F \,.\, f}).$$

1) Die Grundfläche einer Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck von 3 Meter Seitenlänge, die Höhe derselben beträgt 9 Meter; wie groß ist ihr körperlicher Inhalt?

Nach § 266 ist der Multiplicator beim gleichseitigen Dreieck 0,43; also ist die Grundfläche $3^2 \,.\, 0{,}43 = 9 \,.\, 0{,}43 = 3{,}87 \;\square$Meter.

$$J = \frac{G \,.\, h}{3} = \frac{3{,}87 \,.\, 9}{3} = 3{,}87 \,.\, 3 = 11{,}61 \text{ Kubik-Meter} = 11 \text{ Kubik-Meter } 610 \text{ Kubik-Deci.}$$

2) Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Quadrat von 77 Centi 5 Milli Seitenlänge, die Höhe beträgt 2 Meter 40 Centi; wie groß ist der Kubikinhalt der Pyramide?

77 Centi 5 Milli = 0,775 Meter; $0,775^2 = 0,775 \times 0,775$
$= 0,600625$ Grundfläche.

$J = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{0,600625 \cdot 2,4}{3} = 0,600625 : 0,8 = 0,48050$ Kubik-Meter = $480\frac{1}{2}$ Kubik-Deci.

3) Die Grundkante einer fünfeckigen Pyramide ist $1\frac{1}{2}$ Meter, die Höhe 7 Meter; wie groß ist der kubische Inhalt der Pyramide?

Der Multiplicator beim 5-Eck ist 1,72. (§ 266.)

$(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$; $\frac{9}{4} \cdot 1,72 = 9 \cdot 0,43 = 3,87$ □Meter Grundfläche.

$J = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{3,87 \cdot 7}{3} = 1,29 \cdot 7 = 9,03$ Kubik-Meter = 9 Kubik-Meter 30 Kubik-Deci.

4) Die untere Fläche einer abgekürzten Pyramide beträgt 16 □Meter, die obere Fläche 9 □Meter, die Höhe 6 Meter; wie groß ist der körperliche Inhalt?

$J = \frac{h}{3}(F + f + \sqrt{F \cdot f}) = \frac{6}{3}(16 + 9 + \sqrt{16 \cdot 9}) = 2(25 + \sqrt{144}) = 2(25 + 12) = 2 \cdot 37 = 74$ Kubik-Meter.

5) Eine Braupfanne hat die Gestalt einer abgekürzten Pyramide; sie ist oben im Lichten 2 Meter breit und 4 Meter lang, unten am Boden $1\frac{1}{2}$ Meter breit und 3 Meter lang, ihre Höhe beträgt 1 Meter; wieviel Liter Bier faßt dieselbe?

$F = 2 \times 4 = 8$ □Meter; $f = 1\frac{1}{2} \times 3 = 4\frac{1}{2}$ □Meter.

$J = \frac{h}{3}(F + f + \sqrt{F \cdot f}) = \frac{1}{3}(8 + 4\frac{1}{2} + \sqrt{8 \cdot 4\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 12\frac{1}{2} + \sqrt{36} = \frac{1}{3} \cdot 18\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot 18,5 = 6,1666$ Kubik-Meter
$= 6166,6$ Kubik-Deci.

1 Liter = 1000 Kubik-Centi = 1 Kubik-Deci; also faßt das Gefäß $6166\frac{1}{2}$ Liter.

6) Eine Kartoffelgrube bildet oben ein Quadrat von 4 Meter, unten von $3\frac{1}{2}$ Meter Seitenlänge; die Tiefe ist $2\frac{1}{2}$ Meter. Die Kartoffeln sollen bis auf $\frac{1}{2}$ Meter vom oberen Rande eingeschüttet werden, wo die Grube noch eine Weite von 3,90 □Meter hat; wieviel Kartoffeln können eingeschüttet werden?

$$J = \frac{h}{3}(F + f + \sqrt{F \cdot f}) = \frac{2}{3}(3,9^2 + 3,5^2 + \sqrt{3,9^2 \cdot 3,5^2})$$
$$= \frac{2}{3}(15,21 + 12,25 + \sqrt{15,21 \cdot 12,25})$$
$$= \frac{2}{3}(27,46 + \sqrt{186,3225})$$
$$= \frac{2}{3}(27,46 + 13,65)$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 41,11 = 27,407 \text{ Kubik-Meter} = 27407 \text{ Kubik-Deci}$$
$$= 27407 \text{ Liter};$$

27407 Liter : 50 = 548 Neuscheffel 7 Liter Kartoffeln kann die Grube aufnehmen.

4) Der Kegel.

§ 275.

Wie die Pyramide der dritte Theil eines Prismas ist, so ist der Kegel der dritte Theil eines Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. Ist also die Grundfläche G und die Höhe h, so ist der körperliche Inhalt des Kegels $J = \frac{G \cdot h}{3}$.

Ist der Radius r der Grundfläche und die senkrechte Höhe (Linie von der Mitte der Grundfläche bis zur Spitze) gegeben, dann ist:

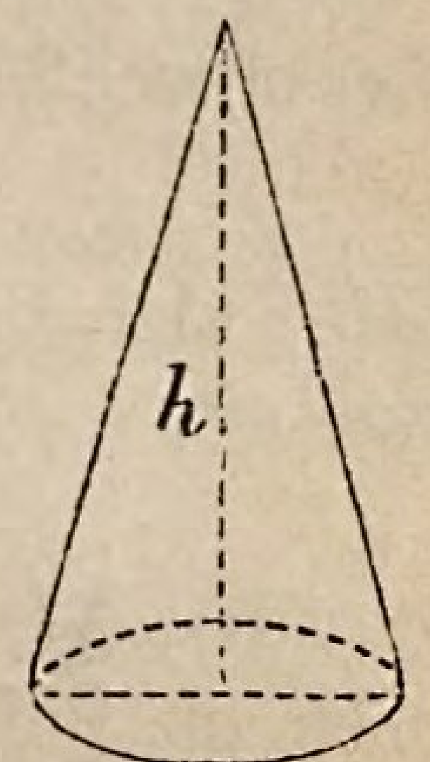
$$J = \frac{r^2 \pi h}{3} \qquad (r^2 \pi = G \text{ nach } \S\, 268). \text{ Daraus ist:}$$

der Radius

$$J = \frac{r^2 \pi h}{3} \text{ also}$$
$$r^2 \pi h = 3J$$
$$r^2 = \frac{3J}{\pi h}$$
$$r = \sqrt{\frac{3J}{\pi h}}$$

die Höhe

$$J = \frac{r^2 \pi h}{3} \text{ also}$$
$$\frac{r^2 \pi h}{3} = J$$
$$r^2 \pi h = 3J$$
$$h = \frac{3J}{r^2 \pi}$$



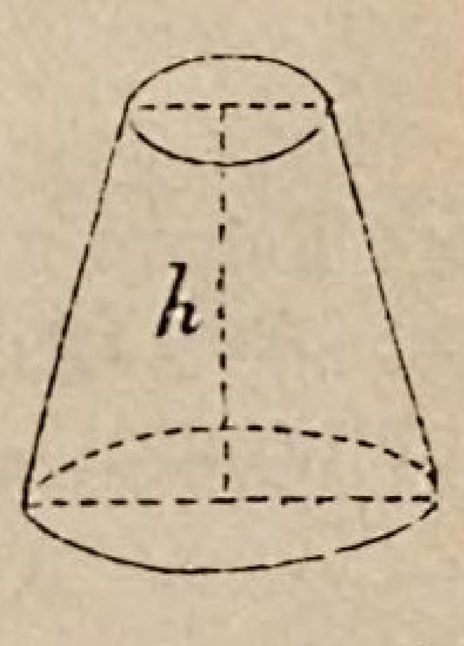
Die Oberfläche des Kegels besteht aus dem Quadratinhalt der Grundfläche und des Mantels. Der Mantel ist nach § 271 gleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie die Peripherie der Grundfläche, und dessen Höhe die Seitenhöhe, Mantelhöhe s ist, also:

$$O = r^2\pi + \frac{2r\pi \cdot s}{2} \qquad (2r\pi = \text{Peripherie der Grundfläche) } \S\, 248 \text{ und } 268.$$
$$= r^2\pi + r\pi \cdot s$$
$$= r\pi\,(r + s)$$

Mit dem abgekürzten Kegel hat es dieselbe Bewandtniß, wie mit der abgekürzten Pyramide; deshalb gilt bei ihm auch dieselbe Formel für den Inhalt, nämlich: $J = \frac{h}{3}(F + f + \sqrt{F \cdot f})$.

Nennt man den Radius der Grundfläche R und den der Schnittfläche r, so ist $F = R^2\pi$ und $f = r^2\pi$, also:

$$J = \frac{h}{3}(R^2\pi + r^2\pi + \sqrt{R^2\pi \cdot r^2\pi})$$
$$= \frac{h}{3}(R^2\pi + r^2\pi + \sqrt{R^2 r^2 \pi^2})$$
$$= \frac{h}{3}(R^2\pi + r^2\pi + R \cdot r \cdot \pi)$$
$$= \frac{h\pi}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r).$$



Die Oberfläche des abgekürzten Kegels besteht aus dem Flächeninhalt der Grundfläche, der Schnittfläche und des Mantels. Der Mantel ist gleich einem Trapez, dessen untere parallele Seite die Peripherie der Grundfläche und dessen obere Seite die Peripherie der Schnittfläche ist; die Höhe ist die Seitenhöhe, Mantelhöhe s, also:

$$O = R^2\pi + r^2\pi + s\left(\frac{2R\pi + 2r\pi}{2}\right)$$
$$= R^2\pi + r^2\pi + s\pi(R + r)$$
$$= \pi(R^2 + r^2 + s(R + r)).$$

1) Der Radius r eines Kegels beträgt 21 Centi und die senkrechte Höhe h ist $1^1/_2$ Meter; wie groß ist der körperliche Inhalt des Kegels?

$$J = \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{0{,}21^2 . 3{,}14 . 1{,}50}{3} = \frac{0{,}0441 . 3{,}14 . 1{,}50}{3}$$
$$= 0{,}0147 . 3{,}14 . 1{,}50 = 0{,}06923700 = 69 \text{ Kubik-Deci } 237 \text{ Kubik-Centi.}$$

2) Der Inhalt eines Kegels beträgt 114 Kubik-Deci 681 Kubik-Centi 170 Kubik-Milli und die senkrechte Höhe ist 1 Meter 7 Centi; wie groß ist der Radius?

$$r = \sqrt{\frac{3J}{\pi h}} = \sqrt{\frac{0{,}11468117 \times 3}{3{,}14 . 1{,}07}} = \sqrt{\frac{0{,}34404351}{3{,}3598}} = \sqrt{0{,}1024}$$
$$= 0{,}32 \text{ Meter} = 32 \text{ Centi.}$$

3) Der Inhalt eines Kegels beträgt 785 Kubik-Deci, und der Radius ist $^1/_2$ Meter; wie groß ist die senkrechte Höhe?

$$h = \frac{3J}{r^2\pi} = \frac{3 . 0{,}785}{0{,}5^2 . 3{,}14} = \frac{2{,}355}{0{,}25 . 3{,}14} = \frac{2{,}355}{0{,}785} = 3 \text{ Meter.}$$

4) Der Radius eines Kegels ist 80 Centi und die Seitenhöhe (s) 2 Meter; wie groß ist die Oberfläche des Kegels?

$$O = r\pi(r + s) = 0{,}8 . 3{,}14 (0{,}8 + 2) = 2{,}512 . 2{,}8$$
$$= 7{,}0336 \,\square\text{Meter} = 7 \,\square\text{Meter } 336 \,\square\text{Centi.}$$

5) Der Radius R der Grundfläche eines abgekürzten Kegels ist 31 Centi, der Radius r der Schnittfläche 21 Centi, die senkrechte Höhe h 36 Centi; wie groß ist der körperliche Inhalt?

$$J = \frac{h\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{0{,}36 . \pi}{3}(0{,}31^2 + 0{,}21^2 + 0{,}31 . 0{,}21)$$
$$= 0{,}12 . 3{,}14 (0{,}0961 + 0{,}0441 + 0{,}0651$$
$$= 0{,}3768 \times 0{,}2053 = 0{,}07735704 = 77{,}357 \text{ Kubik-Deci}$$
$$= 77 \text{ Kubik-Deci } 357 \text{ Kubik-Centi.}$$

6) Der Radius R der Grundfläche eines abgekürzten Kegels ist 50 Centi, der Radius r der Schnittfläche 30 Centi, die Seitenhöhe (Mantelhöhe) s 2 Meter; wie groß ist die Oberfläche?

$$O = \pi(R^2 + r^2 + s(R + r)) = 3{,}14 (0{,}5^2 + 0{,}3^2 + 2 (0{,}5 + 0{,}3))$$
$$= 3{,}14 (0{,}25 + 0{,}09 + 2 . 0{,}8) = 3{,}14 . 0{,}50 = 1{,}5700 = 1 \,\square\text{Meter}$$
$$5700 \,\square\text{Centi.}$$

7) Ein 9 Meter 60 Centi langer Baumstamm hat oben 80 Centi, unten 1,10 Meter im Durchmesser; wieviel Kubikfuß Holz enthält derselbe?

(Radius unten 0,55, oben 0,40 Meter.)

$$J = \frac{h\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{9,6 \,.\, 3,14}{3}(0,55^2 + 0,40^2 + 0,55 \,.\, 0,40)$$
$$= 3,2 \,.\, 3,14\,(0,3025 + 0,1600 + 0,2200) = 10,048 \,.\, 0,6825$$
$$= 6,8577600 =$$ 6 Kubik-Meter 857 Kubik-Deci 760 Kubik-Centi.

8) Ein abgekürzter Kegel von Granit ist 2,10 Meter hoch und hat oben 1,40 Meter, unten 1,90 Meter im Durchmesser; wieviel wiegt derselbe, wenn 1 Kubik-Deci Granit 2,70 Kilo schwer ist?

$$J = \frac{h\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{2,10 \,.\, 3,14}{3}(0,95^2 + 0,70^2 + 0,95 \,.\, 0,70$$
$$= 0,70 \,.\, 3,14\,(0,9025 + 0,4900 + 0,6850) = 2,198 \times 2,0775$$
$= 4,566445$ Kubik-Meter $= 4566,445$ Kubik-Deci
$= 4566,445 \times 2,70 = 12329,4015$ Kilo $= 246$ Centner 29,40 Kilo.

9) Ein Gefäß mit Deckel, von Kupferblech, hat die Gestalt eines umgekehrten abgekürzten Kegels und ist oben 2,50 Meter, unten 2,20 Meter weit und in den schrägen Seitenwänden 1,20 Meter hoch; wieviel Blech ist dazu verbraucht, wenn der überstehende Deckelrand nicht mitgerechnet wird?

$$O = \pi\,(R^2 + r^2 + s\,(R + r)) = 3,14\,(1,25^2 + 1,10^2 + 1,20\,(1,25 + 1,10))$$
$$= 3,14\,(1,5625 + 1,2100 + 2,8200) = 3,14 \times 5,5925$$
$= 17,560450$ □Meter $= 17$ □Meter 5604,5 □Centi.

5) Die Kugel.

§ 276.

Die Oberfläche einer Kugel ist viermal dem Flächeninhalt ihres größten Kreises gleich. Da nun $r^2\pi$ nach § 268 der Flächeninhalt eines jeden Kreises ist, so ist die Oberfläche $O = 4r^2\pi$.

Betrachtet man die Kugel als aus sehr vielen Kegeln zusammengesetzt, deren Spitzen in ihrem Mittelpunkt liegen, und deren Grundflächen zusammen die Kugeloberfläche bilden, so ist, da der Inhalt eines Kegels $\frac{h}{3} \,.\, G$ ist, der Inhalt der Kugel $\frac{r}{3} \,.\, 4r^2\pi = \frac{4r^3\pi}{3}$.

Der Inhalt einer Kugel ist auch gleich $\frac{2}{3}$ Inhalt des Cylinders, der mit ihr gleiche Höhe und Durchmesser hat. Der Inhalt eines Cylinders ist nämlich nach § 273 $r^2\pi h$. Ist nun seine Höhe h gleich dem Durchmesser der Kugel, gleich $2r$, so ist der kubische Inhalt dieses Cylinders $r^2\pi \,.\, 2r = 2r^3\pi$, und dies $\frac{2}{3}$ mal, giebt $2r^3\pi \,.\, \frac{2}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}$ als Inhalt der Kugel.

Ist der Inhalt der Kugel gegeben:

$$J = \frac{4r^3\pi}{3}, \text{ so ist:}$$
$$4r^3\pi = 3J$$
$$r^3 = \frac{3J}{4\pi}, \text{ also der Radius } r = \sqrt[3]{\frac{3J}{4\pi}}.$$

Wird bei einem Kugelabschnitt der Radius der unteren Kreisfläche a, und die Höhe des Abschnitts h genannt, so ist die Formel für den körperlichen Inhalt desselben:

$$J = h\pi\left(\frac{3a^2 + h^2}{6}\right).$$

Der Inhalt der oberen gebogenen Fläche des Kugelabschnitts oder seiner Calotte (§ 271) ist, wenn C die Calotte, a wieder den Radius und h die Höhe bezeichnet:

$$C = (a^2 + h^2)\pi.$$

1) Der Durchmesser einer Kugel ist 84 Centi; wie groß ist die Oberfläche und der körperliche Inhalt der Kugel?

$$O = 4r^2\pi = 4 \,.\, 0{,}42^2 \,.\, 3{,}14 = 4 \,.\, 0{,}1764 \,.\, 3{,}14 = 0{,}7056 \,.\, 3{,}14$$
$$= 2{,}215584 \,\square\text{Meter} = 2 \,\square\text{Meter}\ 2155 \,\square\text{Centi}\ 84 \,\square\text{Milli}.$$

$$J = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4 \,.\, 0{,}42^3 \,.\, 3{,}14}{3} = \frac{4 \,.\, 0{,}074088 \,.\, 3{,}14}{3} = \frac{0{,}296352 \,.\, 3{,}14}{3}$$
$$= 0{,}31018176 \text{ Kubik-Meter} = 310 \text{ Kubik-Deci } 181{,}76 \text{ Kubik-Centi}.$$

2) Der körperliche Inhalt einer Kugel beträgt 0,31018176 Kubik-Meter; wie groß ist der Radius?

$$r = \sqrt[3]{\frac{3J}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \,.\, 0{,}31018176}{4 \,.\, 3{,}14}} = \sqrt[3]{\frac{0{,}93054528}{12{,}56}} = \sqrt[3]{0{,}074088}$$
$$= 0{,}42 \text{ Meter} = 42 \text{ Centi}.$$

3) Die Höhe (h) eines Kugelabschnitts ist 8 Centi und der Radius a seiner unteren Fläche 32 Centi; wie groß ist der körperliche Inhalt des Kugelabschnitts und der Flächeninhalt seiner Calotte?

$$J = h\pi\left(\frac{3a^2 + h^2}{6}\right) = 0{,}08 \,.\, 3{,}14\left(\frac{3 \,.\, 0{,}32^2 + 0{,}08^2}{6}\right)$$
$$= 0{,}2512\left(\frac{0{,}3072 + 0{,}0064}{6}\right) = 0{,}2512 \times 0{,}05227$$
$$= 0{,}013130224 \text{ Kubik-Meter} = 13 \text{ Kubik-Deci } 130 \text{ Kubik-Centi } 224 \text{ Kubik-Milli}$$

$$C = (a^2 + h^2)\pi = (0{,}32^2 + 0{,}08^2)\, 3{,}14 = (0{,}1024 + 0{,}0064)\, 3{,}14$$
$$= 0{,}1088 \,.\, 3{,}14 = 0{,}341632 \,\square\text{Meter} = 3416 \,\square\text{Centi}\ 32 \,\square\text{Milli}.$$

4) Eine kupferne Röstpfanne hat die Form eines Kugelabschnitts, ist 1 Meter 40 Centi weit und hat eine Tiefe (h) von 30 Centi; wieviel Kubik-Meter irgend einer Substanz kann sie aufnehmen, und wieviel Blech ist zu ihrer Anfertigung verwendet worden?

$$J = h\pi\left(\frac{3a^2 + h^2}{6}\right) = 0{,}3 \,.\, 3{,}14\left(\frac{3 \,.\, 0{,}7^2 + 0{,}3^2}{6}\right)$$
$$= 0{,}942\left(\frac{3 \,.\, 0{,}49 + 0{,}09}{6}\right) = 0{,}942 \,.\, 0{,}26$$
$$= 0{,}24492 \text{ Kubik-Meter} = 244 \text{ Kubik-Deci } 920 \text{ Kubik-Centi}.$$

$$C = (a^2 + h^2)\pi = (0{,}7^2 + 0{,}3^2)\, 3{,}14 = (0{,}49 + 0{,}09)\, 3{,}14$$
$$= 0{,}58 \times 3{,}14 = 1{,}8212 \,\square\text{Meter} = 1 \,\square\text{Meter}\ 8212 \,\square\text{Centi}.$$

5) Ein kupferner Kessel ist oben 1 Meter, unten 80 Centi weit und 60 Centi tief, ohne den Boden, der einen Kugelabschnitt von 8 Centi Tiefe bildet; wieviel Liter Wasser faßt der Kessel?

I. Abgekürzter Kegel: $J = \frac{h\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{0{,}6 . 3{,}14}{3}(0{,}5^2 + 0{,}4^2 + 0{,}5 . 0{,}4)$
$= 0{,}2 . 3{,}14 (0{,}25 + 0{,}16 + 0{,}20) = 0{,}628 \times 0{,}61$
$= 0{,}383080$ Kubik-Meter $= 383$ Kubik-Deci 80 Kubik-Centi.

II. Kugelabschnitt: $J = h\pi\left(\frac{3a^2 + h^2}{6}\right) = 0{,}08 . 3{,}14 \left(\frac{3 . 0{,}4^2 + 0{,}08^2}{6}\right)$
$= 0{,}2512 \left(\frac{3 . 0{,}16 + 0{,}0064}{6}\right) = 0{,}2512 \left(\frac{0{,}48 + 0{,}0064}{6}\right)$
$= 0{,}2512 \times 0{,}081067 = 0{,}020364$ Kubik-Meter.
Dazu von I. $= 0{,}383080$ „
also Kubikinhalt des Kessels $= 0{,}403444$ Kubik-Meter.
$= 403$ Kubik-Deci 444 Kubik-Centi.
1 Kubik-Deci = 1 Liter, also faßt der Kessel $403\frac{1}{2}$ Liter Wasser.

6) Tonnenberechnung und specifisches Gewicht.

§ 277.

Es giebt verschiedene Verfahrungsarten zur Berechnung des Inhalts der Tonnen (Fässer), doch sind sie meist ungenau. Das folgende Verfahren und die darauf gegründete Formel ist am richtigsten und wird in der neuesten Zeit am meisten in Anwendung gebracht:

Man betrachtet die Tonne (Faß) als aus 3 Kegeln zusammengesetzt, von denen 2 den Spundkreis (größten Kreis in der Mitte des Fasses) und einer den Bodenkreis (kleinsten Kreis an den Böden) zur Grundfläche, alle 3 aber die Faßlänge zur Höhe haben. Der Inhalt dieser 3 Kegel giebt den Kubikinhalt des Fasses.

Ist also R der Radius des größten Kreises, r der Radius eines der beiden Böden und h die Länge des Fasses, so ist:

$$J = \frac{R^2\pi h}{3} + \frac{R^2\pi h}{3} + \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{h\pi}{3}(2R^2 + r^2).$$

Eine Tonne (Faß) ist im Lichten (innen gemessen) 94 Centi lang, in der Mitte 50 Centi, an den Enden 36 Centi weit; wie groß ist der Kubikinhalt des Fasses, und wieviel Liter Wasser kann es aufnehmen?

$J = \frac{h\pi}{3}(2R^2 + r^2) = \frac{0{,}94 . 3{,}14}{3}(2 . 0{,}25^2 + 0{,}18^2) = \frac{2{,}9516}{3}(2 . 0{,}0625 + 0{,}0324)$
$= \frac{2{,}9516}{3}(0{,}1250 + 0{,}0324) = \frac{2{,}9516}{3} \times 0{,}1574 = \frac{0{,}46458184}{3}$
$= 0{,}15486051 = 154{,}86$ Kubik-Deci. 1 Kubik-Deci = 1 Liter;
also kann das Faß $154\frac{3}{4}$ Liter Wasser aufnehmen.

§ 278.

Will man berechnen, wie schwer das gefüllte Faß ist, so kann man es, wenn es aus hartem Holze besteht, mit Einschluß der vielleicht eisernen Reifen, eben so schwer annehmen, als Wasser. Statt der inneren, nimmt man nun die äußeren Abmessungen des Fasses und berechnet nach vorstehender Formel den Kubikinhalt; da ferner 1 Kubik-Deci Wasser genau 1 Kilo (Kilogramm) wiegt, so

hat man nur nöthig, den gefundenen Kubikinhalt nach Kubik-Deci zu bestimmen und danach das Gewicht des Fasses festzustellen.

In derselben Weise findet man von jedem Körper das Gewicht, wenn man das specifische Gewicht seiner Substanz kennt. Specifisches Gewicht ist nämlich diejenige Zahl, welche angiebt, um wieviel ein Stoff, bei gleichem Volumen (Inhalt), schwerer als Wasser ist. In jedem chemischen oder phisikalischen Lehrbuch, auch in Noback's Taschenbuch für Münz-, Maß- und Gewichts-Verhältnisse, Erste Abtheilung, Seite XXXV. u. s. w., ist das specifische Gewicht fast aller Stoffe angegeben. Man hat indessen nicht mehr nöthig, wie früher, dieses specifische Gewicht mit dem wirklichen Gewicht des Wassers zu multipliciren, sondern da bei dem metrischen Gewicht eine Einheit des Wassers auch eine Einheit des Gewichts bedingt: 1 Liter oder 1 Kubik-Deci gleich 1 Kilo, so kann man die specifischen Gewichte gleich als das Gewicht eines Kubik-Deci annehmen, wie es am Schlusse dieses Paragraphen geschehen und in folgenden beiden Beispielen angewandt ist:

1) Was wird ein Cylinder von Gußeisen wiegen, der 15 Centi 6 Milli stark und $2^1/_2$ Meter lang ist?

$J = r^2 \pi h = 0{,}078^2 . 3{,}14 . 2{,}5 = 0{,}078 \times 0{,}078 . 3{,}14 . 2{,}5$
$= 0{,}006084 . 3{,}14 . 2{,}5 = 0{,}01910376 . 2{,}5 = 0{,}0477594$ Kub.-Mtr.
$= 47{,}76$ Kubik-Deci.

1 Kubik-Deci Gußeisen wiegt 7,206 Kilo,
also $47{,}76 \times 7{,}206 = 344{,}158 = 344{,}16$ Kilo = 6 Centner 44 Kilo 16 Deka Gewicht des Cylinders.

2) Ein Granitblock ist 1,25 Meter lang, 0,94 Meter breit und 2 Meter hoch; wie schwer ist derselbe?

$J = 1{,}25 \times 0{,}94 \times 2 = 1{,}175 \times 2 = 2{,}350$ Kubik-Meter
$= 2350$ Kubik-Deci.

1 Kubik-Deci Granit wiegt 2,7 Kilo,
also $2350 \times 2{,}7 = 634{,}5$ Kilo = 126 Centner 45 Kilo wiegt der Block.

Gewicht einiger oft vorkommenden Stoffe.

1 Kubik-Deci:

Pappel	wiegt	0,393	Kilo	Kupfer (gegossen)	wiegt	8,788	Kilo.
Eiche	„	0,852	„	Kupfer (gehämmert)	„	8,878	„
Ebenholz	„	1,325	„	Silber (gegossen)	„	10,474	„
Ziegelsteine	„	2,520	„	Silber (gehämmert)	„	10,600	„
Granit	„	2,700	„	Blei (gegossen)	„	11,346	„
Schiefer	„	2,763	„	Quecksilber	„	13,598	„
Gußeisen	„	7,206	„	Gold (gegossen)	„	19,258	„
Schmiedeeisen	„	7,788	„	Gold (gehämmert)	„	19,480	„
Gußstahl	„	7,919	„	Platin (geschmiedet)	„	21,250	„

Tabelle I.

Einheimische Münzen, Maße und Gewichte.

1) Münzen:

1 Thaler (Thlr., Rthlr.) = 30 Silbergroschen (Sgr.); 1 Sgr. = 12 Pfennige (Pf.)
1 Friedrichsd'or (Frdr.), 5 Thlr. Gold, verschieden in Courant 5 Thlr. 20 Sgr., 5 Thlr. 21 Sgr. u. s. w.
1 Krone (Kr.), 6 Thlr. Gold, verschieden in Courant 6 Thlr. 6 Sgr., 6 Thlr. 8 Sgr. u. s. w.

2) Maße:

a. Längenmaße.

1 Meter = 10 Decimeter oder Deci;
1 Deci = 10 Centimeter oder Centi;
1 Centi = 10 Millimeter oder Milli.
10 Meter = 1 Dekameter;
1000 Meter = 1 Kilometer;
7500 Meter = 1 Neumeile.
Das Meter tritt auch in die Stelle der bisherigen Elle.

b. Flächenmaße.

1 Quadrat-Meter = 100 Quadrat-Decimeter oder □Deci;
1 □Deci = 100 □Centimeter oder □Centi;
1 □Centi = 100 □Millimeter oder □Milli.
100 □Meter = 1 Ar;
100 Are = 1 Hektar.

c. Körpermaße.

1 Kubik-Meter = 1000 Kubik-Decimeter oder Kub.-Deci;
1 Kub.-Deci = 1000 Kub.-Centimeter oder Kub.-Centi;
1 Kub.-Centi = 1000 Kub.-Millimeter oder Kub.-Milli.

d. Hohlmaße für Flüssigkeiten.

1 Hektoliter oder Hekto = 100 Liter;
1 Liter = 1000 Kub.-Centi oder 1 Kub.-Deci.

e. Hohlmaße für trockene Gegenstände.

1 Hektoliter oder Hekto = 100 Liter;
$^1/_2$ Hektoliter oder 1 Neuscheffel = 50 Liter.

f. Zählmaße.

1 Ballen (Bll.) = 10 Rieß (Rß.); 1 Rieß = 20 Buch (Bch.).;
1 Buch = 24 Bogen (Bg.) Schreibpapier oder 25 Bogen Druckpapier.
1 Groß (Grß.) = 12 Dutzend (Dtzd.); 1 Dutzend = 12 Stück (Stck.).
1 Schock (Schck.) = 4 Mandeln (Mndl.); 1 Mandel = 15 Stück.
1 Zimmer (Zimr.) = 4 Decher (Dchr.); 1 Decher = 10 Stück (Stck.).

g. Zeitmaße.

1 Jahr = 365 Tage; 1 Tag = 24 Stunden; 1 Stunde = 60 Minuten ('); 1 Minute = 60 Sekunden ("); 1 Sekunde = 60 Tertien (''').
1 Jahr = 52 Wochen; 1 Jahr = 12 Monate.

h. Gradmaß.

1 Grad (°) = 60 Minuten('); 1 Minute = 60 Sekunden (").

3) Gewichte:

1 Kilogramm oder Kilo = 100 Dekagramm oder Deka.
½ Kilogramm oder 1 Pfund = 50 Deka oder Neuloth.
1 Deka = 10 Gramm;
1 Gramm = 100 Centigramm;
1 Centigramm = 10 Milligramm.
50 Kilogramm oder 100 Pfund = 1 Centner.
1000 Kilogramm oder 20 Centner = 1 Tonne.

Tabelle II.

Münzen verschiedener Staaten.

Münzen.	Werth derselben im						
	30-Thalerfuß.			52½-Guldenf.		45-Guldenf.	
	Thlr.	Sgr.	Pf.	Gld.	Kreuzer.	Gld.	Neukrz.
A. Silbermünzen.							
Baden: 1 Guld. à 60 Kr. à 4 Pf. . .	—	17	1,8	1	—	—	85,7
1 Kronenthaler	1	16	3	2	42	2	31,25
Baiern: 1 Guld. à 60 Kr. à 4 Pf. . .	—	17	1,8	1	—	—	85,7
Belgien: 1 Franc à 100 Centimes . .	—	8	—	—	28	—	40
Braunschweig: 1 Thlr. à 30 Gr. à 10 Pf.	1	—	—	1	45	1	50
Bremen: ½ Thlr. zu 36 Grote . . .	—	15	6	—	54,36	—	77,5
Dänemark: 1 Reichsbankthlr. à 6 Mark à 16 Schilling	—	22	8,4	1	19,46	1	13,5
1 Speciesthaler	1	15	4,8	2	38,9	2	27
Frankreich: 1 Franc à 100 Centimes .	—	8	—	—	28	—	40
Großbritannien: 1 Schilling à 12 Pence (Silberwerth) . . .	—	9	4,7	—	32,9	—	47
Gewöhnlicher Cours	—	10	—	—	35	—	50
Hamburg: 1 Mark à 16 Schill. à 12 Pf.	—	12	4	—	43,24	—	61,66
Hessen: (Großh.) 1 Guld. à 60 Kr. à 4 Pf.	—	17	1,8	1	—	—	85,7
Italien: 1 Franc à 100 Centesimi . .	—	8	—	—	28	—	40
Lübeck: wie Hamburg, auch Species . .	1	16	8	2	43,3	2	33,3
Mecklenburg: 1 Thlr. à 48 Schill. à 12 Pf.	1	—	—	1	45	1	50
Niederlande: 1 Guld. à 100 Cents . .	—	17	—	—	59	—	85
Nord-Amerika: 1 Doll. à 100 Cents .	1	13	—	2	30,5	2	15
Süd-Amerika: meist Piaster = Dollar .	1	13	—	2	30,5	2	15
Norwegen: Speciesthaler à	1	15	4,8	2	38,9	2	27
Oesterreich: 1 Guld. à 100 Neukreuzer .	—	20	—	1	10	1	—

Münzen.	Werth derselben im						
	30-Thalerfuß.			52½-Guldenf.		45-Guldenf.	
	Thlr.	Sgr.	Pf.	Gld.	Kreuzer.	Gld.	Neukrz.
Oldenburg: 1 Thlr. à 30 Gr. à 10 Pf.	1	—	—	1	45	1	50
Ostindien: Rupien	—	17	—	1	—	—	85
Polen: wie Rußl., auch Guld. à 30 Gr.	—	4	10	—	16,9	—	24
Portugal: Coroas à 1000 Reïs . . .	1	18	9	2	50,6	2	43,7
Preußen: 1 Thlr. à 30 Sgr. à 12 Pf. .	1	—	—	1	45	1	50
Hohenzollern, Guld. à 60 Kr.	—	17	1,8	1	—	—	85,7
Rußland: 1 Rubel à 100 Kopeken . .	1	2	3,7	1	53,08	1	61,5
Sachsen: (Königr.) 1 Thlr. à 30 Ngr. à 10 Pf.	1	—	—	1	45	1	50
„ Altenburg: desgl.	1	—	—	1	45	1	50
„ Coburg: 1 Guld. à 60 Kr. . .	—	17	1,8	1	—	—	85,7
„ Gotha: 1 Thlr. à 30 Gr. à 12 Pf.	1	—	—	1	45	1	50
„ Meiningen: 1 Guld. à 60 Kr. .	—	17	1,8	1	—	—	85,7
„ Weimar: 1 Thlr. à 30 Gr. à 12 Pf.	1	—	—	1	45	1	50
Schwarzburg: Rudolst. Guld. und Thlr. Sondersh. 1 Thlr. à 30 Gr.	1	—	—	1	45	1	50
Schweden: Reichsthlr. à 48 Schilling .	—	11	5	—	40	—	57
Schweiz: 1 Franc à 100 Centimes . .	—	8	—	—	28	—	40
Spanien: 1 Duros à 20 Realen . . .	1	12	—	2	27	2	10
1 Piaster	1	13	10	2	33	2	19
Türkei: 20 Piasterstücke	1	5	10	2	5,4	1	79
1 Piaster	—	1	9,5	—	6,27	—	9
Waldeck: (Lippe ꝛc.) Thlr. à 30 Gr. à 12 Pf.	1	—	—	1	45	1	50
Würtemberg: 1 Guld. à 60 Kr. à 4 Pf.	—	17	1,8	1	—	—	85,7
Vereinsmünzen:	2	—	—	3	15	3	—
B. Goldmünzen.							
Kronen: 50 auf 1 Pfd. fein Gold circa .	9	8	—	16	13	13	90
Preuß. Friedrichsd'or (5 Thlr. Gold) . .	5	20	—	9	55	8	50
Andere Goldstücke à 5 Thlr. (Pistolen) circa	5	12	6	9	28,8	8	12,5
Bairische Carolinen, circa	7	1	8	12	20,8	10	58
Belgische 25-Frankenstücke, circa . . .	6	20	—	11	40	10	—
Englische Sovereigns (Livre Sterling). . à 20 Shillings	6	26	—	12	1	10	30
Französische 20-Frankenstücke gewöhnlich 5⅓ Thlr. . . .	5	13	7	9	32,5	8	18
Nord-Amerika: Eagle à 10 Dollars circa	14	4	—	24	44	21	20
Rußland: Halbe Imperialen à 5 Rubel .	5	18	—	9	48	8	40

Tabelle III.

Bisherige Gewichte verschiedener Staaten.

Gewichte.	In Gramm.
Anhalt: Altes preußisches Gewicht	467,71
Baden: 1 Pfd. à 32 Loth à 4 Qtch. (1 Ctr. = 100 Pfd.)	500
Baiern: 1 Pfd. à 32 Loth à 4 Qtch.	560
Rheinbaiern wie Frankreich.	
Belgien: wie Frankreich	
Braunschweig: 1 Pfd. à 10 Loth à 10 Quint. à 10 Halbgramm . .	500
Bremen: wie Braunschweig	500
Dänemark: wie Baden (1 Schiffslast = 40 Ctr.)	500
Frankreich: 1 Kilogramm à 10 Hectogramm = 100 Decagramm = 1000 Gramm = 10000 Decigramm = 100000 Centigr.	1000
Großbritannien: Handelsgewicht 1 Pfd. à 16 Unzen à 16 Drachm.	453,59
Gold-, Silber-, Apotheker-Gewicht 1 Pfd. à 12 Unzen à 20 Pence à 24 Grains. 1 Ctr. = 4 Quarter = 112 Pfd.	373,24
Hamburg: wie Braunschweig	500
Hessen: Großherzogthum wie Baden.	
Lippe: wie Braunschweig	500
Lübeck: 1 Pfd. à 32 Loth à 4 Quentchen	486,47
1 Ctr. = 112 Pfd. = 8 Liespfd., 1 Schiffspfd. = 20 Liespfd. = 280 Pfd., 1 Schiffslast = 4000 Pfd.; 1 Commerzlast = 6000 Pfd.	
Mecklenburg-Schwerin: 1 Pfd. à 32 Loth	484,71
Mecklenburg-Strelitz: 1 Pfd. à 32 Loth	467,71
Niederlande: 1 Pond à 10 Ons à 10 Lood à 10 Wigtjes	1000
Nord-Amerika: wie Großbritannien.	
Oesterreich: 1 Pfd. à 32 Loth à 4 Qtch.	560,01
1 Ctr. = 100 Pfd., 1 Tonne = 20 Ctr.	
Oldenburg: wie Braunschweig	500
Preußen: 1 Pfd. à 30 Loth à 10 Qtch. à 10 Cent à 10 Korn. 100 Pfd. = 1 Ctr.; 4000 Pfd. = 1 Last	500
Rußland: 1 Pfd. à 96 Solotnik	409,51
1 Pud = 40 Pfd.	
Sachsen: (Königreich) wie Preußen	500
" Gotha wie früher Preußen	467,71
" Coburg und Meiningen 1 Pfd.	510,00
" Weimar 1 Pfd.	467,63
Schweden: 1 Skalpund à 32 Lod à 4 Qvintin. 1 Ctr. = 100 Skalpund	425,08
Schweiz: 1 Pfd. (auch französische Eintheilung)	500
Spanien: 1 Libra à 16 Unzas	460,14
Türkei: 1 Oka à 400 Drachmen	1278,48
Würtemberg: 1 Pfd. à 32 Loth	467,73
Neues Münzgewicht: 1 Pfd.	500
Altes Münzgewicht: Die Köln. Mark à 16 Loth à 12 Grän. Zur Bestimmung des Feingehaltes: 1 Mark à 16 Loth à 18 Grän (Silber). 1 Mark = 24 Karat à 12 Grän (Gold) . . .	233,8555
Apothekergewicht: 1 Pfd. = 12 Unzen = 24 Loth	350,78

Tabelle IV.

Bisherige Längenmaße verschiedener Staaten.

Längenmaße.	In Meter.
Anhalt: wie Preußen.	
Baden: 1 Fuß (1 Elle = 2 Fuß)	0,3
Baiern: 1 Fuß	0,2918
1 Elle	0,833
Belgien: wie Frankreich.	
Braunschweig: 1 Fuß (1 Elle = 2 Fuß)	0,2852
Bremen: 1 Fuß (1 Elle = 2 Fuß)	0,289
Dänemark: 1 Fuß (1 Elle = 2 Fuß)	0,3136
Frankreich: 1 Meter	1
Großbritannien: 1 Yard à 3 Feet	0,9144
Hamburg: 1 Fuß (1 Elle = 2 Fuß)	0,2864
Hessen (Großherzogthum): 1 Fuß	0,25
1 Elle	0,6
Italien: 1 Metro (wie Frankreich)	
Lübeck: 1 Fuß (1 Elle = 2 Fuß)	0,291
Mecklenburg: 1 Fuß	0,2877
Niederlande: französisches Maß; 1 Elle = ...	1
Nord-Amerika: wie Großbritannien.	
Oesterreich: 1 Fuß à 12 Zoll à 12 Linien	0,316
1 Elle = 2,465 Fuß.	
Oldenburg: 1 Fuß	0,296
Portugal: 1 Palmo	0,226
Preußen: 1 Fuß (Duodecimalmaß)	0,31385
1 Elle = 2⅛ Fuß = 25½ Zoll	0,6669
Rußland: 1 Fuß	0,305
1 Arschin	0,7112
Sachsen: (Königreich) und Weimar: 1 Fuß (1 Elle = 2 Fuß) . .	0,282
Coburg:	0,304
Schweden: 1 Fuß (1 Elle = 2 Fuß)	0,297
Schweiz: 1 Fuß (1 Elle = 2 Fuß)	0,3
Spanien: 1 Fuß (Pies)	0,2826
Türkei: 1 kleiner Pick	0,687
Würtemberg: 1 Fuß	0,2865
1 Elle	0,6142
Wegemaße.	
Amerikanische Meilen	1523,972
Belgische Posten à 4000 Toisen	7796,150
Dänische Meilen à 2000 Rheinländische Ruthen	7532,485
Englische Landmeilen à 1760 Yards	1523,972
„ Seemeilen	1851,852
Französische Lieues communes	4444,444
„ „ de poste à 2200 Toisen	4287,880
Geographische Meilen	7407,408
Italienische Meilen (Miglios)	2466,000
Niederländische Meilen (Myls)	1000,000
Oesterreichische Meilen à 4000 Wiener Klafter	7586,663
Preußische Meilen à 2000 Rheinländische Ruthen	7532,485
Schweizer Stunden à 16000 Schweizer Fuß	4800,000
Russische Werst	1066,780
Preußische Neumeilen à 7½ Kilometer	7500,000

Tabelle V.

Inhaltsmaße verschiedener Staaten.

Inhaltsmaße.	Trockene Substanzen.	Flüssigkeiten.
	100 Hektoliter sind gleich:	
Amsterdamer Sack	119,844	—
" Mengel	—	8246,06
Antwerpener Viertel	125,585	—
Badische Malter	66,667	—
" Ohm	—	66,667
" Maß	—	6666,67
Bairische Scheffel	44,973	—
" Schenk-Eimer	—	155,905
" Visir-Eimer	—	146,161
" Maß	—	9354,27
Braunschweigische Himten	321,081	—
" Quartier	—	10674,14
Bremer Scheffel	134,946	—
" Ohm	—	68,982
" Stübchen	—	3104,20
Dänische Korntonnen	71,880	—
" Ohm	—	66,779
" Pott	—	10350,68
Dresdener Scheffel	95,109	—
" Eimer	—	148,450
" Kannen	—	10688,44
Englische Quarters	34,390	—
" Gallons	—	2200,97
Hamburger Faß	189,942	—
" Oxhoft	—	46,029
" Quartier	—	11047,02
Lübecker Scheffel	288,236	—
" Ohm	—	68,728
" Stübchen	—	2749,13
Niederländische Mudden	100,000	—
" Velte	—	100,000
" Kannen	—	10000,00
Preußische Scheffel	181,946	—
" Eimer	—	145,556
" Quart	—	8733,39
Rostocker Kornscheffel	257,142	—
Schwedische Ahm (Ohm)	—	63,682
" Tonnen (Korntonnen)	79,602	—
Wiener Wein-Eimer	—	172,353
" Maß	—	7067,10
Würtembergische Eimer	—	34,022
" Maß	—	5443,51

Berlin, Druck von W. Büxenstein.

Seite 32.